ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

V

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

V

ГЕОМЕТРИЯ

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

КНИГА ПЯТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

51.3 (03)
Э 68
УДК 513.0 (03)

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ЭНЦИКЛОПЕДИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКИ

П. С. АЛЕКСАНДРОВ,
А. И. МАРКУШЕВИЧ,
А. Я. ХИНЧИН

РЕДАКТОРЫ КНИГИ ПЯТОЙ:
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ,
И. М. ЯГЛОМ

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ
КНИГА ПЯТАЯ — ГЕОМЕТРИЯ

М., 1966 г., 624 стр. с илл.

Редакторы *В. И. Битюцков, И. Е. Морозова.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.* Корректор *С. Н. Емельянова.*

Сдано в набор 20/XI 1965 г. Подписано к печати 24/III 1966 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 39. Условн. печ. л. 39. Уч.-изд. л. 41,18. Тираж 25 000 экз. Т-04630. Цена книги 1 р. 56 к. Заказ № 336.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Главполиграфпром Комитета по печати при Совете Министров СССР. Отпечатано в Ленинградской типографии № 1 «Печатный Двор» им А. М. Горького, Гатчинская, 26 с матриц Первой Образцовой типографии им. А. А. Жданова, Москва, Ж-54, Валовая, 28.

2-2-2
8-65

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ

(В. А. Рохлин)

§ 1. Введение: что такое площадь? 7
§ 2. Класс многоугольных фигур 13
§ 3. Площадь на классе многоугольных фигур 21
§ 4. Класс квадрируемых фигур 33
§ 5. Площадь на классе квадрируемых фигур 44
§ 6. Другое построение теории площадей 56
§ 7. Объем 65
Добавление. Площадь и объем в геометрии подобия 81
Литература 86

ДЛИНА КРИВОЙ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

(В. Г. Болтянский)

§ 1. Длины ломаных линий 89
§ 2. Простые дуги 100
§ 3. Спрямляемые линии 109
§ 4. Длина на классе спрямляемых линий 117
§ 5. О понятии площади поверхности 130
Литература 140

РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И МНОГОГРАННИКОВ

(В. Г. Болтянский)

§ 1. Введение 142
§ 2. Равносоставленность многоугольников 158
§ 3. Равносоставленность многогранников 165
Литература 180

ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ И ТЕЛА

(В. Г. Болтянский, И. М. Яглом)

§ 1. Определение и основные свойства 182
§ 2. Простейшие метрические характеристики выпуклых фигур 195
§ 3. Выпуклые многоугольники и многогранники 207
§ 4. Периметр, площадь, объем 219
§ 5. Выпуклые тела в многомерных пространствах 239
§ 6. Некоторые задачи комбинаторной геометрии 247
Литература 267

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

(В. Г. Болтянский, И. М. Яглом)

§ 1. Наибольшие и наименьшие значения функций 270
§ 2. Знаменитые геометрические задачи 307
§ 3. Задачи на максимум и минимум, связанные с выпуклыми фигурами 338
Литература 347

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

(Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом)

§ 1. Определение многомерного пространства 349
§ 2. Прямые и плоскости 354
§ 3. Шары и сферы 373
§ 4. Многогранники 378
Литература 391

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

(Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом)

§ 1. Возникновение неевклидовой геометрии Лобачевского 394
§ 2. Неевклидова геометрия Римана 404
§ 3. Псевдоевклидова геометрия 420
§ 4. Неевклидова геометрия Лобачевского 439
§ 5. Неевклидова геометрия Галилея 452
§ 6. Неевклидовы геометрии и группы преобразований 458
§ 7. Некоторые другие геометрические системы 465
Литература 474

ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

(В. А. Ефремович)

Введение 477
§ 1. Линии и поверхности 484
§ 2. Многообразия 516
§ 3. Общие топологические понятия 536
Литература 555

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

(З. А. Скопец)

§ 1. Различные определения конических сечений 557
§ 2. Эллипс 569
§ 3. Гипербола 587
§ 4. Парабола 598
§ 5. Некоторые общие свойства конических сечений 603
Литература 607

Именной указатель 609
Предметный указатель 612

ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение: что такое площадь? 7
1.1. Основные свойства площади 7
1.2. Квадрируемые фигуры 8
1.3. Аксиоматическое определение площади 9
1.4. Проблема существования площади 10
1.5. Конструктивные определения площади 10
1.6. Сравнение площади с элементарными функциями действительного переменного 12
1.7. Итоги 12
§ 2. Класс многоугольных фигур 13
2.1. Внутренние, внешние и граничные точки 13
2.2. Открытые и замкнутые множества 15
2.3. Выпуклые многоугольники 16
2.4. Многоугольные фигуры 17
2.5. Операции над многоугольными фигурами 18
§ 3. Площадь на классе многоугольных фигур 21
3.1. Определение площади 21
3.2. Простейшие следствия определения 21
3.3. Вычисление площади прямоугольника 22
3.4. Вычисление площади треугольника и трапеции 23
3.5. Вычисление площади произвольной многоугольной фигуры 23
3.6. Строгая монотонность 24
3.7. Теорема существования и единственности 24
3.8. Поведение площади при преобразовании подобия 29
3.9. Поведение площади при ортогональном проектировании . . . 29
3.10. Поведение площади при аффинном преобразовании 30
§ 4. Класс квадрируемых фигур 33
4.1. Определение квадрируемой фигуры 33
4.2. Замечание о выборе фигур P и Q 33
4.3. Нуль-множества 34
4.4. Лемма о граничной точке 35
4.5. Критерий квадрируемости 35
4.6. Операции над квадрируемыми фигурами 36
4.7. Линии 36
4.8. Квадрируемость классических фигур 40
4.9. Круг 41
4.10. Примеры неквадрируемых множеств 41
§ 5. Площадь на классе квадрируемых фигур 44
5.1. Определение площади 44
5.2. Простейшие следствия определения 44
5.3. Площадь как точная грань 45
5.4. Площадь как предел 46

5.5. Теорема существования и единственности 47
5.6. Нуль-множества 48
5.7. Полнота класса квадрируемых фигур 48
5.8. Поведение площади при аффинном преобразовании 49
5.9. Вычисление площади 50
5.10. Площадь на классе квадрируемых замкнутых областей . . . 54
§ 6. Другое построение теории площадей 56
6.1. Введение 56
6.2. Площадь относительно сетки 57
6.3. Критерий квадрируемости 59
6.4. Операции над квадрируемыми фигурами 60
6.5. Основные свойства площади 61
6.6. Теорема единственности 63
6.7. Инвариантность площади 64
6.8. Эквивалентность двух определений площади 64
§ 7. Объем 65
7.1. Введение 65
7.2. Класс многогранных тел 66
7.3. Определение объема на классе многогранных тел 68
7.4. Вычисление объема на классе многогранных тел 68
7.5. Существование и единственность объема на классе многогранных тел 72
7.6. Поведение объема многогранного тела при геометрических преобразованиях 75
7.7. Класс кубируемых тел 75
7.8. Объем на классе кубируемых тел 76
7.9. Цилиндры и конусы 77
7.10. Шар 78
7.11. Тела вращения 80
7.12. Другое построение теории объемов 81
Добавление. Площадь и объем в геометрии подобия 81
1. Метрическая геометрия и геометрия подобия 81
2. Преобразование площади и объема при замене единичного отрезка 83
3. Переход к геометрии подобия 84
4. Единицы длины, площади и объема 85
Литература 86

Эта статья посвящена основным вопросам теории площадей и объемов — их определению, свойствам и вычислению. Площадь изучается только на плоскости. Определение площади кривой поверхности требует совсем других средств [1]).

Предполагается, что читатель знаком с теорией длин прямолинейных отрезков (см. стр. 89—94). Напомним, что в основе этой теории лежит выбор единичного отрезка. Если единичный отрезок заменяется другим отрезком, то длины всех отрезков делятся на старую длину нового единичного отрезка. Площади и объемы тоже зависят от выбора единичного отрезка. Эта зависимость изучается в специ-

[1]) См. статью «Длина кривой и площадь поверхности» в этом томе ЭЭМ. (*Прим. ред.*)

альном добавлении, помещенном после статьи. *В самой статье единичный отрезок считается фиксированным раз и навсегда.*

Требования к общей подготовке читателя почти всюду ограничиваются самыми начальными сведениями о множествах, функциях и последовательностях (свойства сложения, вычитания и пересечения множеств; общее понятие числовой функции; границы числовых множеств; предел последовательности). Немногие менее элементарные пункты отмечены звездочкой и могут быть пропущены без ущерба для понимания остального.

Наименее элементарной проблемой теории площадей и объемов является их вычисление: сколько-нибудь полное рассмотрение этой проблемы требует интегрального исчисления, притом привлечения не только простых, но и кратных интегралов, включая переход к криволинейным координатам. Понятно, что такие сложные вещи не могут излагаться в элементарной статье. Приходится ограничиться несколькими формулами, выражающими площади и объемы через простые интегралы.

§ 1. Введение: что такое площадь?

1.1. Основные свойства площади. Площадь принадлежит к числу наиболее широко известных математических понятий — тех, с которыми все мы встречаемся в практической жизни. Практическое знакомство с площадями делает это понятие чрезвычайно надежным в наших глазах. Площадь представляется нам физической реальностью, такой же несомненной, как окружающие нас предметы.

Значительно менее известен тот факт, что площадь — очень не простое понятие. Точное определение площади представляет значительные логические трудности и почти неизвестно за пределами узкого круга профессиональных математиков. Многим самый вопрос покажется искусственным: они скажут, что площадь — *первичное* понятие, не подлежащее определению.

Взгляд на площадь как на первичное понятие сложился еще в древности. До сравнительно недавнего времени этого взгляда придерживались и математики. На протяжении многих столетий они видели свою задачу в *вычислении* площадей; им не приходило в голову, что площадь нуждается в специальном определении.

Между тем их вычисления должны были на чем-то основываться — если не на прямом определении, то на чем-то, его заменяющем, на каких-то принципах, которые позволяли им всякий раз получать в качестве площади определенное число. И такие принципы, конечно, существовали, хотя обычно не формулировались. Это — *основные свойства* площади. Они широко известны, потому что служат основой всех применений — теории площадей. Мы выскажем их в следующей форме, наиболее удобной для наших целей.

(α) *Площадь фигуры есть неотрицательное число.*

(β) *Площадь фигуры, составленной из нескольких фигур без общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.*

(γ) *Равные фигуры имеют равные площади.*

(δ) *Площадь единичного квадрата равна единице.*

Свойство (α) называется *положительностью*, (β) — *аддитивностью*, (γ) — *инвариантностью*, (δ) — *нормированностью*. Под единичным квадратом понимается квадрат, построенный на единичном отрезке. Подчеркнем, что в этой статье речь идет исключительно о площадях *плоских* фигур.

Конечно, в действительности четыре свойства не были единственными, которыми математики пользовались при вычислении площадей. Но все другие свойства площади, которые они явно или неявно использовали, оказались следствиями этих четырех. В качестве примера укажем на широко известное свойство, называемое *монотонностью*: *площадь части фигуры не превышает площади всей фигуры*. Монотонность есть следствие положительности и аддитивности. Действительно, пусть F — фигура и G — ее часть. Обозначим через G' дополнительную часть. Так как G и G' вместе составляют фигуру F и не имеют общих внутренних точек, то пл. F = пл. G + пл. G', а так как пл. $G' \geqslant 0$, то пл. $F \geqslant$ пл. G.

1.2. Квадрируемые фигуры. Методы, позволяющие вычислять площади на основании свойств (α) — (δ), в своих наиболее общих чертах также были созданы еще в древности.

Сначала математики научились вычислять площади многоугольных фигур. Было установлено, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту и что для вычисления площади произвольной многоугольной фигуры достаточно разбить ее на треугольники без общих внутренних точек и сложить площади этих треугольников.

Перейдя к фигурам, ограниченным кривыми линиями, математики стали приближать их многоугольными фигурами. Пусть F — фигура, площадь которой должна быть вычислена. Рассмотрим, с одной стороны, всевозможные многоугольные фигуры, содержащиеся в F, с другой стороны, — всевозможные многоугольные фигуры, содержащие F. Первые называются *входящими* в F, вторые — *объемлющими* F. В силу монотонности площади, для любой входящей многоугольной фигуры P и любой объемлющей многоугольной фигуры Q справедливо неравенство

$$\text{пл. } P \leqslant \text{пл. } F \leqslant \text{пл. } Q.$$

Таким образом, площади фигур P и Q служат приближенными значениями площади фигуры F с недостатком и с избытком. Погрешности обоих приближений, т. е. разности пл. F — пл. P и пл. Q — пл. F, не превышают разности пл. Q — пл. P. Предположим,

что путем надлежащего выбора многоугольных фигур P и Q мы можем сделать последнюю разность сколь угодно малой. Тогда и погрешности наших приближений могут быть сделаны сколь угодно малыми. Это значит, что площадь фигуры F может быть вычислена с произвольной степенью точности.

Ясно, что этот метод применим только к таким фигурам F, для которых существуют входящие многоугольные фигуры P и объемлющие многоугольные фигуры Q со сколь угодно малыми разностями пл. Q — пл. P. Такие фигуры F называются *квадрируемыми*. Например, круг — квадрируемая фигура. Для него в качестве P и Q могут быть взяты правильные 2^n-угольники — вписанный и описанный. Известно, что разность площадей этих 2^n-угольников стремится к нулю при $n \longrightarrow \infty$.

Класс квадрируемых фигур очень широк. Только с квадрируемыми фигурами и имеет дело теория площадей, которой мы будем заниматься.

1.3. Аксиоматическое определение площади. Оказывается, что сведений, которыми мы уже располагаем, достаточно для определения площади. Нужно лишь взглянуть на них с новой точки зрения.

Отделим прежде всего чисто математические сведения о площади, содержащиеся в пп. **1.1** и **1.2**, от исторических и иных соображений. Эти сведения сводятся к трем положениям: (1) Каждой квадрируемой фигуре отвечает определенное число — ее площадь. (2) Эти числа-площади обладают свойствами (α) — (δ). (3) Площадь любой квадрируемой фигуры можно вычислить с произвольной степенью точности на основании свойств (α) — (δ). Первое положение означает, что площадь есть функция, определенная на классе квадрируемых фигур. Согласно второму эта функция обладает свойствами (α) — (δ). Третье положение показывает, что на классе квадрируемых фигур не существует другой функции со свойствами (α) — (δ). Следовательно, *площадь может быть определена как функция квадрируемой фигуры, обладающая свойствами* (α) — (δ).

К сожалению, эта краткая формулировка не безупречна: она предполагает, что класс квадрируемых фигур уже определен, тогда как определение этого класса само опирается на понятие площади, правда, только на понятие площади многоугольной фигуры. Чтобы устранить это затруднение, достаточно предварительно, с помощью тех же условий (α) — (δ), определить площадь на классе многоугольных фигур. Полная формулировка определения площади состоит, таким образом, из трех частей: сначала площадь определяется как функция со свойствами (α) — (δ) на классе многоугольных фигур; затем определяется класс квадрируемых фигур; наконец, площадь определяется как функция со свойствами (α) — (δ) на классе квадрируемых фигур.

Как видно из предыдущего, это определение представляет собой лишь перевод на современный математический язык тех представлений о площади, которые достались нам в наследство от математиков прошлого. Конечно, такой перевод не мог обойтись без уточнений. Наиболее заметное уточнение касается класса фигур, которым приписывается площадь. Мы должны были точно указать этот класс, тогда как прежде математики не ставили перед собой такой задачи.

Нетрудно заметить, что свойства (α)—(δ) играют в изложенном определении площади роль аксиом. Иногда их называют *аксиомами площади*, а само определение называют *аксиоматическим*.

1.4. Проблема существования площади. Вернемся к трем положениям, сформулированным в начале предыдущего пункта. Положения (1) и (2) были приняты нами как очевидные; положение (3), согласно пп. **1.1** и **1.2**, представляет собой теорему, которая может быть доказана. Из положения (3) вытекает, что на классе квадрируемых фигур не может быть двух различных функций со свойствами (α)—(δ); утверждение, содержащееся в положениях (1) и (2), состоит, очевидно, в том, что *по крайней мере одна такая функция существует*.

Поскольку положение (3) может быть доказано, единственность нашей функции не вызывает сомнений. Но так ли уж очевидны положения (1) и (2)? Разве в действительности очевидно, что на классе квадрируемых фигур, или хотя бы на классе многоугольных фигур, существует функция со свойствами (α)—(δ)?

Конечно, это вовсе не очевидно. До сих пор положения (1) и (2) представлялись нам очевидными просто потому, что мы исходили из старого взгляда на площадь как на нечто данное. В действительности существование функции со свойствами (α)—(δ) требует доказательства. Сначала должны быть доказаны существование и единственность такой функции на классе многоугольных фигур, затем должен быть определен класс квадрируемых фигур и, наконец, должны быть доказаны существование и единственность такой функции на классе квадрируемых фигур. Только после того как все это проделано, слова «площадь есть функция квадрируемой фигуры, обладающая свойствами (α)—(δ)», становятся полноценным определением.

1.5. Конструктивные определения площади. Все известные доказательства существования функции со свойствами (α)—(δ) заключаются в прямом построении этой функции, т. е. в описании процесса, позволяющего по фигуре F найти число пл. F. После того как функция построена, устанавливается, что она обладает свойствами (α)—(δ). Разные доказательства отличаются друг от друга, конечно, не тем, что приводят к различным функциям,— функция всегда одна и та же,— а тем, что в них по-разному строится эта функция.

Одно из возможных прямых построений функции со свойствами $(\alpha)-(\delta)$ на классе многоугольных фигур фактически было описано в п. **1.2**: заданная многоугольная фигура разбивается на треугольники без общих внутренних точек, затем для каждого треугольника составляется половина произведения какой-нибудь стороны на соответствующую высоту и результаты складываются. Тот факт, что этим путем действительно получается функция многоугольной фигуры со свойствами $(\alpha)-(\delta)$, требует, конечно, доказательства.

После того как площадь построена на классе многоугольных фигур, ее уже сравнительно нетрудно продолжить на класс квадрируемых фигур. Способ продолжения опять-таки был фактически описан в п. **1.2**: за площадь квадрируемой фигуры принимается то единственное число, для которого площади входящих многоугольных фигур служат приближениями с недостатком, а площади объемлющих многоугольных фигур — приближениями с избытком. Свойства $(\alpha)-(\delta)$ для продолженной функции выводятся из ее уже установленных свойств на классе многоугольных фигур.

Всякое прямое построение функции со свойствами $(\alpha)-(\delta)$ само, очевидно, может служить определением площади. Такие определения называются *конструктивными*, и любое из них может быть положено в основу теории площадей. Если при аксиоматическом определении площади должны быть доказаны ее существование и единственность, то при конструктивном определении становятся теоремами и подлежат доказательству свойства $(\alpha)-(\delta)$. С логической точки зрения конструктивное построение теории площадей эквивалентно аксиоматическому и в конечном счете отличается от него лишь порядком изложения. Методически каждое построение имеет свои достоинства и свои недостатки.

Для начинающего очевидным недостатком намеченного выше конструктивного определения площади является его психологическая неубедительность: площадь треугольника *по определению* объявляется равной половине произведения основания на высоту. Более естественным является конструктивный подход к понятию площади, содержащийся в широко известной наивной формулировке: *площадь фигуры есть число единиц площади, заключенных в этой фигуре*. Этой формулировке можно следующим образом придать точный смысл. Разобьем плоскость горизонталями и вертикалями на квадраты со стороной 1, затем каждый из них на 100 квадратов со стороной $1/10$, затем каждый из полученных квадратов — на 100 квадратов со стороной $1/100$, и т. д. Пусть α_n — число квадратов со стороной $1/10^n$, целиком содержащихся в заданной фигуре F, и α_n' — число квадратов со стороной $1/10^n$, пересекающихся с этой фигурой (см. рис. 19 на стр. 57). Положим $s_n = \alpha_n/100^n$ и $s_n' = \alpha_n'/100^n$. С наивной точки зрения s_n есть «число единиц площади, заключенных в F», взятое с недостатком, а s_n' — «число единиц площади,

заключенных в F», взятое с избытком. Если существует единственное число, заключенное между всеми числами s_n и всеми числами s_n', то фигура F называется *квадрируемой* и указанное число называется *площадью* фигуры F. Доказывается, что эта площадь обладает свойствами (α)—(δ) и что это второе определение квадрируемости эквивалентно определению п. **1.2.**

1.6. Сравнение площади с элементарными функциями действительного переменного. Логическая ситуация, с которой мы имели дело в предыдущих пунктах, встречается в математике довольно часто. Многие известные функции могут быть определены как своими свойствами («аксиоматически»), так и прямым построением («конструктивно»). Геометрическими примерами могут служить, наряду с площадью, длина и объем. Не лишним будет и пример из другой области.

Рассмотрим показательную функцию $f(x)=a^x$ $(a>0)$. Хотя с ее точным определением знакомы лишь немногие, ее основные свойства широко известны. Мы выберем следующие три свойства:

(a) Если $x<y$, то $f(x)\leqslant f(y)$ при $a\geqslant 1$ и $f(x)\geqslant f(y)$ при $a\leqslant 1$. (b) $f(x+y)=f(x)f(y)$. (c) $f(1)=a$.

Можно показать, что эти три свойства позволяют с произвольной степенью точности вычислить значение функции a^x при любом действительном значении x. Следовательно, на множестве действительных чисел не существует двух различных функций с этими свойствами. Иными словами, a^x можно аксиоматически определить как функцию действительного числа, обладающую свойствами (a), (b), (c).

Доказательство существования такой функции состоит в ее прямом построении. Сначала ее значения определяются для целых, затем для дробно-рациональных и, наконец, для иррациональных значений x. Это построение, правда лишь в самых общих чертах, излагается в школе. Оно представляет собой не что иное, как конструктивное определение функции a^x.

Аналогично могут быть определены и другие основные элементарные функции: логарифмические, степенные, тригонометрические и обратные тригонометрические. Например, $\log_a x$ можно определить как функцию положительного числа, обладающую тремя свойствами: (a) если $x<y$, то $f(x)<f(y)$ при $a>1$ и $f(x)>f(y)$ при $a<1$; (b) $f(xy)=f(x)+f(y)$; (c) $f(a)=1$.

1.7. Итоги. Главный итог состоит в том, что площадь, которую прежде математики считали первичным понятием, может быть определена через более простые понятия и в конечном счете сведена к основным понятиям геометрии и арифметики. Это сведение не просто и добавляет к проблеме вычисления площади, которая раньше была единственной в теории площадей, ряд новых проблем логического характера.

Без сомнения, эти новые проблемы представляют для начинающего известные трудности. Задача настоящего введения — помочь читателю преодолеть их. Построение теории площадей, намеченное в предыдущих пунктах, будет подробно развито в дальнейшем. Систематическое изложение начнется со следующего параграфа.

§ 2. Класс многоугольных фигур

2.1. Внутренние, внешние и граничные точки. Пусть M — произвольное множество точек плоскости. Точка плоскости называется *внутренней* по отношению к M, если существует круг с центром в этой точке, целиком лежащий в M. Точка плоскости называется *внешней* по отношению к M, если существует круг с центром в этой точке, не имеющий с M общих точек. Точка плоскости называется *граничной* по отношению к M, если всякий круг с центром в этой точке содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую множеству M, и по крайней мере одну точку, не принадлежащую множеству M. Ясно, что каждая точка плоскости является по отношению к M либо внутренней, либо внешней, либо граничной. Точки всех трех типов показаны на рис. 1.

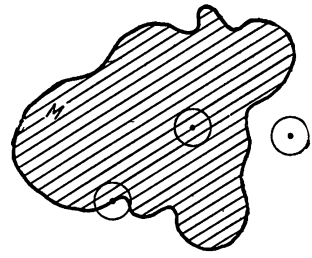


Рис. 1. Внутренние, внешние и граничные точки.

Всякая точка, внутренняя по отношению к M, принадлежит множеству M. Совокупность всех внутренних точек называется *внутренней частью* множества M. Ни одна точка, внешняя по отношению к M, не принадлежит множеству M. Что касается граничных точек, то они могут принадлежать и могут не принадлежать множеству M. Совокупность всех граничных точек (как принадлежащих, так и не принадлежащих множеству M) называется *границей* множества M. Сумма внутренней части множества M и его границы называется *замыканием* множества M. Нетрудно дать и прямое определение замыкания: точка плоскости в том и только в том случае принадлежит замыканию множества M, если всякий круг с центром в этой точке содержит по крайней мере одну точку множества M.

Примеры. 1. M — круг радиуса r с центром в точке A, т. е. множество тех точек B, для которых расстояние $\rho(A, B)$ не превышает r. Пусть, далее, C — произвольная точка плоскости. Точка C является внутренней, если $\rho(A, C) < r$, внешней, если $\rho(A, C) > r$, и граничной, если $\rho(A, C) = r$. Таким образом, граница круга есть окружность с тем же центром и радиусом.

2. M — полуплоскость, т. е. множество, состоящее из точек некоторой прямой L и всех точек плоскости, лежащих от L по ту же

сторону, что и некоторая заданная точка. Границей полуплоскости M является прямая L.

3. Прямая, отрезок, ломаная, окружность вовсе не имеют внутренних точек. Все их точки являются по отношению к ним граничными, а все остальные точки плоскости — внешними. В частности, точки, лежащие внутри окружности, являются по отношению к ней внешними, — обстоятельство, указывающее на несовершенство нашей терминологии.

Внутренняя часть множества M будет обозначаться через $M_в$, граница — через $M_г$, замыкание — через $M_з$. Согласно изложенному выше [1]), $M_в \subset M \subset M_з$, $M_з = M_в + M_г = M + M_г$.

Ясно, что если $M \subset N$, то $M_в \subset N_в$ и $M_з \subset N_з$. Покажем, что для любых двух множеств M и N

$$(MN)_в = M_в N_в, \tag{1}$$

$$(M+N)_з = M_з + N_з, \tag{2}$$

$$(M+N)_г \subset M_г + N_г, \qquad (MN)_г \subset M_г + N_г, \tag{3}$$

$$(M-N)_г \subset M_г + N_г. \tag{4}$$

Доказательство формулы (1). Если $A \in (MN)_в$, то существует круг с центром в точке A, лежащий в MN, т. е. лежащий в M и в N. Тогда $A \in M_в$ и $A \in N_в$, т. е. $A \in M_в N_в$. Следовательно, $(MN)_в \subset M_в N_в$. Если $A \in M_в N_в$, то $A \in M_в$ и $A \in N_в$, т. е. существует круг с центром в точке A, лежащий в M, и существует круг с центром в точке A, лежащий в N. Меньший из этих двух кругов есть круг с центром в точке A, лежащий в MN, так что $A \in (MN)_в$. Следовательно, $M_в N_в \subset (MN)_в$.

Для доказательства формул (2), (3) и (4) мы воспользуемся операцией образования *дополнения* множества. Через доп. M будем обозначать дополнение множества M, т. е. совокупность всех точек плоскости, не принадлежащих к M [2]). Ясно, что точки, внешние по отношению к M, являются внутренними по отношению к доп. M и

---

[1]) Через $M+N$ в дальнейшем будет обозначаться *сумма* (или, иначе, *объединение*) множеств M и N, т. е. множество, состоящее из всех тех точек, которые принадлежат хотя бы одному из множеств M, N; через MN будет обозначаться *пересечение* множеств M и N, т. е. множество, состоящее из всех тех точек, которые принадлежат обоим множествам M, N; наконец, через $M-N$ будет обозначаться *разность* множеств M и N, т. е. множество, состоящее из всех тех точек, которые принадлежат множеству M, но не принадлежат N. (Сумма, пересечение и разность множеств M и N обозначаются также через $M \cup N$, $M \cap N$ и $M \setminus N$.) Запись $A \in M$ выражает тот факт, что точка A принадлежит множеству M; запись $M \subset N$ означает, что множество M содержится в множестве N (и, может быть, совпадает с ним). (*Прим. ред.*)

[2]) Дополнение множества M часто обозначают также через $\overline{M}$. (*Прим. ред.*)

наоборот, и что множества $M_з$ и (доп. $M)_в$ служат дополнениями друг друга:

$$\text{доп. } (M_з) = (\text{доп. } M)_в, \qquad M_з = \text{доп. } ((\text{доп. } M)_в). \tag{5}$$

Ясно также, что множества M и доп. M имеют одну и ту же границу:

$$M_г = (\text{доп. } M)_г. \tag{6}$$

Напомним еще, что

$$\text{доп. } (M+N) = (\text{доп. } M)\,(\text{доп. } N), \quad \text{доп. } (MN) = (\text{доп. } M) + (\text{доп. } N). \tag{7}$$

Доказательство формулы (2). Согласно формулам (5), (7) и (1), $((M+N)_з = \text{доп. } ((\text{доп. } (M+N))_в) = \text{доп.}(\,((\text{доп. } M)\,(\text{доп. } N))_в) =$ $= ((\text{доп. } M)_в\,(\text{доп. } N)_в) = \text{доп. } ((\text{доп. } M)_в) + \text{доп. } ((\text{доп. } N)_в) = M_з + N_з$.

Доказательство формул (3) и (4). Согласно формуле (2), $(M+N)_г \subset (M+N)_з = M_з + N_з = M_в + N_в + M_г + N_г$. Но $M_в \subset (M+N)_в$ и $N_в \subset (M+N)_в$ (так как $M \subset M+N$ и $N \subset M+N$). Следовательно, $M_в$ и $N_в$ не имеют общих точек с $(M+N)_г$ и потому $(M+N)_г \subset M_г + N_г$.

Далее, согласно формулам (6) и (7) и первой из формул (3), $(MN)_г = (\text{доп. } (MN))_г = (\text{доп. } M + \text{доп. } N)_г \subset (\text{доп. } M)_г + (\text{доп. } N)_г =$ $= M_г + N_г$.

Наконец, $M - N = M(\text{доп. } N)$ и, согласно второй из формул (3) и (6), $(M-N)_г = (M(\text{доп. } N))_г \subset M_г + (\text{доп. } N)_г = M_г + N_г$.

Соотношения (1), (2), (3) очевидным образом переносятся на любое конечное число множеств.

Множество M называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором круге. Если K — такой круг, то $M_з \subset K_з = K$. Следовательно, замыкание ограниченного множества есть ограниченное множество. Очевидно также, что сумма конечного числа ограниченных множеств есть ограниченное множество.

2.2. Открытые и замкнутые множества. Множество, не содержащее ни одной своей граничной точки, т. е. состоящее из одних внутренних точек, называется *открытым*. Множество, содержащее все свои граничные точки, т. е. совпадающее со своим замыканием, называется *замкнутым*. Так как множество и его дополнение имеют одну и ту же границу, то множество замкнуто в том и только в том случае, если его дополнение открыто.

Внутренняя часть любого множества есть открытое множество.

Действительно, если $A \in M_в$, то существует круг K с центром в точке A, лежащий в M. Пусть K' — круг меньшего радиуса с тем же центром. Ясно, что $K' \subset K_в$. Так как $K \subset M$, то $K_в \subset M_в$. Таким образом, круг K' с центром в точке A целиком содержится в множестве $M_в$, и потому A — внутренняя точка множества $M_в$.

Замыкание любого множества есть замкнутое множество. Действительно, каково бы ни было множество M, множество (доп. M)$_в$ открыто. Следовательно, его дополнение $M_з$ замкнуто.

Сумма и пересечение конечного числа открытых множеств открыты.

Доказательство достаточно провести для случая двух множеств. Если множества M и N открыты, то $M=M_в\subset(M+N)_в$, $N=N_в\subset$ $\subset(M+N)_в$, $M+N\subset(M+N)_в$, $(MN)_в=M_вN_в=MN$, и потому множества $M+N$ и MN также открыты.

Сумма и пересечение конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

Если M и N замкнуты, то их дополнения доп. M и доп. N открыты. Следовательно, (доп. M)(доп. N) и (доп. M)$+$(доп. N) также открыты, а их дополнения $M+N$ и MN замкнуты.

Примеры. Круг, окружность, полуплоскость, прямая, отрезок, ломаная — замкнутые множества. Круг, лишенный граничной окружности, и полуплоскость, лишенная граничной прямой,— открытые множества.

Замыкание открытого множества называется *замкнутой областью*. Например, круг и полуплоскость — замкнутые области. Заметим, что открытое множество, замыканием которого служит данная замкнутая область, не единственно. Например, круг есть замыкание своей внутренней части и той же внутренней части, лишенной центра.

Всякая замкнутая область является замыканием своей внутренней части.

Действительно, пусть $F=G_з$, где G — открытое множество. Так как $G\subset F$, то $G=G_в\subset F_в$, и потому $(G)_з\subset(F_в)_з$. Таким образом, $F\subset(F_в)_з$. Обратно, так как $F_в\subset F$, то $(F_в)_з\subset F_з=F$. Следовательно, $F=(F_в)_з$.

Сумма конечного числа замкнутых областей есть замкнутая область.

Действительно, если $F_1=(G_1)_з$, ..., $F_n=(G_n)_з$, где G_1, ..., G_n — открытые множества, то $G_1+\ldots+G_n$ есть открытое множество и $F_1+\ldots+F_n=(G_1+\ldots+G_n)_з$.

2.3. Выпуклые многоугольники. *Выпуклым многоугольником* называется пересечение конечного числа полуплоскостей при условии, что это пересечение ограничено и не лежит на одной прямой.

Если пересечение конечного числа полуплоскостей ограничено и лежит на одной прямой, то оно представляет собой либо отрезок, либо точку, либо *пустое* множество, т. е. совсем не содержит точек. Следовательно, пересечение выпуклого многоугольника с полуплоскостью или другим выпуклым многоугольником есть либо выпуклый многоугольник, либо отрезок, либо точка, либо пустое множество.

Простейшими выпуклыми многоугольниками являются треугольники. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. Обозначим через Π_A полуплоскость с граничной прямой BC, содержащую точку A, через Π_B — полуплоскость с граничной прямой CA, содержащую точку B, через Π_C — полуплоскость с граничной прямой AB, содержащую точку C. Треугольник с вершинами A, B, C может быть определен как пересечение полуплоскостей Π_A, Π_B, Π_C. Это — ограниченная замкнутая область, границей которой служит ломаная $ABCA$.

Всякий выпуклый многоугольник можно разложить на конечное число треугольников, не имеющих общих внутренних точек.

2.4. Многоугольные фигуры. *Многоугольной фигурой* мы называем всякое множество точек плоскости, которое может быть разложено на конечное число треугольников, не имеющих общих внутренних точек. По формальным соображениям мы причисляем к многоугольным фигурам пустое множество. Можно считать, что оно разлагается на треугольники, число которых равно нулю.

Так как треугольник является ограниченной замкнутой областью, то и сумма конечного числа треугольников есть ограниченная замкнутая область (см. пп. **2.1** и **2.2**). Следовательно, *многоугольная фигура является ограниченной замкнутой областью.*

Мы говорим «многоугольная фигура», а не «многоугольник», потому что слову *многоугольник* обычно придают другое значение. Чаще всего многоугольник определяют как «часть плоскости, ограниченную не пересекающей себя замкнутой ломаной». Это весьма сложное понятие, к тому же бесполезное для теории площадей. Нам

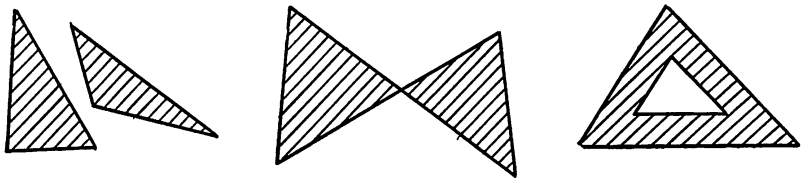


Рис. 2. Многоугольные фигуры, не являющиеся многоугольниками.

нужен лишь класс *выпуклых* многоугольников, определенный в предыдущем пункте. Впрочем, можно показать, что всякий многоугольник (в только что указанном смысле) является многоугольной фигурой. Обратное, конечно, неверно — см. рис. 2.

Всякое разложение многоугольной фигуры на треугольники, не имеющие общих внутренних точек, мы будем кратко называть *разбиением*. Разбиение называется *правильным*, если пересечение любых двух его треугольников есть либо их общая сторона, либо

их общая вершина, либо пустое множество (см. рис. 3). При правильном разбиении отрезки, служащие сторонами треугольников разбиения, могут быть двух типов. Отрезок первого типа служит стороной только одного треугольника разбиения. Отрезок второго типа служит общей стороной двух треугольников разбиения, лежащих по разные стороны от проходящей через него прямой. Отрезки первого типа составляют границу многоугольной фигуры. Отрезки второго типа, за возможным исключением своих концов, лежат во внутренней части многоугольной фигуры.

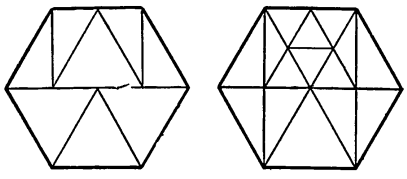


Рис. 3. *а*) Неправильное разбиение; *б*) правильное разбиение.

Одно разбиение многоугольной фигуры называется *измельчением* другого, если всякий треугольник первого разбиения содержится в некотором треугольнике второго разбиения. Например, разбиение, изображенное на рис. 3, *б*, является измельчением разбиения, изображенного на рис. 3, *а*.

Всякое разбиение многоугольной фигуры обладает правильным измельчением.

Для доказательства воспользуемся следующим очевидным необходимым и достаточным условием правильности разбиения: если общая точка двух треугольников разбиения служит вершиной одного из них, то она служит вершиной и другого. Пусть n — число «неправильных» вершин, для которых это условие не выполнено, A — одна из таких вершин и T — треугольник разбиения, содержащий точку A не в качестве вершины. Ясно, что точка A лежит на одной из сторон треугольника T. Отрезок, соединяющий точку A с вершиной треугольника T, противоположной этой стороне, разбивает T на два треугольника и этим определяет новое разбиение нашей многоугольной фигуры, служащее измельчением исходного разбиения. У нового разбиения число неправильных вершин равно уже $n-1$. Продолжая этот процесс, мы придем через n шагов к правильному разбиению.

2.5. Операции над многоугольными фигурами. Речь идет об операциях сложения, пересечения и вычитания. Что получится, если мы будем производить эти операции над многоугольными фигурами?

Пересечение. Пересечение двух многоугольных фигур может не быть многоугольной фигурой. Например, два треугольника могут пересекаться в одной точке или по отрезку. Если исключить эти случаи, то пересечение двух треугольников будет выпуклым многоугольником или пустым множеством и, значит,

многоугольной фигурой. Пересечение двух любых многоугольных фигур, разбитых на треугольники, есть сумма попарных пересечений этих треугольников. Следовательно, пересечение двух любых многоугольных фигур представляет собой многоугольную фигуру, к которой присоединено конечное число отрезков и отдельных точек (рис. 4).

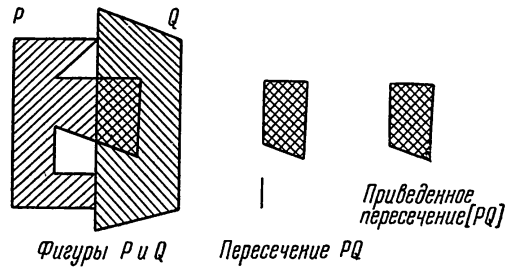


Рис. 4.

Эту многоугольную фигуру, служащую «главной частью» пересечения, мы называем *приведенным пересечением* исходных многоугольных фигур. Чтобы получить ее, достаточно взять внутреннюю часть пересечения и затем замкнуть ее. Приведенное пересечение многоугольных фигур P и Q будет обозначаться через $[PQ]$. Таким образом,

$$[PQ] = ((PQ)_в)_з. \tag{8}$$

Если, в частности, $Q = P$, то $[PQ] = P$. Предыдущие рассмотрения представляют интерес и в этом случае: они показывают, что *всякие два разбиения многоугольной фигуры обладают общим измельчением.*

Вычитание. Разность $P-Q$ двух многоугольных фигур P и Q есть, вообще говоря, незамкнутое множество. Например, разность двух треугольников замкнута лишь в том случае, если эти треугольники не имеют общих точек или первый содержится во втором. Таким образом, разность $P-Q$ не является, вообще говоря, многоугольной фигурой. Мы покажем, однако, что ее замыкание $(P-Q)_з$ есть многоугольная фигура.

Предположим сначала, что P — треугольник, и разобьем фигуру Q на треугольники. Прямые, на которых лежат стороны треугольников, составляющих фигуру Q, делят треугольник P на выпуклые многоугольники, попарно не имеющие общих внутренних точек. Эти выпуклые многоугольники распадаются на два класса: к первому классу мы относим многоугольники, лежащие в Q, ко второму — остальные многоугольники. Многоугольники второго класса покрывают разность $P-Q$ и лежат в $P-Q$ своими внутренними точками, но своими границами могут пересекаться с Q. Их сумма и есть замыкание $(P-Q)_з$ разности $P-Q$. Разбивая эти многоугольники на треугольники, мы разобьем на треугольники и множество $(P-Q)_з$. Следовательно, множество $(P-Q)_з$ является многоугольной фигурой.

В общем случае многоугольная фигура P разбивается на треугольники $T_1, \ldots, T_m$, и мы имеем:

$$P-Q=(T_1-Q)+\ldots+(T_m-Q);$$
$$(P-Q)_з=(T_1-Q)_з+\ldots+(T_m-Q)_з.$$

Согласно только что доказанному, $(T_1-Q)_з, \ldots, (T_m-Q)_з$ — многоугольные фигуры. Разбивая их на треугольники, мы разобьем на треугольники и множество $(P-Q)_з$. Следовательно, множество $(P-Q)_з$ является многоугольной фигурой.

Многоугольную фигуру $(P-Q)_з$ мы называем *приведенной разностью* многоугольных фигур P и Q. Она будет обозначаться через $[P-Q]$. Очевидно, $[P-Q] \subset P$.

Приведенные пересечения и разности найдут применение в теории площадей многоугольных фигур, которой посвящен следующий параграф. Хотя в терминах теории множеств они описываются сложнее, чем обычные пересечения и разности, с точки зрения элементарной геометрии они естественнее. Более полно они будут рассмотрены в п. **5.10.**

Сложение. *Сумма конечного числа многоугольных фигур есть многоугольная фигура.*

Доказательство достаточно провести для случая двух фигур P и Q. Если они не имеют общих внутренних точек, то справедливость утверждения очевидна. Общий случай сводится к этому частному случаю, если воспользоваться следующей леммой:

Каковы бы ни были многоугольные фигуры P и Q, многоугольные фигуры $[P-[PQ]]$ и Q не имеют общих внутренних точек и

$$P+Q=[P-[PQ]]+Q. \tag{9}$$

Доказательство. Формула (9) аналогична соотношению

$$P+Q=(P-PQ)+Q, \tag{10}$$

связывающему операцию сложения с обычным вычитанием и обычным пересечением. Так как $[PQ] \subset PQ$, то $P-PQ \subset P-[PQ] \subset [P-[PQ]]$, и из (10) следует, что $P+Q \subset [P-[PQ]]+Q$. Обратно, так как $[P-[PQ]] \subset P$, то $[P-[PQ]]+Q \subset P+Q$. Остается доказать, что фигуры $[P-[PQ]]$ и Q не имеют общих внутренних точек. Так как $[P-[PQ]] \subset P$, то точка, внутренняя по отношению к $[P-[PQ]]$ и к Q, была бы внутренней по отношению к P и к Q. Такая точка принадлежала бы открытому множеству $P_в Q_в = (PQ)_в$ и потому была бы внутренней точкой его замыкания $[PQ]$. Она была бы, следовательно, внешней по отношению к множеству $P-[PQ]$ и не могла бы принадлежать его замыканию $[P-[PQ]]$.

Важный частный случай. Пусть $Q \subset P$. Тогда $P+Q=P$, $[PQ]=Q$. Таким образом, *если многоугольная фигура Q является*

частью многоугольной фигуры P, то фигуры $[P-Q]$ и Q не имеют общих внутренних точек и $P=[P-Q]+Q$.

Доказанная теорема позволяет лучше понять определение многоугольной фигуры, данное в п. **2.4**. Согласно этому определению, многоугольная фигура есть сумма конечного числа треугольников, попарно не имеющих общих внутренних точек. Теперь мы видим, что сумма конечного числа треугольников всегда является многоугольной фигурой, независимо от того, как эти треугольники расположены относительно друг друга.

§ 3. Площадь на классе многоугольных фигур

3.1. Определение площади. *Площадь* на классе многоугольных фигур есть функция, определенная на этом классе и обладающая свойствами $(\alpha)-(\delta)$. Формулировку этих свойств см. в п. **1.1**. Под фигурой в них следует понимать многоугольную фигуру.

Существование и единственность нашей функции будут доказаны в п. **3.7**. Пока они не доказаны, мы будем понимать под площадью какую-нибудь функцию многоугольной фигуры, обладающую свойствами $(\alpha)-(\delta)$, предполагая ее существующей. Площадь будет обозначаться через s, площадь многоугольной фигуры P — через $s(P)$.

3.2. Простейшие следствия определения. *Площадь есть монотонная функция: если многоугольная фигура Q есть часть многоугольной фигуры P, то $s(Q)\leqslant s(P)$.*

С этим свойством мы уже встречались в п. **1.1**. Однако мы не можем сослаться на данное там изложение, так как оно не было достаточно отчетливым: не был разъяснен точный смысл таких выражений, как «фигура», «дополнительная фигура», «внутренняя точка». F и G молчаливо предполагались принадлежащими к классу фигур, на котором определена площадь, но мы не смогли бы доказать, что к этому классу принадлежит дополнительная фигура G' или что она не имеет с G общих внутренних точек.

Теперь, когда речь идет о многоугольных фигурах, эти пробелы нетрудно восполнить. Положим $R=[P-Q]$. Как показано в п. **2.5**, фигуры Q и R не имеют общих внутренних точек и $P=Q+R$. Следовательно, $s(P)=s(Q)+s(R)$, и так как $s(R)\geqslant 0$, то $s(P)\geqslant s(Q)$.

Для любых двух многоугольных фигур P и Q имеет место соотношение

$$s(P+Q)=s(P)+s(Q)-s([PQ]). \qquad (1)$$

Для доказательства положим $P'=[P-[PQ]]$. Как было показано в п. **2.5**, $P+Q=P'+Q$, $P=P'+[PQ]$, причем фигура P'

не имеет общих внутренних точек ни с Q, ни с $[PQ]$. Следовательно, $s(P+Q)=s(P')+s(Q)$, $s(P)=s(P')+s([PQ])$. Исключая из этих соотношений $s(P')$, мы получаем соотношение (1).

Для любых многоугольных фигур $P_1, \ldots, P_n$ *справедливо неравенство* $s(P_1+\ldots+P_n)\leqslant s(P_1)+\ldots+s(P_n)$.

При $n=2$ это следует из соотношения (1), при $n>2$ устанавливается индуктивно.

3.3. Вычисление площади прямоугольника. *Площадь прямоугольника равна произведению двух соседних сторон.*

Доказательство. Пусть P — прямоугольник, a и b — его соседние стороны.

Предположим сначала, что P — квадрат со стороной $1/n$, т. е. что $a=b=1/n$ (n — натуральное число). Пусть E — единичный квадрат. Разобьем его прямыми, параллельными сторонам, на n^2 частичных квадратов, равных P. Так как эти квадраты составляют E и попарно не имеют общих внутренних точек, то, согласно свойству (β), сумма их площадей равна $s(E)$. Но, согласно свойству (γ), площадь каждого из них равна $s(P)$, так что сумма их площадей равна $n^2 s(P)$, а согласно свойству (δ), $s(E)=1$. Следовательно, $n^2 s(P)=1$ и $s(P)=1/n^2$.

Предположим теперь, что a и b — любые рациональные числа. После приведения к общему знаменателю они представятся в виде $a=l/n$, $b=m/n$, где l, m, n — натуральные числа. Разобьем прямоугольник P прямыми, параллельными его сторонам, на lm равных квадратов со стороной $1/n$. По доказанному, площадь каждого из них равна $1/n^2$, так что сумма их площадей равна lm/n^2, а согласно свойству (β), эта сумма равна $s(P)$. Следовательно, $s(P)=lm/n^2$.

Рассмотрим, наконец, общий случай. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как произведение xy непрерывно зависит от x и y, то существует такое положительное число δ, что $|xy-ab|<\varepsilon/2$, как только

$$|x-a|<\delta, \quad |y-b|<\delta. \tag{2}$$

Придадим x и y сначала какие-нибудь рациональные значения $x=a_1$, $y=b_1$, удовлетворяющие неравенству (2) и неравенствам $a_1\leqslant a$, $b_1\leqslant b$, а затем какие-нибудь рациональные значения $x=a_2$, $y=b_2$, удовлетворяющие неравенствам (2) и неравенствам $a_2\geqslant a$, $b_2\geqslant b$. Ясно, что

$$a_2b_2-a_1b_1<\varepsilon, \tag{3}$$

$$a_1b_1\leqslant ab\leqslant a_2b_2. \tag{4}$$

Построим прямоугольник P_1 со сторонами a_1, b_1, содержащийся в P, и прямоугольник P_2 со сторонами a_2, b_2, содержащий P. По доказанному, $s(P_1)=a_1b_1$, $s(P_2)=a_2b_2$, и, в силу монотонности

площади,

$$a_1b_1 \leqslant s(P) \leqslant a_2b_2. \tag{5}$$

Из неравенств (4), (5) и (3) следует: $|s(P) - ab| < \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $s(P) = ab$.

3.4. Вычисление площади треугольника и трапеции. *Площадь треугольника равна половине произведения произвольной стороны («основания») на соответствующую высоту. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту; в частности, площадь параллелограмма равна произведению произвольной стороны на соответствующую высоту* [1]). Мы докажем оба утверждения одновременно. Пусть P — треугольник или трапеция, a — средняя линия, h — высота. Нужно доказать, что $s(P) = ah$.

Предположим сначала, что одна из боковых сторон фигуры P перпендикулярна к основанию. Проведем параллельные прямые через основания фигуры P, если это трапеция, и через основание и противоположную вершину, если это треугольник. Затем на расстоянии $2a$ от прямой, проходящей через боковую сторону, перпендикулярную к основанию, по ту же сторону от нее, по которую лежит фигура P, проведем параллельную ей прямую (рис. 5, *а*). Мы получим прямоугольник с основанием $2a$ и высотой h, разложенный на две равные фигуры P и P' без общих внутренних точек. Согласно свойствам (β) и (γ), площадь этого прямоугольника равна $2s(P)$.

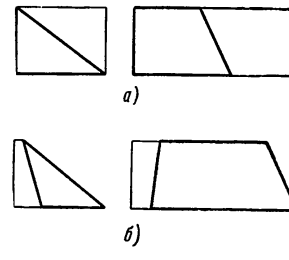


Рис. 5.

Следовательно, $2s(P) = 2ah$ и $s(P) = ah$.

Рассмотрим теперь общий случай. Проведем снова параллельные прямые через основания фигуры P, если это трапеция, и через основание и противоположную вершину, если это треугольник. Затем проведем какой-нибудь перпендикуляр к этим прямым, не пересекающий фигуры P (рис. 5, *б*). Мы получим фигуру P_2, разложенную на две фигуры P и P_1 без общих внутренних точек. Фигуры P_2 и P_1 являются трапециями с высотой h и со средними линиями a_2 и a_1, разность которых равна a. Так как общая боковая сторона этих трапеций перпендикулярна к их основаниям, то, по доказанному, $s(P_2) = a_2h$, $s(P_1) = a_1h$. Согласно свойству (β), $s(P_2) = s(P) + s(P_1)$, и потому $s(P) = a_2h - a_1h = ah$.

3.5. Вычисление площади произвольной многоугольной фигуры. Пусть P — произвольная многоугольная фигура. Если P — пустое множество, то $P + P = P$, причем слагаемые не имеют общих точек; следовательно, $s(P) + s(P) = s(P)$ и $s(P) = 0$. Таким образом,

[1]) Параллелограмм мы считаем частным случаем трапеции.

площадь пустого множества равна нулю. Если фигура P не является пустым множеством, то ее можно разбить на треугольники $T_1, \ldots, T_n$ с $n \geqslant 1$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — как-либо выбранные основания этих треугольников и $h_1, \ldots, h_n$ — соответствующие высоты. Из свойства (β) и теоремы п. **3.4** следует:

$$s(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i. \tag{6}$$

Формула (6) справедлива и при $n = 0$: в этом случае P есть пустое множество и обе части формулы (6) равны нулю.

3.6. Строгая монотонность. *Если многоугольная фигура Q есть часть многоугольной фигуры P, отличная от P, то $s(Q) < s(P)$. В частности, пустое множество есть единственная многоугольная фигура, площадь которой равна нулю.*

Справедливость второго утверждения непосредственно следует из формулы (6). Чтобы доказать справедливость первого, будем рассуждать как в п. **3.2**. Пусть $R = [P - Q]$. Так как Q и R не имеют общих внутренних точек и $P = Q + R$, то $s(P) = s(Q) + s(R)$. Но $s(R) > 0$. Следовательно, $s(P) > s(Q)$.

3.7. Теорема существования и единственности. *На классе многоугольных фигур существует одна и только одна функция со свойствами* (α) — (δ).

Докажем сначала единственность. Пусть s и s' — две функции, определенные на классе многоугольных фигур и обладающие свойствами (α) — (δ). Возьмем произвольную многоугольную фигуру P, разобьем ее на треугольники и обозначим через $a_1, \ldots, a_n$ как-либо выбранные основания этих треугольников и через $h_1, \ldots, h_n$ — соответствующие высоты. Согласно формуле (6),

$$s(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i, \qquad s'(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i.$$

Следовательно, $s'(P) = s(P)$ и $s' = s$.

Обратимся к доказательству существования. Его идею доставляет нам та же формула (6). Мы видели, что если на классе многоугольных фигур существует функция со свойствами (α) — (δ), то она может быть вычислена по формуле (6). Нельзя ли доказать, что правая часть формулы (6) и есть требуемая функция?

Мы увидим, что доказать это действительно можно, но что доказательство совсем не просто. Важно хорошо понять, в чем заключается трудность. Пусть P — многоугольная фигура. Чтобы вычислить для нее правую часть формулы (6), мы должны разбить ее на треугольники и в каждом из них выбрать основание. Предположим, что это сделано двумя различными способами, и пусть σ и σ' — соответствующие значения правой части формулы (6).

Будут ли они равны между собой? Пока на этот вопрос не дан положительный ответ, мы не можем утверждать, что правая часть формулы (6) есть функция фигуры P. Этот положительный ответ был бы очевиден, если бы мы могли опираться на существование площади: мы сказали бы тогда, что каждое из чисел σ, σ' равно площади фигуры P. Но мы не можем опираться на то, что хотим доказать. Мы должны, таким образом, установить равенство $\sigma = \sigma'$ непосредственно.

Лемма 1. *Произведение стороны треугольника на соответствующую высоту одинаково для всех трех сторон.*

Действительно, пусть ABC — произвольный треугольник и B', C' — основания перпендикуляров, опущенных из вершин B, C на прямые AC, AB (рис. 6). Из соображений подобия следует, что $\rho(C, C') : \rho(A, C) = \rho(B, B') : \rho(A, B)$, и, следовательно, $\rho(A, B)\,\rho(C, C') = \rho(A, C)\,\rho(B, B')$.

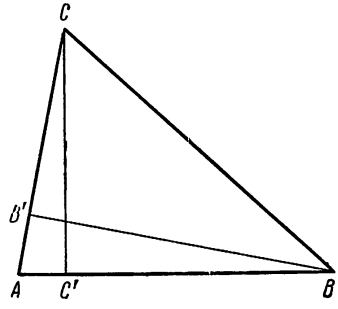


Рис. 6.

Условимся обозначать через (ABC) половину произведения длины отрезка AB на длину перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB, если точки ABC не лежат на одной прямой, и положим $(ABC) = 0$ в противном случае. Если точки A, B, C служат вершинами треугольника T, то наряду с (ABC) мы будем писать также (T). Такая запись не приведет к недоразумению, так как, согласно лемме 1, $(ABC) = (BCA) = (CAB)$.

Фиксируем на плоскости какую-нибудь точку O и обозначим для произвольного треугольника ABC через $(AB \mid C)$ число (ABO), если C лежит по ту же сторону от прямой AB, что и O, и число $-(ABO)$, если O и C лежат по разные стороны от прямой AB (если прямая AB проходит через точку O, то $(AB \mid C) = 0$).

Лемма 2. *Если треугольник ABC не содержит точки O, то*[1])

$$(ABC) = (BC \mid A) + (CA \mid B) + (AB \mid C). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть Π_A, Π_B, Π_C — полуплоскости с граничными прямыми BC, CA, AB, содержащие точки A, B, C. Прямые BC, CA, AB делят плоскость на восемь непересекающихся частей

$\Pi_A\Pi_B\Pi_C$, $\Pi_A\Pi_B$ (доп. Π_C), Π_A (доп. Π_B) Π_C, Π_A (доп. Π_B) (доп. Π_C),
(доп. Π_A) $\Pi_B\Pi_C$, (доп. Π_A) Π_B (доп. Π_C), (доп. Π_A) (доп. Π_B) Π_C,
(доп. Π_A) (доп. Π_B) (доп. Π_C),

[1]) Можно было бы доказать, что соотношение (7) справедливо при любом расположении точки O, но нам этот факт не понадобится.

первая из которых представляет собой треугольник ABC. Покажем, что множество $(\text{доп. } \Pi_A)(\text{доп. } \Pi_B)(\text{доп. } \Pi_C)$ пусто. Пусть $D \in (\text{доп. } \Pi_A)(\text{доп. } \Pi_B)(\text{доп. } \Pi_C)$ и D' — какая-нибудь внутренняя точка треугольника $\Pi_A\Pi_B\Pi_C$. Так как точки D и D' лежат по разные стороны от каждой из прямых BC, CA, AB, то отрезок DD' пересекают все три прямые. Но продолжение отрезка DD' за точку D' снова пересекает по крайней мере одну из них, что невозможно.

Так как точка O лежит вне треугольника ABC, то она принадлежит одному из шести множеств $\Pi_A\Pi_B(\text{доп. } \Pi_C)$, $\Pi_A(\text{доп. } \Pi_B)\Pi_C$, $\Pi_A(\text{доп. } \Pi_B)(\text{доп. } \Pi_C)$, $(\text{доп. } \Pi_A)\Pi_B\Pi_C$, $(\text{доп. } \Pi_A)\Pi_B(\text{доп. } \Pi_C)$, $(\text{доп. } \Pi_A)(\text{доп. } \Pi_B)\Pi_C$. Первое, второе и четвертое, а также третье,

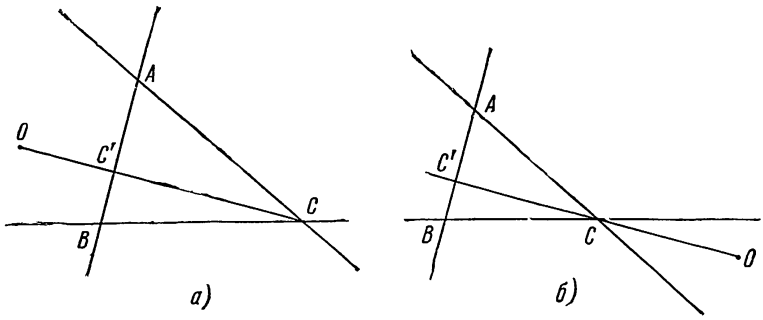


Рис. 7.

пятое и шестое множества однотипны. Следовательно, достаточно рассмотреть два случая: $O \in \Pi_A\Pi_B(\text{доп.}\Pi_C)$ и $O \in (\text{доп. } \Pi_A)(\text{доп.}\Pi_B)\Pi_C$.

Первый случай. $O \in \Pi_A\Pi_B(\text{доп. } \Pi_C)$ (рис. 7, *а*). Так как $O \in \Pi_A$, $O \in \Pi_B$, $O \in \text{доп. } \Pi_C$, то

$$(BC \mid A) = (BCO), \quad (CA \mid B) = (CAO), \quad (AB \mid C) = -(ABO). \quad (8)$$

С другой стороны, так как $O \in \text{доп. } \Pi_C$, то отрезок OC пересекает прямую AB в некоторой точке C', а так как $O \in \Pi_A\Pi_B$ и $C \in \Pi_A\Pi_B$, то отрезок OC лежит в $\Pi_A\Pi_B$. Таким образом, точка C' лежит на прямой AB и в $\Pi_A\Pi_B$, т. е. на прямой AB и в треугольнике ABC, т. е. на отрезке AB. Следовательно,

$$\rho(A, B) = \rho(A, C') + \rho(C', B), \qquad \rho(O, C) = \rho(O, C') + \rho(C', C),$$

и потому

$$(ABC) = (AC'C) + (C'BC), \qquad (ABO) = (AC'O) + (C'BO),$$
$$(OCA) = (OC'A) + (C'CA), \qquad (OCB) = (OC'B) + (C'CB).$$

Пользуясь соотношениями (8), перепишем последние четыре

равенства следующим образом:

$$\left.\begin{array}{ll}(ABC)=(AC'C)+(C'BC), & (AB\mid C)=-(AC'O)-(C'BO),\\ (CA\mid B)=(AC'C)+(AC'O), & (BC\mid A)=(C'BC)+(C'BO).\end{array}\right\} \quad (9)$$

Из соотношений (9) следует равенство (7).

Второй случай. $O\in$ (доп. Π_A) (доп. Π_B) Π_C (рис. 7, *б*). Так как $O\in$ доп. Π_A, $O\in$ доп. Π_B, $O\in\Pi_C$, то

$$(BC\mid A)=-(BCO),\quad (CA\mid B)=-(CAO),\quad (AB\mid C)=(ABO). \quad (10)$$

С другой стороны, так как $O\in$ (доп. Π_A) (доп. Π_B) и так как в точке C прямая OC пересекает обе прямые BC, CA, то полупрямая, служащая продолжением отрезка OC за точку C, лежит в пересечении $\Pi_A\Pi_B$. Эта полупрямая должна пересекать прямую AB, так как в противном случае она целиком лежала бы вместе с точкой C в полуплоскости Π_C и, значит, в треугольнике $\Pi_A\Pi_B\Pi_C$. Пусть C' — точка пересечения этой полупрямой с прямой AB. Так как $C'\in\Pi_A\Pi_B$, то точка C' лежит на отрезке AB. Следовательно,

$$\rho(A, B)=\rho(A, C')+\rho(C', B),\qquad \rho(O, C')=\rho(O, C)+\rho(C, C'),$$

и потому

$$(ABC)=(AC'C)+(C'BC),\qquad (ABO)=(AC'O)+(C'BO),$$
$$(OC'A)=(OCA)+(CC'A),\qquad (OC'B)=(OCB)+(CC'B).$$

Пользуясь соотношениями (10), перепишем последние четыре равенства следующим образом:

$$\left.\begin{array}{ll}(ABC)=(AC'C)+(C'BC), & (AB\mid C)=(AC'O)+(C'BO),\\ (CA\mid B)=(AC'C)-(AC'O), & (BC\mid A)=(C'BC)-(C'BO).\end{array}\right\} \quad (11)$$

Из соотношений (11) следует равенство (7).

Лемма 3. *Если*

$$P=S_1+\ldots+S_m=T_1+\ldots+T_n \quad (12)$$

— два разбиения многоугольной фигуры P на треугольники, то

$$(S_1)+\ldots+(S_m)=(T_1)+\ldots+(T_n). \quad (13)$$

Доказательство. Предположим сначала, что $m=1$ и что $P=T_1+\ldots+T_n$ — правильное разбиение треугольника $P=S_1$. Пусть L_{i1}, L_{i2}, L_{i3} — стороны треугольника T_i $(i=1, \ldots, n)$ и l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} — их длины. Выберем вне фигуры P точку O, обозначим через p_{ij} $(j=1, 2, 3)$ длину перпендикуляра, опущенного из O на прямую, содержащую сторону L_{ij}, и положим $\varepsilon_{ij}=+1$, если точка O лежит по ту же сторону от этой прямой, что и треугольник T_i, и $\varepsilon_{ij}=-1$ в противном случае. Выписывая для каждого из треугольников T_i формулу (7) и суммируя по i, мы получим:

$$(T_1)+\ldots+(T_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}l_{ij}p_{ij}. \quad (14)$$

Пусть A, B, C — вершины треугольника S_1. Сумму, стоящую справа в формуле (14), мы разобьем на четыре частичные суммы. Член $\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}l_{ij}p_{ij}$ мы отнесем к первой сумме, если отрезок L_{ij} лежит на отрезке BC, ко второй, если он лежит на отрезке CA, к третьей, если он лежит на отрезке AB, и к четвертой, если L_{ij} — отрезок второго типа (см. п. **2.4.**). Для первых трех частичных сумм мы будем употреблять знаки $\sum_B^C$, $\sum_C^A$, $\sum_A^B$. У всех членов первой частичной суммы множители p_{ij} и ε_{ij} имеют одинаковые значения p и ε, а именно, p есть длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC, а ε есть $+1$, если точка O лежит по ту же сторону от этой прямой, что и треугольник S_1, и -1 в противном случае. Следовательно,

$$\sum_B^C \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}l_{ij}p_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon p \sum_B^C l_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon p\rho\,(B,\ C) = (BC \mid A). \qquad (15)$$

Подобным же образом

$$\sum_C^A \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}l_{ij}p_{ij} = (CA \mid B), \qquad \sum_A^B \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}l_{ij}p_{ij} = (AB \mid C). \qquad (16)$$

Если L_{ij} — отрезок второго типа, то он служит общей стороной двух треугольников, лежащих по разные стороны от содержащей его прямой. В соответствии с этим члены четвертой частичной суммы распадаются на пары членов, имеющих одинаковые множители l_{ij} и p_{ij}, но противоположные множители ε_{ij}. Следовательно, четвертая сумма равна нулю, и формулы (7), (15), (16) и (14) дают:

$$(S_1) = (BC \mid A) + (CA \mid B) + (AB \mid C) = (T_1) + \ldots + (T_n).$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть

$$P = U_1 + \ldots + U_n \qquad (17)$$

— правильное общее измельчение разбиений (12). Каждый из треугольников $S_1, \ldots, S_m$ правильно разбит на треугольники разбиения (17). Если, например, $S_1 = U_{k_1} + \ldots + U_{k_s}$, то, согласно только что доказанному, $(S_1) = (U_{k_1}) + \ldots + (U_{k_s})$. Выписывая такие же соотношения для треугольников $S_2, \ldots, S_m$ и суммируя, получим:

$$(S_1) + \ldots + (S_m) = (U_1) + \ldots + (U_r).$$

Подобным же образом

$$(T_1) + \ldots + (T_n) = (U_1) + \ldots + (U_r).$$

Из этих двух соотношений следует равенство (13).

Доказательство существования. Пусть P — произвольная многоугольная фигура и

$$P = T_1 + \ldots + T_n \qquad (18)$$

— какое-нибудь разбиение ее на треугольники. Положим $s(P) = (T_1) + \ldots + (T_n)$. Согласно лемме 3, это число не зависит от выбора разбиения (18). Следовательно, s есть функция, определенная на классе многоугольных фигур. Очевидно, что она обладает свойствами (α) — (δ).

3.8. Поведение площади при преобразовании подобия. Как известно, преобразованием подобия с центром O и коэффициентом $\lambda > 0$ называется такое преобразование плоскости, которое переводит точку O в точку O, а всякую другую точку A — в точку A' луча OA, для которой $\rho(O, A') = \lambda\rho(O, A)$. Более общим образом, преобразованием подобия с коэффициентом $\lambda > 0$ называется всякое отображение f одной плоскости на другую, при котором расстояние любых двух точек A, B первой плоскости и расстояние их образов $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ во второй плоскости связаны соотношением

$$\rho(A', B') = \lambda\rho(A, B). \tag{19}$$

Такое отображение взаимно однозначно, и обратное отображение есть преобразование подобия с коэффициентом λ^{-1} [1]).

Преобразование подобия переводит треугольник в треугольник и многоугольную фигуру в многоугольную фигуру. Равенство (19) показывает, что отображение f переводит круг с центром A в круг с центром $f(A)$. Следовательно, преобразование подобия переводит внутренние точки во внутренние точки и множества без общих внутренних точек в множества без общих внутренних точек.

Если P' — образ многоугольной фигуры P при преобразовании подобия с коэффициентом λ, то

$$s(P') = \lambda^2 s(P). \tag{20}$$

Доказательство. В силу теоремы единственности, достаточно доказать, что функция s', определенная на классе многоугольных фигур формулой $s'(P) = \lambda^{-2} s(P')$, удовлетворяет условиям (α) — (δ). То, что она удовлетворяет условиям (α), (β), (γ), очевидно. Займемся условием (δ). Ясно, что образ E' единичного квадрата E есть квадрат со стороной λ. Следовательно, $s(E') = \lambda^2$ и $s'(E') = \lambda^{-2} s(E') = 1$.

3.9. Поведение площади при ортогональном проектировании. *Если P' — проекция многоугольной фигуры P на плоскость, образующую с ее плоскостью острый угол α, то*

$$s(P') = s(P)\cos\alpha. \tag{21}$$

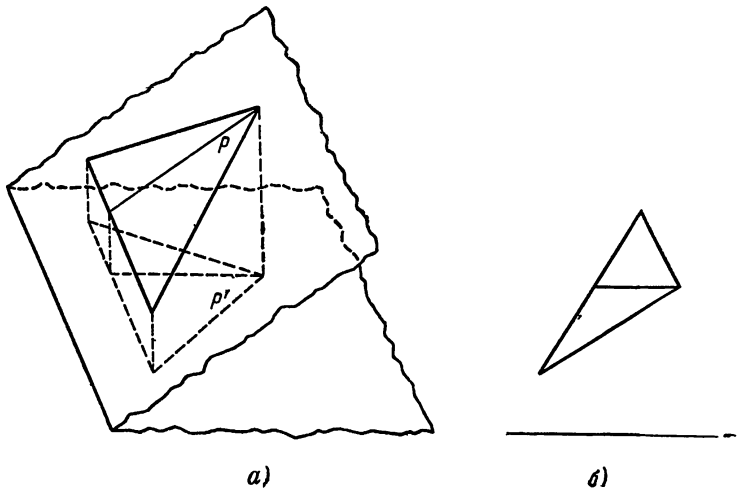
Доказательство. Если $\alpha = 0$, то формула (21) очевидна. Пусть $\alpha > 0$.

Предположим сначала, что P — треугольник со стороной, параллельной линии пересечения наших плоскостей. Тогда сторона

[1]) См. стр. 55 и 60—61 кн. IV ЭЭМ. (*Прим. ред.*)

треугольника P', служащая проекцией этой стороны, равна ей, а соответствующая высота треугольника P проектируется на высоту треугольника P' и умножается при этом на $\cos\alpha$ (рис. 8, *а*). Следовательно, $s(P') = s(P)\cos\alpha$.

Общий случай сводится к этому частному случаю, так как всякую многоугольную фигуру можно разбить на треугольники рассмотренного вида. Для этого достаточно как-нибудь разбить ее на треугольники и затем каждый треугольник, не удовлетворяющий нашему условию, разбить на два треугольника, удовлетворяющие ему (рис. 8, *б*).



а) *б)*

Рис. 8.

3.10. Поведение площади при аффинном преобразовании. Как известно, аффинным преобразованием называется такое отображение одной плоскости на другую, которое в прямоугольных декартовых координатах x, y первой плоскости и прямоугольных декартовых координатах x', y' второй плоскости имеет вид

$$x' = \alpha x + \beta y + a, \quad y' = \gamma x + \delta y + b. \tag{22}$$

Если это условие линейности выполнено при одном выборе координатных систем, то оно выполнено и при всяком другом их выборе. Аффинное преобразование взаимно однозначно, и обратное преобразование также является аффинным[1]). Определитель $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ с точностью до знака не зависит от выбора координатных систем. Он отличен от нуля, и определитель обратного преобразования равен Δ^{-1}.

Заметим, что переход от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой есть частный случай преобразования (22).

[1]) Ср. стр. 61—62 и 76—77 кн. IV ЭЭМ. (*Прим. ред.*)

Действительно, преобразование координат можно рассматривать как тождественное отображение плоскости на ту же плоскость, снабженную другой системой координат. Определитель такого преобразования равен ± 1. В частности, если преобразование (22) есть поворот осей, то $\Delta = 1$.

Аффинное преобразование переводит треугольник в треугольник, треугольники без общих внутренних точек в треугольники без общих внутренних точек и многоугольные фигуры в многоугольные фигуры.

Если P' — образ многоугольной фигуры P при аффинном преобразовании с определителем Δ, то

$$s(P') = s(P)\,|\Delta|. \tag{23}$$

Доказательство опирается на две леммы.

Лемма 1. *Если*

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3) \tag{24}$$

— произвольные точки плоскости и

$$(x_1', y_1'), \quad (x_2', y_2'), \quad (x_3', y_3') \tag{25}$$

— их образы при преобразовании (22), *то*

$$\begin{vmatrix} x_2'-x_1' & y_2'-y_1' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \cdot \Delta.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} x_2'-x_1' & y_2'-y_1' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha(x_2-x_1)+\beta(y_2-y_1) & \gamma(x_2-x_1)+\delta(y_2-y_1) \\ \alpha(x_3-x_1)+\beta(y_3-y_1) & \gamma(x_3-x_1)+\delta(y_3-y_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}.$$

Лемма 2. *Если P — треугольник с вершинами* (24), *то*

$$s(P) = \text{абс. вел.}\ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Доказательство. В силу леммы 1, определитель (26) не меняется при повороте осей координат. Следовательно, лемму 2 достаточно доказать для случая, когда направление оси абсцисс совпадает с направлением стороны треугольника P, соединяющей первую вершину со второй (рис. 9). В этом случае $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = 0$, $y_3 - y_1 = \pm h$, где a — длина указанной стороны, а

h — соответствующая высота, и потому

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}ah = \pm s(P). \qquad (27)$$

Заметим, что знак определителя (26) определяется порядком, в котором записаны вершины треугольника P. Если этот порядок таков, что треугольник обходится против часовой стрелки, то определитель положителен; если этот порядок таков, что треугольник обходится по часовой стрелке, то определитель отрицателен. Действительно, в первом случае (при нашем специальном расположении координатных осей) $y_3 > y_1$ и в формуле (27) стоит знак $+$; во втором случае $y_3 < y_1$ и в формуле (27) стоит знак $-$.

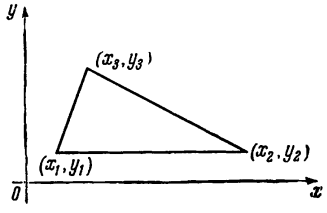


Рис. 9.

Доказательство формулы (23). В силу аддитивности площади, достаточно рассмотреть случай, когда P есть треугольник. Пусть (24) — вершины треугольника P и (25) — вершины его образа P'. Согласно лемме 2,

$$s(P) = \text{абс. вел. } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix},$$

$$s(P') = \text{абс. вел. } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2'-x_1' & y_2'-y_1' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' \end{vmatrix},$$

и равенство (23) является следствием леммы 1.

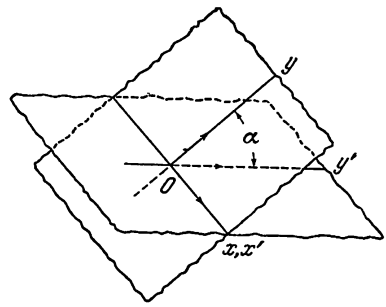


Рис. 10.

Частные случаи. 1. Пусть f — преобразование подобия с коэффициентом λ (п. **3.8**). Если выбрать в рассматриваемых плоскостях оси x, y и x', y' так, чтобы ось x переходила в ось x', а ось y — в ось y', то f представится как аффинное преобразование $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ с определителем $\Delta = \lambda^2$. Таким образом, формула (20) есть частный случай формулы (23).

2. Пусть f — проектирование одной плоскости на другую, образующую с первой острый угол α. Если выбрать в этих плоскостях системы координат x, y и x', y' так, чтобы оси x и x' совпали, а оси y и y' составили угол α (рис. 10), то f представится как аффинное преобразование $x' = x$, $y' = y\cos\alpha$ с определителем $\Delta = \cos\alpha$. Следовательно, формула (21) есть частный случай формулы (23).

§ 4. Класс квадрируемых фигур

4.1. Определение квадрируемой фигуры. Множество M, лежащее на плоскости, называется *квадрируемым множеством* или *квадрируемой фигурой*, если для всякого положительного числа ε существуют такие многоугольные фигуры P и Q, что

$$P \subset M \subset Q, \quad s(Q) - s(P) < \varepsilon. \tag{1}$$

Фигура P называется *входящей*, фигура Q — *объемлющей*.

Если множество M само является многоугольной фигурой, то в качестве P и Q можно взять M. Следовательно, *всякая многоугольная фигура квадрируема*.

Всякая квадрируемая фигура ограничена. Действительно, согласно своему определению, квадрируемая фигура содержится в некоторой многоугольной фигуре, а многоугольная фигура ограничена.

Обратное утверждение неверно: ограниченное множество может не быть квадрируемым. Пример будет дан в п. **4.10**.

4.2. Замечание о выборе фигур P и Q. Границы $P_г$ и $Q_г$ многоугольных фигур P и Q, входящих в определение квадрируемости, могут иметь общие точки с границей $M_г$ множества M. Однако фигуры P и Q всегда можно выбрать и так, чтобы $P_г$ и $Q_г$ не пересекались с $M_г$. Другими словами: *если M — квадрируемая фигура, то для всякого положительного ε существуют такие многоугольные фигуры P и Q, что*

$$P \subset M_в, \quad M_з \subset Q_в, \quad s(Q) - s(P) < \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть P' и Q' — такие многоугольные фигуры, что $P' \subset M \subset Q'$, $s(Q') - s(P') < \varepsilon/3$. Разобьем фигуру P' на треугольники, подвергнем каждый из них преобразованию подобия с центром в какой-нибудь его внутренней точке и коэффициентом $\lambda < 1$ и полученные новые треугольники соединим в многоугольную фигуру P. Разобьем фигуру Q' на треугольники, подвергнем каждый из них преобразованию подобия с центром в какой-нибудь его внутренней точке и коэффициентом $\mu > 1$ и полученные новые треугольники соединим в многоугольную фигуру Q. Так как каждый треугольник из P целиком лежит внутри некоторого треугольника из P', то каждая точка многоугольной фигуры P является внутренней по отношению к P', а потому и по отношению к M, т. е. $P \subset M_в$. Так как каждый треугольник из Q' целиком лежит внутри некоторого треугольника из Q, то каждая точка многоугольной фигуры Q' является внутренней по отношению к Q, т. е. $Q' \subset Q_в$. Но $M \subset Q'$. Следовательно, $M_з \subset Q'_з = Q'$, и потому $M_з \subset Q_в$. Таким образом, первые два из соотношений (2) выполнены. Остается

выбрать числа λ и μ таким образом, чтобы было выполнено и третье соотношение.

Треугольники, составляющие фигуру P, не пересекаются; треугольники, составляющие фигуру Q, могут пересекаться. В соответствии с этим $s(P)=\lambda^2 s(P')$, $s(Q)\leqslant\mu^2 s(Q')$ (см. п. **3.8** и п. **3.2**), и потому

$$s(P')-s(P)=(1-\lambda^2)s(P'),\quad s(Q)-s(Q')\leqslant(\mu^2-1)s(Q').$$

Пусть λ и μ настолько близки к единице, что $(1-\lambda^2)s(P')<\frac{\varepsilon}{3}$, $(\mu^2-1)s(Q')<\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$s(Q)-s(P)=$$
$$=[s(Q)-s(Q')]+[s(Q')-s(P')]+[s(P')-s(P)]<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

4.3. Нуль-множества. Множество M называется *нуль-множеством*, если для всякого положительного числа ε существует такая многоугольная фигура R, что

$$M\subset R,\qquad s(R)<\varepsilon. \tag{3}$$

Нуль-множества квадрируемы.

Действительно, пусть M — нуль-множество и ε — положительное число. Найдем многоугольную фигуру R, удовлетворяющую условиям (3), и примем за P пустое множество, а за Q — фигуру R. Ясно, что фигуры P и Q удовлетворяют условиям (1).

Квадрируемая фигура в том и только в том случае является нуль-множеством, если она не содержит внутренних точек.

Действительно, если квадрируемая фигура M не содержит внутренних точек, то единственной содержащейся в ней многоугольной фигурой P является пустое множество, и соотношения (1) превращаются в соотношения (3), если за R принять фигуру Q. Если же множество M содержит внутреннюю точку, то оно содержит целый квадрат, и всякая многоугольная фигура R, содержащая M, содержит этот квадрат и потому имеет площадь, по меньшей мере равную площади этого квадрата.

Сумма конечного числа нуль-множеств есть нуль-множество. Часть нуль-множества есть нуль-множество.

Второе очевидно, первое достаточно доказать для случая двух слагаемых. Пусть M и M' — нуль-множества и ε — положительное число. Найдем такие многоугольные фигуры R и R', что $M\subset R$, $M'\subset R'$, $s(R)<\varepsilon/2$, $s(R')<\varepsilon/2$, и рассмотрим многоугольную фигуру $R+R'$. Ясно, что

$$M+M'\subset R+R',\quad s(R+R')\leqslant s(R)+s(R')<\varepsilon.$$

Примерами нуль-множеств могут служить конечные множества точек, отрезки прямых и ломаные. В дальнейшем мы увидим, что и дуги кривых линий, с которыми мы обычно встречаемся в математике и ее применениях, являются нуль-множествами.

4.4. Лемма о граничной точке. *Отрезок, соединяющий внутреннюю точку множества M с внешней точкой, пересекается с границей множества M.*

Доказательство. Пусть A — внутренняя, B — внешняя точка. Установим на прямой AB направление от A к B и обозначим через N множество точек отрезка AB, внутренних по отношению к множеству M. Так как $A \in N$, то множество N не пусто. Пусть C — его точная верхняя грань. Ясно, что C — точка отрезка AB. Покажем, что она является граничной относительно множества M.

Точка C не может быть внутренней точкой множества M. Если бы она была внутренней, то существовал бы целый круг с центром в точке C, состоящий из внутренних точек множества M. Этот круг пересекался бы с прямой AB по отрезку с серединой в точке C, состоящему из внутренних точек множества M. Вследствие этого между точками C и B нашлись бы внутренние точки множества M ($C \neq B$, так как B — внешняя точка) и точка C не была бы точной верхней гранью множества N.

Точка C не может быть внешней по отношению к множеству M. Если бы она была внешней, то существовал бы целый круг с центром в точке C, состоящий из внешних точек. Пусть C' — какая-нибудь точка этого круга, лежащая между A и C ($A \neq C$, так как A — внутренняя точка). Так как между C и B нет внутренних точек множества M, а отрезок $C'C$ состоит из внешних точек, то между C' и B также нет внутренних точек множества M. Следовательно, C' — верхняя грань множества N, и потому точка C не является его точной верхней гранью.

4.5. Критерий квадрируемости. *Множество M квадрируемо в том и только в том случае, если оно ограничено и его граница $M_г$ есть нуль-множество.*

Доказательство. Предположим, что множество M квадрируемо, и покажем, что $M_г$ — нуль-множество. Пусть ε — положительное число и P, Q — многоугольные фигуры, удовлетворяющие условиям (2). Рассмотрим многоугольную фигуру $R = [Q - P]$. Ясно, что $M_г = M_з - M_в \subset Q - P \subset R$ и $s(R) = s(Q) - s(P) < \varepsilon$. Следовательно, $M_г$ есть нуль-множество.

Предположим теперь, что множество M ограничено и его граница $M_г$ есть нуль-множество, и покажем, что множество M квадрируемо. Пусть S — прямоугольник, содержащий множество M, ε — положительное число и R — такая многоугольная фигура, что $M_г \subset R_в$, $s(R) < \varepsilon$. Рассмотрим многоугольную фигуру $[S - R]$. Разобьем ее на треугольники и обозначим через P многоугольную фигуру, состав-

ленную из треугольников, целиком лежащих в M. Оказывается, что треугольники, не вошедшие в P, не имеют с M общих точек. Действительно, пусть A и B — такие точки, принадлежащие некоторому треугольнику из $[S-R]$, что $A \in M$, а $B \overline{\in} M$. Так как точки, граничные по отношению к множеству M, являются внутренними по отношению к R, то они не могут принадлежать треугольнику, входящему в $[S-R]$. Следовательно, A — внутренняя, а B — внешняя точка по отношению к множеству M. Но в таком случае отрезок, соединяющий A с B, пересекает границу множества M (п. **4.4**) в некоторой точке нашего треугольника, что приводит к противоречию.

Положим $Q=P+R$. Ясно, что $P \subset M$. Покажем, что $M \subset Q$. Пусть $A \in M$. Тогда либо $A \in R$, либо $A \in M-R \subset [S-R]$. В первом случае $A \in Q$; во втором случае точка A лежит в одном из треугольников, составляющих фигуру $[S-R]$. Так как этот треугольник имеет с M общую точку, то он целиком лежит в M, т. е. входит в P. Следовательно, во втором случае $A \in P$. Таким образом, в обоих случаях $A \in Q$, а это и значит, что $M \subset Q$. Наконец, $s(Q)-s(P)=s(R)<\varepsilon$.

4.6. Операции над квадрируемыми фигурами. *Сумма и пересечение конечного числа квадрируемых фигур являются квадрируемыми фигурами. Разность двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура. Множество, равное квадрируемой фигуре, есть квадрируемая фигура.*

Справедливость последнего утверждения очевидна. Теорему о сумме и пересечении достаточно доказать для случая двух фигур. Итак, пусть M и N — квадрируемые фигуры; покажем, что фигуры $M+N$, MN и $M-N$ квадрируемы. Согласно нашему критерию квадрируемости, нужно доказать, что если M_Γ и N_Γ — нуль-множества, то $(M+N)_\Gamma$, $(MN)_\Gamma$ и $(M-N)_\Gamma$ — также нуль-множества.

В п. **2.1** было доказано, что $(M+N)_\Gamma \subset M_\Gamma+N_\Gamma$, $(MN)_\Gamma \subset M_\Gamma+N_\Gamma$, $(M-N)_\Gamma \subset M_\Gamma+N_\Gamma$. Но сумма двух нуль-множеств есть нуль-множество и часть нуль-множества есть нуль-множество (п. **4.3**). Следовательно, $(M+N)_\Gamma$, $(MN)_\Gamma$ и $(M-N)_\Gamma$ — нуль-множества.

4.7*. Линии. Поскольку ограниченное множество квадрируемо в том и только в том случае, если его граница есть нуль-множество, а границы наиболее часто встречающихся фигур состоят из линий, важно выяснить, какие линии являются нуль-множествами.

Первая трудность, с которой мы здесь встречаемся, состоит в недостаточной определенности понятия линии. Мы ограничимся рассмотрением *простых линий*, т. е. линий, не имеющих самопересечений. В этом пункте определяется и изучается с интересующей нас точки зрения несколько классов таких линий.

Простые дуги. Пусть Δ — отрезок числовой прямой и f — некоторое отображение этого отрезка в плоскость. Снабдим плоскость системой координат x, y и обозначим через $x_f(t)$, $y_f(t)$ коор-

динаты точки $f(t)$, $t \in \Delta$. Ясно, что функции x_f, y_f определяются отображением f и в свою очередь определяют его. Если эти функции непрерывны, то они будут непрерывными и при всяком другом выборе системы координат, потому что преобразование координат линейно; в этом случае и отображение f называется *непрерывным*.

Нас будут интересовать непрерывные и *взаимно однозначные* отображения отрезка в плоскость. Множество точек плоскости, на которое можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить отрезок, называется *простой дугой*. Взаимная однозначность есть как раз то свойство отображения, которое обеспечивает отсутствие самопересечений.

Определению простой дуги можно дать следующее наглядное истолкование. Представим себе, что отрезок сделан из материала, способного как угодно изгибаться, сокращаться и растягиваться, но неспособного рваться и склеиваться. Простая дуга есть то, что можно изготовить из такого отрезка.

Как будет показано в п. **4.10,** простая дуга может не быть нуль-множеством.

Элементарные кривые. Множество точек плоскости называется *элементарной кривой*, если существует система координат, в которой это множество является графиком функции, определенной и непрерывной на некотором отрезке.

Элементарные кривые являются простыми дугами. Действительно, пусть Γ — график функции φ, непрерывной на отрезке Δ. Ясно, что отображение f этого отрезка на Γ, определяемое функциями $x_f(t)=t$, $y_f(t)=\varphi(t)$ $(t \in \Delta)$ (т. е. относящее каждой точке отрезка Δ лежащую над ней точку графика Γ), непрерывно и взаимно однозначно.

Элементарная кривая является нуль-множеством.

При доказательстве буквой Γ, как и выше, будет обозначаться график функции φ, непрерывной на отрезке Δ. Запись $\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$ означает, что отрезок Δ разбит промежуточными точками на частичные отрезки $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Через m_i и M_i обозначаются наименьшее и наибольшее значения функции φ на отрезке Δ_i (они существуют в силу известной теоремы Вейерштрасса). Буква l обозначает длину отрезка.

Лемма. *Для всякого положительного числа* ε *существует такое разбиение* $\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$, *что*

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,l(\Delta_i)<\varepsilon. \tag{4}$$

Доказательство леммы. Согласно известной теореме Кантора, функция φ равномерно непрерывна на отрезке Δ. Следовательно, существует такое положительное число δ, что для любых двух точек x, x' отрезка Δ, удаленных друг от друга менее, чем

на δ, справедливо неравенство $\varphi(x')-\varphi(x)<\varepsilon/l(\Delta)$. Оказывается, что неравенство (4) имеет место для всякого разбиения $\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$, у которого длины всех частичных отрезков Δ_i меньше δ.

Действительно, из неравенства $l(\Delta_i)<\delta$ следует, что точки отрезка Δ_i, в которых функция φ принимает значения m_i и M_i, как и всякие две точки этого отрезка, удалены друг от друга менее чем на δ. Таким образом,

$$M_i-m_i<\frac{\varepsilon}{l(\Delta)} \qquad (i=1, \ldots, n),$$

и потому

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,l(\Delta_i)<\frac{\varepsilon}{l(\Delta)}\sum_{i=1}^{n}l(\Delta_i)=\varepsilon.$$

Доказательство теоремы. Пусть ε — положительное число. Построим разбиение $\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$, удовлетворяющее условию (4), и обозначим через R_i прямоугольник, ограниченный горизонталями $y=m_i$, $y=M_i$ и вертикалями, проведенными через концы отрезка Δ_i (на рис. 11 прямоугольники R_i заштрихованы). Пусть Γ_i — часть графика Γ, лежащая в прямоугольнике R_i. Ясно, что $\Gamma=\Gamma_1+\ldots+\Gamma_n$. Следовательно, многоугольная фигура $R=R_1+\ldots+R_n$ содержит множество Γ, и так как

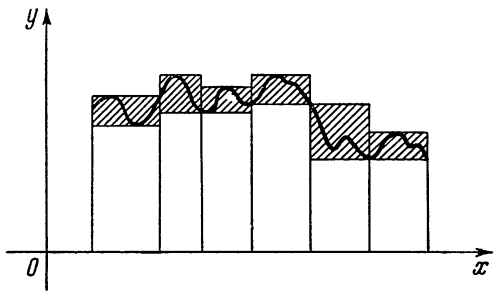


Рис. 11.

$s(R_i)=(M_i-m_i)\,l(\Delta_i)$, то $s(R)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,l(\Delta_i)<\varepsilon$. Правда, на некоторых из отрезков Δ_i функция φ может оказаться постоянной, так что соответствующие прямоугольники R_i выродятся. У таких прямоугольников достаточно слегка опустить нижнюю сторону или приподнять верхнюю (рис. 12). «Слегка» — значит меньше, чем на $\varepsilon/l(\Delta)$.

Кусочно гладкие простые дуги. Простая дуга Γ называется *гладкой*, если существует такое взаимно однозначное отображение f некоторого отрезка на Γ, что функции x_f, y_f имеют непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль. Ясно, что если отображение f удовлетворяет этому условию в одной системе координат, то оно удовлетворяет ему во всех системах координат. Название «гладкая» объясняется тем, что такая дуга плавно меняет свое направление и, в частности, не имеет угловых точек. Простая дуга называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких простых дуг.

Всякую кусочно гладкую простую дугу можно разбить на конечное число элементарных кривых.

Доказательство достаточно провести для гладких простых дуг (рис. 13). Пусть Γ—гладкая простая дуга, Δ—отрезок и f — такое взаимно однозначное отображение отрезка Δ на Γ, что производные x_f', y_f' непрерывны и не обращаются одновременно в нуль.

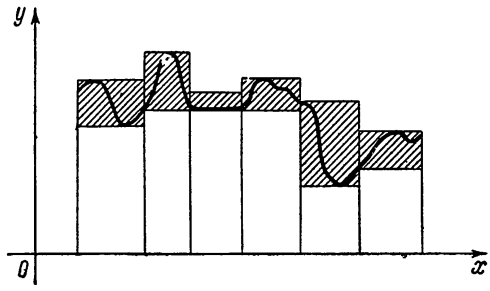


Рис. 12.

Предположим сначала, что одна из производных x_f', y_f' нигде не обращается в нуль на отрезке Δ. Если это x_f', то, как известно из анализа, функция x_f взаимно однозначно отображает отрезок Δ на некоторый отрезок Δ′ и обратная функция непрерывна. Обозначим эту обратную функцию через φ и положим: $g(t)=f(\varphi(t))$, $t\in\Delta'$. Ясно, что g есть отображение отрезка Δ′ на Γ, определяемое функциями $x_g(t)=t$, $y_g(t)=\psi(t)$ $(t\in\Delta')$, где $\psi(t)=y_f(\varphi(t))$. Следовательно, если x_f' не обращается в нуль на отрезке Δ, то дуга Γ является графиком функции ψ и, значит, элементарной кривой. Подобным же образом, Γ есть элементарная кривая и в случае, когда y_f' не обращается в нуль на Δ; доказательство — такое же, только нужно поменять ролями оси x и y.

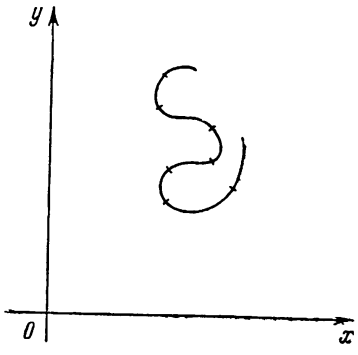


Рис. 13. Разбиение гладкой простой дуги на элементарные кривые.

Переходя к общему случаю, предположим, что дугу Γ нельзя разбить на конечное число элементарных кривых, и разделим отрезок Δ пополам. Тогда Γ разобьется на две простые дуги, из которых по крайней мере одну нельзя разбить на конечное число элементарных кривых. Половину отрезка Δ, которому отвечает такая дуга, мы опять-таки разделим пополам, и т. д. В результате мы получим последовательность отрезков Δ, Δ_1, Δ_2, ..., каждый из которых, начиная со второго, является половиной предыдущего, и соответствующую последовательность Γ, Γ_1, Γ_2, ... частей дуги Γ, не допускающих разбиения на конечное число элементарных кривых. Пусть t_0 — точка, принадлежащая всем отрезкам Δ, Δ_1, Δ_2, ... Так как производные x_f', y_f' непрерывны и по крайней мере одна из них не

обращается в нуль в точке t_0, то существует окрестность точки t_0, в которой одна из этих производных нигде не обращается в нуль. При достаточно большом n отрезок Δ_n целиком лежит в этой окрестности, и поэтому при достаточно большом n одна из производных x_f', y_f' не обращается в нуль на Δ_n. Следовательно, при достаточно большом n дуга Γ_n является элементарной кривой, а это очевидным образом противоречит тому, что ее нельзя разбить на конечное число элементарных кривых.

Кусочно гладкая простая дуга есть нуль-множество.

Действительно, кусочно гладкую простую дугу можно разбить на конечное число элементарных кривых, а элементарная кривая есть нуль-множество и сумма конечного числа нуль-множеств есть нуль-множество.

Простые замкнутые кривые. Множество точек плоскости называется *простой замкнутой кривой*, если существует непрерывное отображение отрезка на это множество, переводящее концы отрезка в одну точку, но в остальном взаимно однозначное. Простая замкнутая кривая называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких простых дуг. Например, окружность и контур квадрата являются кусочно гладкими простыми замкнутыми кривыми.

Кусочно гладкая простая замкнутая кривая есть нуль-множество.

Действительно, из предыдущего следует, что кусочно гладкую простую замкнутую кривую можно разбить на конечное число элементарных кривых.

4.8*. Квадрируемость классических фигур. Цель этого пункта — доказать, что «классические» фигуры, т. е. фигуры, с которыми мы обычно встречаемся в геометрии и классическом анализе, квадрируемы.

Прежде всего мы должны точнее определить интересующий нас класс фигур. Всякий скажет, что фигура в классическом смысле есть часть плоскости, ограниченная линией или несколькими линиями. Попытаемся придать этим словам точный смысл. Ясно, что под «линией» здесь следует понимать простую замкнутую кривую. Пусть Γ — такая кривая; что такое «часть плоскости, ограниченная кривой Γ»?

Конечно, это не просто множество с границей Γ, потому что таких множеств существует сколько угодно. Если, например, Γ — окружность, то такими множествами являются замкнутый круг, открытый круг, часть плоскости, внешняя по отношению к кругу, сама окружность Γ и многие другие множества Можно, однако, доказать, что, *какова бы ни была простая замкнутая кривая* Γ, *на плоскости существует единственная ограниченная замкнутая область с границей* Γ. Эта замкнутая область и есть *часть плоскости, ограниченная кривой* Γ. Ее называют также *фигурой, ограниченной кривой* Γ.

Мы не будем доказывать эту теорему, потому что ее доказательство трудно и длинно (оно очень не просто даже в случае, когда Γ — ломаная) и потому что мы можем без нее обойтись. Действительно, мы можем прямо определить *классическую фигуру* как ограниченную замкнутую область,

граница которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых; при этом, чтобы исключить патологические случаи, мы будем считать эти кривые кусочно гладкими.

Классические фигуры квадрируемы. Действительно, согласно пп. **4.7** и **4.3**, граница классической фигуры есть нуль-множество, так что применим критерий квадрируемости из п. **4.5**.

Следует подчеркнуть, что в этой теореме кусочная гладкость граничных кривых существенна. В п. **4.10** будет построена фигура, ограниченная простой замкнутой кривой, но не квадрируемая.

4.9. Круг. Из уважения к традиции мы приведем здесь классическое элементарное доказательство квадрируемости круга.

Пусть P_n — правильный 2^n-угольник ($n \geqslant 2$), вписанный в круг радиуса r, и Q_n — правильный 2^n-угольник, описанный около этого круга. Пусть a_n — сторона и c_n — апофема многоугольника P_n и b_n — сторона многоугольника Q_n. Согласно п. **3.5**,

$$s(P_n) = \frac{1}{2} 2^n a_n c_n, \qquad s(Q_n) = \frac{1}{2} 2^n b_n r. \tag{5}$$

Из соображений подобия следует, что

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{r}{c_n}. \tag{6}$$

Если P_n — квадрат (т. е. $n=2$), то это отношение равно $\sqrt{2}$; при возрастании n оно убывает, так как $a_n < 2a_{n+1}$, $b_n > 2b_{n+1}$. Следовательно,

$$\frac{r}{c_n} < 2. \tag{7}$$

Далее из неравенства $2b_{n+1} < b_n$ следует (индуктивно), что $2^{n-2} b_n \leqslant b_2 = 2r$. Наконец, $a_n < b_n$, $r - c_n < \frac{1}{2} a_n$, и потому

$$a_n < \frac{r}{2^{n-3}}, \qquad r - c_n < \frac{r}{2^{n-2}}. \tag{8}$$

Из (5), (6), (7), (8) получаем:

$$s(Q_n) - s(P_n) = 2^{n-1}(b_n r - a_n c_n) = 2^{n-1}\left(\frac{a_n}{c_n} r^2 - a_n c_n\right) =$$

$$= 2^{n-1} a_n \frac{r + c_n}{c_n} (r - c_n) < 4r \cdot 3 \cdot \frac{r}{2^{n-2}} = \frac{3r^2}{2^{n-4}}.$$

Следовательно, каково бы ни было положительное число ε, при n, настолько большом, что $2^{n-4} > \frac{3r^2}{\varepsilon}$, справедливо неравенство $s(Q_n) - s(P_n) < \varepsilon$. Этим доказано, что круг — квадрируемая фигура.

4.10*. Примеры неквадрируемых множеств. Пример 1. Ограниченное неквадрируемое множество. Направим оси

координат по двум соседним сторонам единичного квадрата E и обозначим через M множество тех точек квадрата E, у которых абсциссы являются рациональными числами.

Множество M не квадрируемо.

Доказательство. Всякий круг с центром в квадрате E содержит как точки квадрата с рациональными абсциссами, так и точки с иррациональными абсциссами. Следовательно, каждая точка квадрата является граничной для множества M. Так как квадрат не является нуль-множеством, то, согласно п. **4.5**, множество M не квадрируемо.

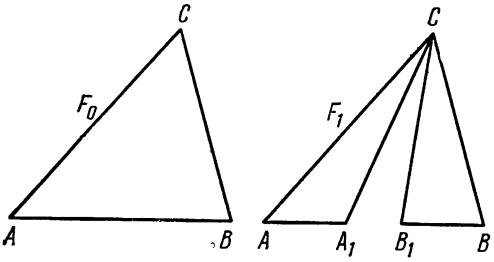


Рис. 14.

Конечно, множество M мало похоже на фигуры в классическом смысле. Ниже будут построены неквадрируемые множества, более близкие к классическим фигурам.

Пример 2. Неквадрируемая простая дуга. Возьмем какой-нибудь треугольник F_0 с вершинами A, B, C и, выбрав на стороне AB две такие точки A_1, B_1, что

$$\rho(A, A_1) < \frac{1}{2}\rho(A, B), \qquad \rho(B, B_1) < \frac{1}{2}\rho(A, B),$$

обозначим через F_1 многоугольную фигуру, составленную из треугольников ACA_1 и BCB_1 (рис. 14). Операцию, переводящую F_0 в F_1, мы будем называть *вырезанием с фокусом в вершине C*. Каждый из треугольников, составляющих фигуру F_1, мы опять подвергнем операции вырезания, приняв за фокусы только что возникшие вершины A_1 и B_1, и т. д. (рис. 15). Этим путем мы построим бесконечную последовательность многоугольных фигур F_0, F_1, F_2, ..., в которой фигура F_n является суммой 2^n треугольников. Чтобы превратить F_n в F_{n+1}, нужно подвергнуть каждый из этих треугольников операции вырезания с фокусом в вершине, возникшей при предыдущем вырезании.

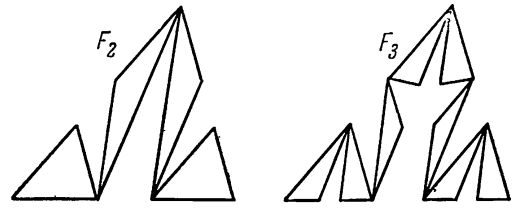


Рис. 15.

Обозначим через Г пересечение всех фигур F_n и покажем, что Г есть *простая дуга* (см. п. 4.7). Для этого мы построим непрерывное взаимно однозначное отображение отрезка [0, 1] на множество Г.

Назовем треугольники, составляющие фигуру F_n, *треугольниками ранга n*. Ясно, что их можно, и притом единственным образом, занумеровать так, чтобы каждые два треугольника с соседними номерами имели общую точку и чтобы первым был треугольник, содержащий точку A (последним будет треугольник, содержащий точку B). Разделим отрезок [0, 1] на 2^n равных отрезков, назовем их *отрезками ранга n*, занумеруем

их слева направо и отнесем каждому отрезку ранга n треугольник ранга n с тем же номером. Тогда множество отрезков всех рангов взаимно однозначно и с сохранением ранга отобразится на множество треугольников всех рангов. Ясно, что:

(a) Один треугольник в том и только в том случае является частью другого треугольника, если отрезок, которому отвечает первый треугольник, является частью отрезка, которому отвечает второй треугольник.

(b) Два треугольника в том и только в том случае имеют общую точку, если отрезки, которым они соответствуют, имеют общую точку.

(c) Длина наибольшей из сторон треугольников ранга n стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Пусть t — произвольная точка отрезка [0, 1]. Если существует единственный отрезок ранга n, содержащий точку t, то пусть $\Delta_n(t)$ — этот отрезок и $T_n(t)$ — соответствующий треугольник ранга n; если существуют два таких отрезка, то пусть $\Delta_n(t)$ — сумма этих отрезков и $T_n(t)$ — сумма соответствующих треугольников. Так как $\Delta_1(t) \supset \Delta_2(t) \supset \ldots$, то $T_1(t) \supset T_2(t) \supset \ldots$ (см. (a)). Из этих включений и того факта, что наибольшее расстояние между точками множества $T_n(t)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n (см. (b) и (c)), следует, что пересечение всех множеств $T_n(t)$ состоит из единственной точки. Отнесем эту точку точке t и покажем, что определенное таким образом отображение f отрезка [0, 1] в множество Γ является непрерывным взаимно однозначным отображением на все множество Γ.

Пусть по-прежнему t — произвольная точка отрезка [0, 1] и ε — положительное число. Из определения отображения f следует, что $f(\Delta_n(t)) \subset T_n(t)$, и так как при неограниченном возрастании n наибольшее расстояние между точками множества $T_n(t)$ стремится к нулю, то существует такое m, что расстояние любой точки множества $f(\Delta_m(t))$ от точки $f(t)$ меньше ε. Пусть δ — расстояние точки t до ближайшего конца отрезка $\Delta_m(t)$. Ясно, что если $|t'-t| < \delta$, то $\rho(f(t), f(t')) < \varepsilon$ и, значит,

$$|x_f(t')-x_f(t)| < \varepsilon, \quad |y_f(t')-y_f(t)| < \varepsilon.$$

Этим доказано, что отображение f непрерывно в точке t.

Пусть A — произвольная точка множества Γ. Если существует единственный треугольник ранга n, содержащий эту точку, то пусть T_n — этот треугольник и Δ_n — отрезок ранга n, которому он соответствует; если существуют два таких треугольника, то пусть T_n — их сумма и Δ_n — сумма отрезков, которым они соответствуют. Так как $T_1 \supset T_2 \supset \ldots$, то $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ (см. (a)). Из последних включений и того факта, что длина отрезка Δ_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n, следует, что пересечение отрезков Δ_n состоит из единственной точки, скажем t. Ясно, что $A = f(t)$, и что t — единственная точка с этим свойством. Следовательно, f — взаимно однозначное отображение отрезка [0, 1] на все множество Γ.

Итак, Γ — простая дуга. Посмотрим, будет ли она квадрируемой. Очевидно, что множество Γ не содержит ни одного круга: такой круг должен был бы при каждом n содержаться в некотором треугольнике ранга n, а это невозможно в силу (c). Согласно п. 4.3, отсюда следует, что *дуга* Γ *квадрируема в том и только в том случае, если она является нуль-множеством.*

Так это или нет — зависит от того, большие или малые части фигур F_n удаляются при вырезаниях. Пусть σ_n — площадь фигуры F_n. Ясно, что последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ убывает и что для всякой строго убывающей последовательности положительных чисел $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ можно построить указанным выше способом такую последовательность многоугольных фигур $F_0, F_1, \ldots$, что $s(F_n) = \sigma_n$. Оказывается, что дуга Γ является *нуль-множеством в том и только в том случае, если* $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$. Возьмем для заданного положительного ε такое m, что $\sigma_m<\varepsilon$, и положим $R=F_m$. Ясно, что $\Gamma\subset R$ и $s(R)=\sigma_m<\varepsilon$. Следовательно, Γ есть нуль-множество.

Пусть теперь Γ—нуль-множество. Возьмем для заданного положительного ε такую многоугольную фигуру R, что $R\supset\Gamma$ и $s(R)<\varepsilon/2$, разобьем ее на треугольники и подвергнем каждый треугольник преобразованию подобия с центром в какой-нибудь внутренней точке и коэффициентом, большим единицы; этот коэффициент мы выберем так, чтобы многоугольная фигура R', составленная из новых треугольников, удовлетворяла условию $s(R')<\varepsilon$ (ср. п. 4.2). Ясно, что фигура R' содержит не только множество Γ, но и все точки, лежащие от точек множества Γ на расстоянии, меньшем некоторого положительного числа δ. Так как длина наибольшей из сторон треугольников ранга n стремится к 0 при неограниченном возрастании n и так как каждый из этих треугольников содержит точки множества Γ, то при достаточно большом n каждая точка множества F_n лежит от некоторой точки множества Γ на расстоянии, меньшем δ. Следовательно, если n достаточно велико, то $F_n\subset R'$ и $\sigma_n\leqslant s(R')<\varepsilon$, а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

Подведем итоги: *если* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n>0$, *то* Γ—*неквадрируемая простая дуга.*

Пример 3. Неквадрируемая фигура, ограниченная простой замкнутой кривой. Пусть Γ—неквадрируемая простая дуга, построенная из треугольника ABC, как в примере 2, и C'—точка, симметричная с точкой C относительно прямой AB. Обозначим через Γ' простую замкнутую кривую, составленную из дуги Γ и отрезков AC' и BC', и через F—фигуру, ограниченную кривой Γ' (см. п. 4.8). Так как Γ—не нуль-множество, то и Γ'—не нуль-множество. Следовательно, фигура F не квадрируема.

Очевидный недостаток этого рассуждения состоит в том, что оно опирается на трудную общую теорему, изложенную в п. 4.8 без доказательства. Желательно иметь прямое определение множества F. Вот это определение: F есть сумма дуги Γ, треугольника ABC' и всех треугольников, вырезаемых из фигур F_n с четными номерами n. Нетрудно показать, что это—замкнутая область с границей Γ'.

§ 5. Площадь на классе квадрируемых фигур

5.1. Определение площади. *Площадь* есть функция, определенная на классе квадрируемых фигур и обладающая свойствами (α)—(δ). Так как многоугольные фигуры квадрируемы, то такая функция определена, в частности, на классе многоугольных фигур. Там она также обладает свойствами (α)—(δ) и потому совпадает с функцией s, изученной в § 3. Новую функцию мы также будем обозначать через s.

Существование и единственность нашей функции будут доказаны в п. **5.5**. Пока они не доказаны, мы будем понимать под площадью какую-нибудь функцию квадрируемой фигуры со свойствами (α)—(δ), предполагая ее существующей.

5.2. Простейшие следствия определения. При переходе к классу квадрируемых фигур площадь сохраняет свойство монотонности: *если квадрируемая фигура N есть часть квадрируемой фигуры M, то* $s(N)\leqslant s(M)$.

Действительно, положим $N' = M - N$. Согласно п. **4.6**, N' — квадрируемая фигура. Так как N и N' составляют M и не имеют общих внутренних точек (даже вообще не имеют общих точек), то, согласно свойству (β), $s(M) = s(N) + s(N')$, а согласно свойству (α), $s\ N') \geqslant 0$. Следовательно, $s(M) \geqslant s(N)$.

Мы увидим, однако, что свойством *строгой* монотонности площадь на классе квадрируемых фигур уже не обладает.

Для любых двух квадрируемых фигур M и N справедливо соотношение

$$s(M+N) = s(M) + s(N) - s(MN). \tag{1}$$

Действительно, множество $M+N$ можно представить как сумму непересекающихся множеств M и $N-MN$, так что, согласно свойству (β),

$$s(M+N) = s(M) + s(N-MN). \tag{2}$$

Далее, множество N есть сумма непересекающихся множеств $N-MN$ и MN, так что, согласно тому же свойству (β),

$$s(N) = s(N-MN) + s(MN). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует (1).

Для любых квадрируемых фигур $M_1, \ldots, M_n$ справедливо неравенство $s(M_1 + \ldots + M_n) \leqslant s(M_1) + \ldots + s(M_n)$.

При $n = 2$ это следует из формулы (1), при $n > 2$ доказывается индуктивно.

Читателю рекомендуется сопоставить доказательства монотонности площади и соотношения (1) с соответствующими рассуждениями п. **3.2**.

5.3. Площадь как точная грань. В силу монотонности площади, для всякой квадрируемой фигуры M и всяких двух многоугольных фигур P и Q, удовлетворяющих условиям $P \subset M \subset Q$, справедливы неравенства

$$s(P) \leqslant s(M) \leqslant s(Q). \tag{4}$$

Таким образом, площадь квадрируемой фигуры заключена между площадями всех входящих многоугольных фигур и площадями всех объемлющих многоугольных фигур. Она служит верхней гранью первых и нижней гранью вторых.

Следующая теорема дает точное выражение площади квадрируемой фигуры через площади входящих и объемлющих многоугольных фигур.

Площадь квадрируемой фигуры есть точная верхняя грань площадей входящих многоугольных фигур и точная нижняя грань площадей объемлющих многоугольных фигур:

$$s(M) = \sup s(P) = \inf s(Q). \tag{5}$$

Другими словами, площадь квадрируемой фигуры есть единственное число, заключенное между площадями всех входящих многоугольных фигур и площадями всех объемлющих многоугольных фигур.

Для доказательства положим $\sup s(P) = p$, $\inf s(Q) = q$. Из неравенства (4) следует, что для всякой входящей многоугольной фигуры P и всякой объемлющей многоугольной фигуры Q

$$s(P) \leqslant p \leqslant s(M) \leqslant q \leqslant s(Q). \tag{6}$$

С другой стороны, согласно определению квадрируемости, для всякого положительного ε существуют такая входящая многоугольная фигура P и такая объемлющая многоугольная фигура Q, что

$$s(Q) - s(P) < \varepsilon. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует: $0 \leqslant q - p < \varepsilon$, и так как ε произвольно, то $p = q = s(M)$.

5.4. Площадь как предел. Если M — квадрируемая фигура и P, Q — такие многоугольные фигуры, что $P \subset M \subset Q$, то в силу неравенств (4)

$$s(M) - s(P) \leqslant s(Q) - s(P), \qquad s(Q) - s(M) \leqslant s(Q) - s(P). \tag{8}$$

Сопоставляя неравенства (8) с определением квадрируемости, мы видим, что для всякой квадрируемой фигуры M при любом положительном ε существуют такая входящая многоугольная фигура P и такая объемлющая многоугольная фигура Q, что $s(M) - s(P) < \varepsilon$, $s(Q) - s(M) < \varepsilon$.

Возьмем какую-нибудь последовательность положительных чисел ε_n, сходящуюся к нулю, и построим многоугольные фигуры P_n и Q_n, удовлетворяющие соотношениям $P_n \subset M \subset Q_n$, $s(M) - s(P_n) < \varepsilon_n$, $s(Q_n) - s(M) < \varepsilon_n$. Ясно, что

$$s(M) = \lim_{n \to \infty} s(P_n) = \lim_{n \to \infty} s(Q_n). \tag{9}$$

Таким образом, *для всякой квадрируемой фигуры M существуют такая последовательность входящих многоугольных фигур P_n и такая последовательность объемлющих многоугольных фигур Q_n, что справедливо соотношение* (9).

Если, например, M — круг, а P_n и Q_n — вписанные и описанные правильные 2^n-угольники, то согласно п. **4.9**,

$$\lim_{n \to \infty} [s(Q_n) - s(P_n)] = 0. \tag{10}$$

Из соотношений (10) и (8) (в последнем под P и Q нужно понимать P_n и Q_n) следует (9). Таким образом, *площадь круга может быть вычислена как предел последовательности площадей правильных вписанных или описанных 2^n-угольников.*

5.5. Теорема существования и единственности. *На классе квадрируемых фигур существует одна и только одна функция со свойствами* (α)—(δ).

Доказательство единственности. Пусть s и s' — две функции, определенные на классе квадрируемых фигур и обладающие свойствами (α)—(δ). Согласно формуле (5), для всякой квадрируемой фигуры M

$$s(M) = \sup s(P), \quad s'(M) = \sup s'(P).$$

Но, по теореме единственности, доказанной в п. **3.7**, $s'(P) = s(P)$ для всякой многоугольной фигуры P. Следовательно, $s'(M) = s(M)$.

Доказательство существования. Мы будем пользоваться теоремой существования площади на классе многоугольных фигур, доказанной в п. **3.7**. Пусть M — квадрируемая фигура, Q — какая-нибудь объемлющая многоугольная фигура и P — произвольная входящая многоугольная фигура. Так как P содержится в Q, то $s(P) \leqslant s(Q)$. Следовательно, множество площадей входящих многоугольных фигур ограничено сверху. Рассмотрим его точную верхнюю грань $\sup s(P)$. Если фигура M сама является многоугольной, то, очевидно, $\sup s(P) = s(M)$, в общем же случае $\sup s(P)$ есть некоторое число, однозначно определяемое квадрируемой фигурой M. Таким образом, $\sup s(P)$ есть функция, определенная на классе квадрируемых фигур и совпадающая на классе многоугольных фигур с функцией s. Не возникнет недоразумений, если мы и ее обозначим через s, т. е. положим для произвольной квадрируемой фигуры M

$$s(M) = \sup s(P). \tag{11}$$

Очевидно, что эта функция обладает свойствами (α), (γ) и (δ). Покажем, что она обладает и свойством (β). Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — квадрируемые фигуры, попарно не имеющие общих внутренних точек, M — их сумма и ε — положительное число. Согласно определению квадрируемости, существуют такие многоугольные фигуры $P_1, Q_1, \ldots, P_n, Q_n$, что

$$P_i \subset M_i \subset Q_i, \; s(Q_i) - s(P_i) < \varepsilon/n \; (i = 1, \ldots, n),$$

и из определения (11) следует, что $s(P_i) \leqslant s(M_i) \leqslant s(Q_i)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} s(P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} s(M_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} s(Q_i), \quad \sum_{i=1}^{n} s(Q_i) - \sum_{i=1}^{n} s(P_i) < \varepsilon.$$

Положим $P_1 + \ldots + P_n = P$, $Q_1 + \ldots + Q_n = Q$. Ясно, что $P \subset M \subset Q$, и, в силу того же определения (11), $s(P) \leqslant s(M) \leqslant s(Q)$. Но $s(P) = \sum_{i=1}^{n} s(P_i)$, $s(Q) \leqslant \sum_{i=1}^{n} s(Q_i)$. (Фигуры $P_1, \ldots, P_n$ попарно не

имеют общих внутренних точек.) Таким образом, оба числа $s(M)$ и $\sum_{i=1}^{n} s(M_i)$ заключены между числами $\sum_{i=1}^{n} s(P_i)$ и $\sum_{i=1}^{n} s(Q_i)$, разность которых меньше ε, и потому $\left| s(M) - \sum_{i=1}^{n} s(M_i) \right| < \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $s(M) = \sum_{i=1}^{n} s(M_i)$.

5.6. Нуль-множества. *Класс нуль-множеств* (п. **4.3**) *совпадает с классом квадрируемых фигур нулевой площади.*

Действительно, согласно п. **5.3**, площадь квадрируемой фигуры равна точной нижней грани площадей объемлющих многоугольных фигур, а определение нуль-множества как раз и заключается в требовании, чтобы эта нижняя грань была равна нулю.

На классе квадрируемых фигур площадь не является строго монотонной функцией. Действительно, если M—квадрируемая фигура и N—непустое нуль-множество, не имеющее с M общих точек, то $s(M+N) = s(M)$, хотя $M+N \neq M$.

5.7. Полнота класса квадрируемых фигур. Принцип, при помощи которого мы расширили в п. **4.1** класс многоугольных фигур до класса квадрируемых фигур, можно сформулировать следующим образом: *множество M в том и только в том случае причисляется к расширенному классу, если для всякого положительного ε существуют такие фигуры P и Q прежнего класса, что* $P \subset M \subset Q$, $s(Q) - s(P) < \varepsilon$.

Ясно, что в такой формулировке этот принцип не связан с предположением, что исходный класс есть класс многоугольных фигур. Это—общий принцип расширения, применимый к любому классу множеств, на котором определена функция s. Он носит название *принципа пополнения*. Мы можем, таким образом, сказать, что *класс квадрируемых фигур есть пополнение класса многоугольных фигур*. Возникает вопрос: что произойдет, если мы применим этот принцип к классу квадрируемых фигур?

Оказывается, что класс квадрируемых фигур не расширится, т. е. что он уже содержит все множества, получающиеся при его пополнении. Другими словами: *если для множества M при любом положительном ε существуют такие квадрируемые фигуры L и N, что*

$$L \subset M \subset N, \qquad s(N) - s(L) < \varepsilon, \tag{12}$$

то M—квадрируемая фигура. Это свойство класса квадрируемых фигур называется *полнотой*.

Чтобы доказать квадрируемость множества M, построим для заданного положительного ε такие квадрируемые фигуры L и N,

что

$$L \subset M \subset N, \quad s(N) - s(L) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{13}$$

и затем такие многоугольные фигуры P и Q, что

$$P \subset L, \quad s(L) - s(P) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad N \subset Q, \quad s(Q) - s(N) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует: $P \subset M \subset Q$, $s(Q) - s(P) < \varepsilon$. Таким образом, M—квадрируемая фигура.

5.8. Поведение площади при аффинном преобразовании. *Аффинное преобразование переводит квадрируемую фигуру в квадрируемую фигуру. Если M'—образ квадрируемой фигуры M при аффинном преобразовании с определителем Δ, то $s(M') = s(M)|\Delta|$.*

Доказательство. Пусть ε—положительное число и P, Q—такие многоугольные фигуры, что

$$P \subset M \subset Q, \quad s(Q) - s(P) < |\Delta|^{-1}\varepsilon. \tag{15}$$

Обозначим через P', Q' образы фигур P, Q. Ясно, что

$$P' \subset M' \subset Q', \tag{16}$$

и так как, согласно п. **3.10**, $s(P') = s(P) \cdot |\Delta|$, $s(Q') = s(Q) \cdot |\Delta|$, то

$$s(Q') - s(P') = [s(Q) - s(P)] \cdot |\Delta| < \varepsilon.$$

Таким образом, M'—квадрируемая фигура.

Из включений (15) и (16) следует: $s(P') = s(P) \cdot |\Delta| \leqslant s(M) \cdot |\Delta| \leqslant s(Q) \cdot |\Delta| = s(Q')$, $s(P') \leqslant s(M') \leqslant s(Q')$. Поэтому имеем $|s(M') - s(M) \cdot |\Delta|| \leqslant s(Q') - s(P') < \varepsilon$, и так как ε произвольно, то $s(M') = s(M) \cdot |\Delta|$.

Частные случаи (см. п. **3.9**). 1. *Преобразование подобия переводит квадрируемую фигуру в квадрируемую фигуру. Если M'—образ квадрируемой фигуры M при преобразовании подобия с коэффициентом λ, то $s(M') = s(M)\lambda^2$.*

2. *При невырожденном ортогональном проектировании плоскости на плоскость образы и прообразы квадрируемых фигур квадрируемы. Если α—угол между плоскостями и M'—проекция квадрируемой фигуры M, то $s(M') = s(M)\cos\alpha$.*

Примеры. 1. Площадь круга. Пусть K_1—круг радиуса 1 и K—круг радиуса r. Так как K можно получить из K_1 преобразованием подобия с коэффициентом r, то $s(K) = s(K_1)r^2$. Полагая $s(K_1) = \pi$, получаем обычную формулу: $s(K) = \pi r^2$.

2. Площадь эллипса. Пусть a и b—положительные числа. Аффинное преобразование $x' = ax$, $y' = by$ переводит круг радиуса 1, определяемый неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 1$, в эллипс с полуосями a и b, определяемый неравенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \tag{17}$$

Так как определитель этого преобразования равен ab, то площадь эллипса (17) равна πab.

5.9*. Вычисление площади. До сих пор мы занимались главным образом логическими вопросами теории площадей. Проблеме вычисления площади уделялось мало внимания — она была рассмотрена только для многоугольных фигур. Теперь мы займемся криволинейными фигурами.

Проблема вычисления площади намного старше логических проблем теории площадей. Если *понятием* площади заинтересовались в прошлом столетии, то вычисление площадей благодаря своему практическому значению находилось в центре внимания математиков уже десятки столетий назад. И задолго до того, как логические проблемы теории площадей были поняты и сформулированы, математикам уже были известны эффективные методы вычисления площадей криволинейных фигур.

Эти методы были созданы после многовековых усилий и принадлежат к числу самых выдающихся достижений человеческой мысли. Они оказались очень общими, т. е. пригодными для вычисления не только площадей, но и многих других геометрических и физических величин. Со временем они обрели самостоятельность и стали ядром новой науки. Эта наука называется *математическим анализом* и представляет собой в настоящее время универсальный инструмент точного естествознания.

Изложение математического анализа не входит в задачи настоящей статьи. Мы ограничимся тем, что дадим простейшие формулы, позволяющие вычислять площади криволинейных фигур средствами анализа. Эти формулы выражают площади через интегралы, и их применение требует умения вычислять интегралы.

Для сравнения заметим, что и площадь прямоугольника мы вычислили в п. **3.3** лишь в том смысле, что доказали формулу $s(P) = ab$. Применение этой формулы требует умения перемножать числа и является делом арифметики, которая, как и анализ, не излагается в настоящей статье. Добавим, что задача вычисления площади прямоугольника в не меньшей степени способствовала развитию арифметики, чем задача вычисления площади криволинейной фигуры — развитию анализа.

Сначала мы рассмотрим основной случай, когда наша фигура является «криволинейной трапецией», а затем, кратко, случай произвольной классической фигуры.

Площадь криволинейной трапеции. Пусть φ — некоторая функция, непрерывная и неотрицательная на отрезке $\Delta = [a, b]$. Снабдим плоскость системой координат и обозначим через F множество точек, координаты x, y которых удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)$ (рис. 16). Множество F называется *криволинейной трапецией*, определяемой функцией φ.

Криволинейная трапеция квадрируема.

Действительно, множество F содержится в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant L$, где L — верхняя грань функции φ, и потому ограничено. Граница множества F состоит из отрезка оси абсцисс, двух вертикальных отрезков (которые могут вырождаться в точки) и графика функции φ и потому является нуль-множеством (см. п. **4.7**). Согласно п. **4.5**, из этих двух фактов следует квадрируемость множества F.

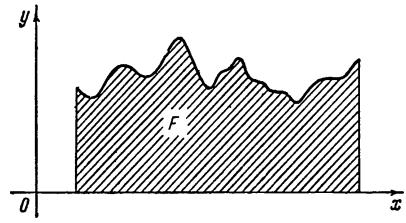


Рис. 16.

Если функция φ строго положительна внутри отрезка $[a, b]$, то граница криволинейной трапеции F является простой замкнутой кривой, а сама криволинейная трапеция есть фигура, ограниченная этой кривой в смысле п. **4.8**. Если, кроме того, функция φ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$ или этот отрезок может быть разложен на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых функция φ имеет непрерывную производную, то F — классическая фигура.

Площадь криволинейной трапеции F дается формулой

$$s(F) = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть, как в п. **4.7**, $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ — произвольное разбиение отрезка Δ на конечное число частичных отрезков и m_i, M_i — наименьшее и наибольшее значения функции φ на отрезке Δ_i ($i = 1, \ldots, n$). Пусть P_i — прямоугольник (может быть, вырожденный), ограниченный горизонталями $y = 0$, $y = m_i$ и вертикалями, проведенными через концы отрезка Δ_i, и Q_i — прямоугольник (может быть, вырожденный), ограниченный горизонталями $y = 0$, $y = M_i$ и вертикалями, проведенными через концы отрезка Δ_i (рис. 17). Положим $P = P_1 + \ldots + P_n$, $Q = Q_1 + \ldots + Q_n$. Ясно, что

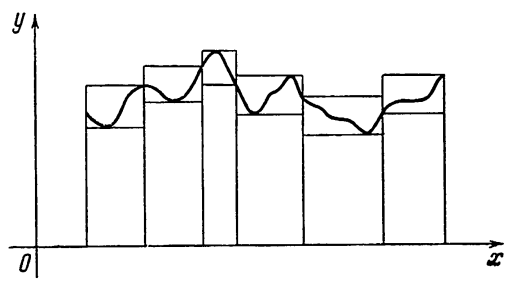


Рис. 17.

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i l(\Delta_i), \qquad s(Q) = \sum_{i=1}^{n} M_i l(\Delta_i), \tag{19}$$

и так как, очевидно, $P \subset F \subset Q$, то

$$s(P) \leqslant s(F) \leqslant s(Q). \tag{20}$$

Теперь мы должны обратиться к определению интеграла, стоящего в правой части формулы (18). Первая из сумм (19) называется *нижней*, вторая — *верхней интегральной суммой* функции φ относительно разбиения $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$. Одна из теорем анализа, так называемая «теорема существования интеграла», утверждает, что существует единственное число, служащее одновременно верхней гранью нижних сумм и нижней гранью верхних сумм. Это число и есть, по определению, интеграл (18). Согласно неравенству (20), таким числом является площадь $s(F)$, что и доказывает формулу (18).

Добавим, что в наших рассуждениях содержится и доказательство теоремы существования интеграла. Действительно, согласно лемме из п. **4.7**, для всякого положительного ε существует такое разбиение $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, что $\sum_{i=1}^{n} M_i l(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i l(\Delta_i) < \varepsilon$, и потому $s(F)$ — единственное число, заключенное между нижними и верхними суммами.

Формула (18) может считаться основной формулой теории площадей. Конечно, сама по себе она не является глубоким математическим предложением: понятия площади и интеграла настолько близки друг другу, что она почти очевидна. Однако в соединении с мощными методами вычисления интегралов, которыми располагает анализ, это формула оказывается чрезвычайно эффективной.

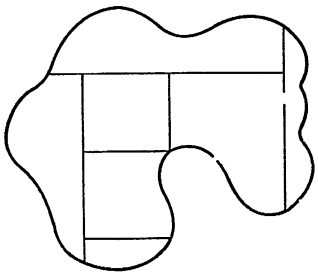


Рис. 18. Разбиение классической фигуры на криволинейные трапеции.

Площадь классической фигуры. Можно доказать, что всякая классическая фигура (п. **4.8**) может быть разбита горизонталями и вертикалями на конечное число криволинейных трапеций (некоторые из этих трапеций будут повернуты относительно положенной в основу системы координат на 90, 180 или 270° и сдвинуты — см. рис. 18). Если такое разбиение произведено, то площадь фигуры может быть вычислена как сумма площадей этих трапеций, а к последним применима формула (18). В этом смысле формула (18) является универсальной формулой теории площадей.

Если рассматриваемая фигура достаточно проста, то этот путь быстро ведет к цели, но в более сложных случаях он может оказаться малоэффективным. Существуют формулы, позволяющие прямо

вычислить площадь классической фигуры по уравнениям граничных кривых. Пусть F — ограниченная замкнутая область, границей которой служит простая замкнутая кусочно гладкая кривая Γ, и пусть

$$x(t)=x_f(t), \quad y(t)=y_f(t), \quad a\leqslant t\leqslant b, \tag{21}$$

— функции, определяющие кривую Γ (п. **4.7**). Предположим, что отображение f определяет на кривой Γ положительное направление, т. е. такое направление обхода, при котором фигура F лежит слева. *Тогда площадь фигуры F может быть вычислена по любой из трех формул:*

$$s(F)=\int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt, \tag{22}$$

$$s(F)=-\int_a^b y(t)\,x'(t)\,dt, \tag{23}$$

$$s(F)=\frac{1}{2}\int_a^b [x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t)]\,dt. \tag{24}$$

Доказательство этой теоремы уже довольно сложно и опирается на ряд общих теорем интегрального исчисления. В общих чертах оно может быть описано следующим образом.

Правые части формул (22) и (23) получаются друг из друга интегрированием по частям (так как кривая замкнута, то $x(a)=x(b)$, $y(a)=y(b)$, и потому $x(b)\,y(b)-x(a)\,y(a)=0$), а правая часть формулы (24) есть полусумма правых частей формул (22) и (23). Следовательно, правые части всех трех формул равны между собой.

Определитель $x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t)$, стоящий под интегралом в правой части формулы (24), не меняется ни при параллельном переносе, ни при повороте координатных осей. Следовательно, правые части всех трех формул не меняются при этих преобразованиях.

Предположим сначала, что F — криволинейная трапеция, определяемая функцией $y=\varphi(x)$, $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, которая положительна внутри отрезка $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ и имеет на нем непрерывную производную. Разложим кривую Γ на три прямолинейных отрезка и график функции φ, проходимый справо налево (ср. рис. 17), и рассмотрим соответствующее разложение интеграла (23) на четыре интеграла. Первые три интеграла равны нулю (в интегралах, соответствующих вертикальным отрезкам, $x'(t)=0$, в интеграле, соответствующем отрезку оси абсцисс, $y(t)=0$), четвертый, как показывает подстановка $x=x(t)$, равен $-\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=-s(F)$. Следовательно,

формула (23) верна для криволинейных трапеций рассматриваемого вида.

В общем случае фигуру F можно разложить горизонталями и вертикалями на конечное число таких трапеций. Некоторые из этих трапеций будут повернуты на 90, 180 или 270° и сдвинуты. В силу предыдущего к каждой из них применима формула (23), а потому она применима и к фигуре F.

5.10. Площадь на классе квадрируемых замкнутых областей. В этом пункте будет показано, что на классе квадрируемых замкнутых областей площадь сохраняет свойство строгой монотонности.

Согласно пп. **2.4** и **4.1**, класс квадрируемых замкнутых областей содержит все многоугольные фигуры. Излагаемая ниже теория является естественным продолжением теории площадей многоугольных фигур.

Так как сумма конечного числа замкнутых областей есть замкнутая область (п. **2.2**) и сумма конечного числа квадрируемых множеств есть квадрируемое множество (п. **4.6**), то сумма конечного числа квадрируемых замкнутых областей есть квадрируемая замкнутая область. Однако с пересечением и вычитанием дело обстоит сложнее: уже пересечение и разность двух треугольников могут не быть замкнутыми областями. В п. **2.5** мы определили *приведенное пересечение* и *приведенную разность* многоугольных фигур, всегда являющиеся многоугольными фигурами. Эти определения мы перенесем теперь на произвольные замкнутые области, т. е. положим для любых двух замкнутых областей F и F':

$$[FF'] = ((FF')_в)_з, \qquad [F - F'] = (F - F')_з. \tag{25}$$

Очевидно, что $[FF']$ — замкнутая область. Покажем, что и $[F - F']$ есть замкнутая область, а именно, покажем, что

$$[F - F'] = ((F - F')_в)_з. \tag{26}$$

Пусть $A \in F - F'$. Так как $A \in F$ и $F = (F_в)_з$ (см. п. **2.2**), то всякий круг с центром в точке A пересекается с множеством $F_в$. Так как точка A не принадлежит замкнутому множеству F', то существует круг с центром в точке A, не пересекающийся с F'. Следовательно, всякий круг с центром в точке A пересекается с $F_в - F'$, т. е. $A \in (F_в - F')_з$.

Таким образом, $F - F' \subset (F_в - F')_з$, и потому $(F - F')_з \subset (F_в - F')_з$. Но $F_в - F' = F_в$ (доп. F'), а доп. $F' =$ (доп. $F')_в$, и потому

$$F_в - F' = F_в\,(\text{доп. } F')_в = (F(\text{доп. } F'))_в = (F - F')_в.$$

Следовательно, $(F - F')_з \subset ((F - F')_в)_з$. Обратно, $(F - F')_в \subset F - F'$, и потому $((F - F')_в)_з \subset (F - F')_з$.

Свойства операций приведенного пересечения и вычитания. При изучении этих свойств мы ограничимся клас-

сом квадрируемых замкнутых областей. Предварительно сделаем одно замечание. Рассмотрим соответствие, относящее каждому квадрируемому множеству M замкнутую область $[M]=(M_в)_э$. Как показывают формулы (25) и (26), обозначение $[M]$ согласуется с ранее введенными обозначениями $[FF']$ и $[F-F']$. Оказывается, что $[M]$ *лишь на нуль-множество отличается от* M (т. е. разности $M-[M]$ и $[M]-M$ являются нуль-множествами) и что $[M]$ — *единственная замкнутая область, обладающая этим свойством.*

Для доказательства заметим, что оба множества M и $[M]$ содержат $M_в$ и содержатся в $M_э$. Следовательно, обе разности $M-[M]$ и $[M]-M$ содержатся в $M_э-M_в=M_г$ и потому являются нуль-множествами. Если бы существовали две замкнутые области F и F', отличающиеся от M лишь нуль-множествами, то они отличались бы лишь нуль-множествами и друг от друга, т. е. разности $F-F'$ и $F'-F$ были бы нуль-множествами. Внутренние части этих разностей были бы тогда пусты, а с ними, в силу формулы (26), были бы пусты и сами разности.

Так как $[M]$ отличается от M только нуль-множеством, то $[M]$ — квадрируемая фигура. В частности, приведенные пересечения и приведенные разности квадрируемых замкнутых областей являются квадрируемыми замкнутыми областями.

Операции приведенного пересечения и приведенного вычитания квадрируемых замкнутых областей обладают всеми алгебраическими свойствами обычного пересечения и обычного вычитания множеств. Например:

$$[[F_1F_2]F_3]=[F_1[F_2F_3]],\qquad [F_1-F_2]=[F_1-[F_1F_2]],$$
$$[(F_1\pm F_2)F_3]=[F_1F_3]\pm[F_2F_3],\quad [F_1F_2]+F_3=[(F_1+F_3)(F_2+F_3)];$$

см. также формулу (9) в п. **2.5**.

Доказательство. Достаточно доказать, что при отображении $M\longrightarrow[M]$ сумме, пересечению и разности двух квадрируемых множеств отвечают сумма, приведенное пересечение и приведенная разность их образов, т. е. что для любых двух квадрируемых множеств M и N

$$[M+N]=[M]+[N],\quad [MN]=[[M][N]],\quad [M-N]=[[M]-[N]].$$

Так как $[M]$ и $[N]$ лишь нуль-множествами отличаются от M и N, то правые части этих формул лишь нуль-множествами отличаются от $M+N$, MN и $M-N$. А так как эти правые части являются замкнутыми областями, то они совпадают с $[M+N]$, $[MN]$ и $[M-N]$.

Строгая монотонность площади. *На классе квадрируемых замкнутых областей площадь строго монотонна.* В

частности, *если квадрируемая замкнутая область F не пуста*, то $s(F) > 0$.

Докажем сначала второе утверждение. Так как $F = (F_в)_з$, то из непустоты множества F следует непустота множества $F_в$. Следовательно, $s(F) > 0$ (см. пп. **4.3** и **5.6**). Доказательство первого утверждения дословно совпадает теперь с соответствующим рассуждением п. **3.6**.

Поскольку для всякого квадрируемого множества существует квадрируемая замкнутая область, отличающаяся от него лишь нуль-множеством, переход от класса всех квадрируемых фигур к классу квадрируемых замкнутых областей не является существенным сужением области определения площади. Существуют вопросы, в которых класс квадрируемых фигур предпочтительнее; таково положение в теории интегрирования, которая, впрочем, давно уже не удовлетворяется и классом всех квадрируемых множеств и продолжает площадь далеко за пределы этого класса. Однако с элементарно геометрической точки зрения класс квадрируемых замкнутых областей является более естественной областью определения площади, чем класс всех квадрируемых множеств.

§ 6. Другое построение теории площадей

6.1. Введение. Цель этого параграфа — познакомить читателя с построением теории площадей, основанным на естественном конструктивном определении площади, которое было кратко описано в п. **1.5**. Многоугольные фигуры не играют в этом построении специальной роли. Определение площади дается сразу для произвольной квадрируемой фигуры, и одновременно определяется сам класс квадрируемых фигур. Свойства (α) — (δ) доказываются как теоремы. В заключение устанавливается, что новое определение эквивалентно аксиоматическому определению, данному в предыдущих параграфах.

Эта эквивалентность избавляет нас от необходимости вторично рассматривать все проблемы теории площадей. Заново строится лишь логический костяк теории. Таких вопросов, как вычисление площади, поведение площади при геометрических преобразованиях, квадрируемость классических фигур, построение неквадрируемых множеств с теми или иными свойствами, полнота и строгая монотонность, мы вовсе не касаемся.

То обстоятельство, что площадь определяется сразу для квадрируемых фигур, делает теорию более компактной, и в этом состоит главное преимущество второго построения перед первым. Преимущества первого построения заключаются в его сравнительной элементарности и в близости к историческому развитию теории площадей и школьному преподаванию.

6.2. Площадь относительно сетки. В этом параграфе мы будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат x, y, оси которой направлены по двум соседним сторонам единичного квадрата E. Точки квадрата E характеризуются, таким образом, неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Пусть n — неотрицательное целое число. Рассмотрим горизонтальные и вертикальные прямые, определяемые уравнениями

$$x = k \cdot 10^{-n}, \quad y = l \cdot 10^{-n}, \tag{1}$$

где k и l — всевозможные целые числа. Эти прямые образуют сетку, подобную той, которую мы видим на миллиметровой бумаге. Они разбивают плоскость на равные квадраты со стороной 10^{-n}, называемые *квадратами ранга* n. Чем больше n, тем гуще сетка и тем мельче квадраты.

Пусть M — ограниченное множество, лежащее на плоскости. Обозначим через α_n число квадратов ранга n, целиком входящих в множество M (под квадратом мы понимаем, как всегда, замкнутый квадрат), и через α'_n — число квадратов ранга n, задетых множеством M, т. е. имеющих с M хотя бы одну общую точку (из ограниченности множества M следует, что тех и других квадратов конечное число). Положим:

$$s_n = \alpha_n \cdot 10^{-2n}, \quad s'_n = \alpha'_n \cdot 10^{-2n}. \tag{2}$$

Откуда взялись эти числа? Всякий, знакомый с понятием площади, скажет, что 10^{-2n} есть площадь одного квадрата ранга n и что поэтому s_n есть площадь многоугольной фигуры P_n, составленной из входящих квадратов ранга n, а s'_n — площадь многоугольной фигуры Q_n, составленной из задетых квадратов ранга n (рис. 19). Мы, однако, еще только строим теорию площадей и не можем пользоваться понятием площади. Числа (2) как раз и послужат нам для определения этого понятия.

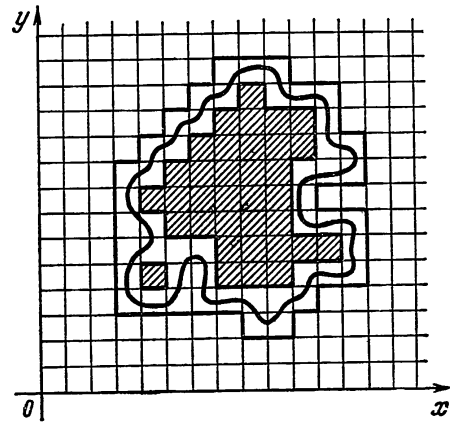


Рис. 19.

Установим, прежде всего, два основных свойства чисел (2).

1. *Последовательность* $s_0, s_1, \ldots$ *возрастает, последовательность* $s'_0, s'_1, \ldots$ *убывает.*

Действительно, всякий квадрат ранга n распадается на 10^2 квадратов ранга $n+1$. Если исходный квадрат — входящий, то и все полученные квадраты будут входящими; если хотя бы один из

полученных квадратов задет, то и исходный квадрат задет. Следовательно, $\alpha_{n+1} \geqslant 10^2 \alpha_n$, $\alpha'_{n+1} \leqslant 10^2 \alpha'_n$, и потому

$$s_{n+1} \geqslant s_n \qquad s'_{n+1} \leqslant s'_n. \tag{3}$$

2. *При любых m и n справедливо неравенство*

$$s_m \leqslant s'_n. \tag{4}$$

Так как всякий входящий квадрат задет, то $\alpha_n \leqslant \alpha'_n$, и потому $s_n \leqslant s'_n$. Таким образом, при $m = n$ неравенство (4) справедливо. Если $m < n$, то $s_m \leqslant s_n \leqslant s'_n$; если же $m > n$, то $s_m \leqslant s'_m \leqslant s'_n$.

Неравенство (4) показывает, что каждый член последовательности $s'_0, s'_1, \ldots$ служит верхней гранью последовательности $s_0, s_1, \ldots$, а каждый член последовательности $s_0, s_1, \ldots$ служит нижней гранью последовательности $s'_0, s'_1, \ldots$ Пусть $\underline{s}$ и $\overline{s}$ — точные грани этих последовательностей: $\underline{s} = \sup s_n$, $\overline{s} = \inf s'_n$. Так как точная верхняя грань есть наименьшая из верхних граней, то $\underline{s} \leqslant s'_n$. Следовательно, $\underline{s}$ — нижняя грань последовательности $s'_0, s'_1, \ldots$ Но точная нижняя грань есть наибольшая из нижних граней, и потому

$$\underline{s} \leqslant \overline{s}. \tag{5}$$

Добавим к этому, что вследствие монотонности последовательностей $s_0, s_1, \ldots$ и $s'_0, s'_1, \ldots$ их точные грани служат их пределами:

$$\underline{s} = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad \overline{s} = \lim_{n\to\infty} s'_n. \tag{6}$$

Если $\underline{s} = \overline{s}$, то M называется *квадрируемым множеством* или *квадрируемой фигурой*, а число $\underline{s} = \overline{s}$ — *площадью* этой фигуры.

Площадь квадрируемой фигуры M будет обозначаться через $s(M)$. Вместо α_n, α'_n, s_n, s'_n, $\underline{s}$, $\overline{s}$ мы будем писать иногда $\alpha_n(M)$, $\alpha'_n(M)$, $s_n(M)$, $s'_n(M)$, $\underline{s}(M)$, $\overline{s}(M)$.

Для того, кто уже владеет понятием площади, неравенства (3) и (4) имеют простой геометрический смысл. Неравенство (4) представляет собой соотношение между площадями многоугольных фигур P_m и Q_n. Оно следует из соотношения $P_m \subset Q_n$, справедливого при любых m и n. Подобным же образом неравенства (3) следуют из соотношений $P_{n+1} \supset P_n$, $Q_{n+1} \subset Q_n$. Так как

$$P_n \subset M \subset Q_n, \tag{7}$$

то площадь квадрируемой фигуры M должна быть заключена между площадями s_n всех многоугольных фигур P_n и площадями s'_n всех

многоугольных фигур Q_n. Определение площади, содержащееся в равенствах $s(M) = \underline{s}(M) = \overline{s}(M)$, означает, что площадь квадрируемой фигуры есть единственное число, обладающее этим свойством.

Пример. M — квадрат ранга m. Как нетрудно подсчитать, при $n \geqslant m$

$$\alpha_n = 10^{2(n-m)}, \quad \alpha_n' = 10^{2(n-m)} + 4(10^{n-m} + 1).$$

Следовательно, $s_n = 10^{-2m}$, $s_n' = 10^{-2m} + 4(10^{-n-m} + 10^{-2n})$, и потому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n' = 10^{-2m}$. Таким образом, *квадрат ранга m* является *квадрируемой фигурой с площадью* 10^{-2m}. В частности, *единичный квадрат E* является *квадрируемой фигурой с площадью* 1.

6.3. Критерий квадрируемости. Определению квадрируемости можно придать другие формы, более близкие к определению п. **4.1**. Прежде всего, согласно соотношению (6), $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n' - s_n) = \overline{s} - \underline{s}$. Следовательно, *множество M квадрируемо в том и только в том случае, если*

$$\lim_{n\to\infty}(s_n' - s_n) = 0. \tag{8}$$

Точный смысл соотношения (8) состоит в том, что для всякого положительного ε существует такое N, что при $n > N$ справедливо неравенство $s_n' - s_n < \varepsilon$. Но последовательность $s_n' - s_n$ убывает, и потому это неравенство, будучи справедливо при некотором значении n, автоматически справедливо и при всяком большем значении n. Следовательно, *множество M квадрируемо в том и только в том случае, если для всякого положительного* ε *существует такое n, что* $s_n' - s_n < \varepsilon$.

Множество M называется *нуль-множеством*, если $\overline{s} = 0$. Так как в этом случае и $\underline{s} = 0$ (см. неравенство (5)), то нуль-множества квадрируемы и имеют нулевую площадь. Обратно, квадрируемое множество нулевой площади есть, очевидно, нуль-множество. Следовательно, *M в том и только в том случае есть нуль-множество, если* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n' = 0$; *M в том и только в том случае есть нуль-множество, если для всякого положительного* ε *существует такое n, что* $s_n' < \varepsilon$.

Критерием квадрируемости мы называем, как и в п. **4.5**, следующую теорему:

Множество M квадрируемо в том и только в том случае, если оно ограничено и его граница M_Γ *есть нуль-множество.*

Доказательство. Предположим, что множество M ограничено и его граница M_Γ есть нуль-множество, и покажем, что

M — квадрируемая фигура. Для этого заметим, что если некоторый квадрат ранга n задет множеством M, но не входит целиком в M, то он задет множеством $M_г$. Если бы это было не так, то он содержал бы по крайней мере одну точку, внутреннюю по отношению к M, и по крайней мере одну точку, внешнюю по отношению к M, и отрезок, соединяющий эти точки, все-таки пересекал бы множество $M_г$ (см. п. **4.4**) в некоторой точке квадрата. Следовательно, число квадратов ранга n, задетых множеством M, но не входящих в M, не превышает числа квадратов ранга n, задетых множеством $M_г$, т. е.

$$\alpha_n'(M) - \alpha_n(M) \leqslant \alpha_n'(M_г), \quad s_n'(M) - s_n(M) \leqslant s_n'(M_г).$$

Так как $M_г$ — нуль-множество, то $s_n'(M_г) \to 0$. Следовательно, $s_n'(M) - s_n(M) \to 0$, и потому M — квадрируемая фигура.

Предположим теперь, что M — квадрируемая фигура, и покажем, что $M_г$ есть нуль-множество. Для этого заметим, что если квадрат ранга n задет множеством $M_г$, то либо он сам, либо один из соседних с ним восьми квадратов задет множеством M, но не входит в M. Если бы это было не так, то каждый из указанных девяти квадратов либо входил бы в M, либо не имел бы с M общих точек; более того, так как наш квадрат имеет с соседними квадратами общие точки, то либо все девять квадратов входили бы в M, либо ни один из девяти не имел бы с M общих точек. Но каждая точка нашего квадрата может быть окружена кругом, целиком покрытым этими девятью квадратами и потому либо входящим в M, либо не имеющим с M общих точек (например, кругом радиуса 10^{-n}). Следовательно, все точки нашего квадрата были бы либо внутренними, либо внешними по отношению к M и наш квадрат не был бы задет множеством $M_г$.

Так как число квадратов ранга n, задетых множеством M, но не входящих в M, равно $\alpha_n'(M) - \alpha_n(M)$, то общее число этих квадратов и всех соседних с ними квадратов не превышает $9(\alpha_n'(M) - \alpha_n(M))$. Согласно только что доказанному, среди них находятся все квадраты ранга n, задетые множеством $M_г$. Следовательно,

$$\alpha_n'(M_г) \leqslant 9[\alpha_n'(M) - \alpha_n(M)], \quad s_n'(M_г) \leqslant 9[s_n'(M) - s_n(M)].$$

Так как множество M квадрируемо, то $s_n'(M) - s_n(M) \to 0$. Следовательно, $s_n'(M_г) \to 0$, и потому $M_г$ есть нуль-множество.

6.4. Операции над квадрируемыми фигурами. *Часть нуль-множества есть нуль-множество. Сумма конечного числа нуль-множеств есть нуль-множество. Множество, равное нуль-множеству, есть нуль-множество.*

Справедливость первого утверждения очевидна. Докажем справедливость второго. Достаточно рассмотреть случай двух множеств. Пусть M и N — нуль-множества. Так как каждый квадрат ранга n, задетый множеством $M+N$, задет по крайней мере одним из множеств M, N, то

$$\alpha'_n(M+N) \leqslant \alpha'_n(M) + \alpha'_n(N), \quad s'_n(M+N) \leqslant s'_n(M) + s'_n(N).$$

Так как M и N—нуль-множества, то $s'_n(M) \longrightarrow 0$ и $s'_n(N) \longrightarrow 0$. Следовательно, $s'_n(M+N) \longrightarrow 0$, и потому $M+N$ есть нуль-множество.

Пусть теперь M — нуль-множество, N — равное ему множество. Покажем, что N есть нуль-множество. Движение, переводящее множество M в N, переводит квадраты ранга n, задетые множеством M, в какие-то квадраты, покрывающие множество N. Каждый из этих новых квадратов задевает не более девяти квадратов нашей сетки. Действительно, расстояние от любой его точки до его центра меньше 10^{-n}, вследствие чего он может иметь общие точки только с квадратом сетки, содержащим его центр, и с восемью соседними квадратами сетки. Так как число новых квадратов равно $\alpha'_n(M)$, то общее число квадратов сетки, задетых новыми квадратами, не превышает $9\alpha'_n(M)$. Следовательно, и число квадратов сетки, задетых множеством N, не превышает $9\alpha'_n(M)$, т. е. $\alpha'_n(N) \leqslant 9\alpha'_n(M)$, $s'_n(N) \leqslant 9s'_n(M)$. Так как M — нуль-множество, то $s'_n(M) \longrightarrow 0$. Следовательно, $s'_n(N) \longrightarrow 0$, и потому N есть нуль-множество.

Сумма и пересечение конечного числа квадрируемых фигур являются квадрируемыми фигурами. Разность двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура. Множество, равное квадрируемой фигуре, есть квадрируемая фигура.

Теорему о сумме и пересечении достаточно доказать для случая двух фигур. Пусть M и N — квадрируемые фигуры. Покажем, что фигуры $M+N$, MN и $M-N$ квадрируемы. Согласно нашему критерию квадрируемости, мы должны доказать, что если $M_г$ и $N_г$ — нуль-множества, то $(M+N)_г$, $(MN)_г$ и $(M-N)_г$ — также нуль-множества. Но это сразу следует из соотношений

$$(M+N)_г \subset M_г + N_г, \quad (MN)_г \subset M_г + N_г, \quad (M-N)_г \subset M_г + N_г$$

(см. п. **2.1**) и только что установленных свойств нуль-множеств.

Пусть, наконец, M — квадрируемая фигура и N — равное ей множество. Из квадрируемости фигуры M следует, что $M_г$ есть нуль-множество. Следовательно, и равное ему множество $N_г$ есть нуль-множество, и потому N — квадрируемая фигура.

6.5. Основные свойства площади. (α) *Площадь квадрируемой фигуры есть неотрицательное число.* (β) *Площадь суммы конеч-*

ного числа квадрируемых фигур, попарно не имеющих общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур. (γ) *Равные квадрируемые фигуры имеют равные площади.* (δ) *Площадь единичного квадрата равна* 1.

Предложение (α) очевидно. Предложение (δ) было доказано в п. **6.2.** Докажем предложение (β). Пусть $M_1, \ldots, M_p$—квадрируемые множества, попарно не имеющие общих внутренних точек. Никакой квадрат ранга n не может входить сразу в два множества M_i и M_j (иначе центр квадрата был бы общей внутренней точкой этих множеств), и всякий квадрат ранга n, входящий в одно из множеств $M_1, \ldots, M_p$, входит в их сумму. Следовательно,

$$\alpha_n(M_1) + \ldots + \alpha_n(M_p) \leqslant \alpha_n(M_1 + \ldots + M_p). \tag{9}$$

Если квадрат ранга n задет множеством $M_1 + \ldots + M_p$, то он задет по крайней мере одним из множеств $M_1, \ldots, M_p$. Следовательно,

$$\alpha'_n(M_1) + \ldots + \alpha'_n(M_p) \geqslant \alpha'_n(M_1 + \ldots + M_p). \tag{10}$$

После умножения на 10^{-2n} неравенства (9) и (10) дают:

$$\sum_{i=1}^{p} s_n(M_i) \leqslant s_n\left(\sum_{i=1}^{p} M_i\right) \leqslant s'_n\left(\sum_{i=1}^{p} M_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} s'_n(M_i).$$

При $n \to \infty$ крайние члены последнего неравенства имеют предел, равный $s(M_1) + \ldots + s(M_p)$, а средние члены—предел, равный $s(M_1 + \ldots + M_p)$. Следовательно, $s(M_1 + \ldots + M_p) = s(M_1) + \ldots + s(M_p)$.

Наиболее глубоким является предложение (γ). Его полное доказательство мы отложим до п. **6.7.** Здесь мы установим лишь следующий частный случай этого предложения:

(γ′) *Квадрируемые фигуры, получающиеся друг из друга параллельным переносом, имеют равные площади.*

Пусть M, N—эти фигуры и ξ, η—координаты вектора переноса, переводящего фигуру M в N. Возьмем произвольное натуральное число n, заменим ξ и η конечными десятичными дробями ξ' и η', содержащими n знаков после запятой и отличающимися от ξ и η меньше чем на 10^{-n}, и разложим наш перенос на два переноса: перенос I, производимый вектором с координатами ξ', η', и перенос II, производимый вектором с координатами $\xi - \xi'$, $\eta - \eta'$. Перенос I переводит фигуру M в некоторую квадрируемую фигуру N', перенос II переводит фигуру N' в N. Так как $|\xi - \xi'| < 10^{-n}$, $|\eta - \eta'| < 10^{-n}$, то при переносе II всякий квадрат ранга n переходит в квадрат, имеющий со своим исходным положением общие точки. Следовательно, всякий квадрат ранга n, содержащийся целиком в множестве N, задет множеством N'. Так как число квадратов ранга n, входящих в N, но не вхо-

дящих в N', равно $\alpha_n(N)-\alpha_n(NN')$, а число квадратов, задетых множеством N', но не входящих в N', равно $\alpha_n'(N')-\alpha_n(N')$, то отсюда следует, что

$$\alpha_n(N)-\alpha_n(NN')\leqslant\alpha_n'(N')-\alpha_n(N'). \tag{11}$$

Подобным же образом

$$\alpha_n(N')-\alpha_n(NN')\leqslant\alpha_n'(N)-\alpha_n(N). \tag{12}$$

Абсолютная величина разности левых частей неравенств (11) и (12) не превосходит суммы левых, а потому и суммы правых частей этих неравенств. Следовательно,

$$|\alpha_n(N)-\alpha_n(N')|\leqslant[\alpha_n'(N')-\alpha_n(N')]+[\alpha_n'(N)-\alpha_n(N)]. \tag{13}$$

Так как числа ξ', η' имеют вид $\xi'=i\cdot10^{-n}$, $\eta'=j\cdot10^{-n}$, где i, j — целые числа, то сдвиг I переводит прямые вида (1) друг в друга, не меняя образованной ими сети. Следовательно, $\alpha_n(N')=\alpha_n(M)$, $\alpha_n'(N')=\alpha_n'(M)$. Вставляя эти значения в неравенство (13) и умножая обе его части на 10^{-2n}, получим: $|s_n(N)-s_n(M)|\leqslant[s_n'(M)-s_n(M)]+[s_n'(N)-s_n(N)]$. При $n\to\infty$ левая часть последнего неравенства имеет предел $|s(N)-s(M)|$, правая часть — предел 0. Следовательно, $|s(N)-s(M)|=0$ и $s(N)=s(M)$.

Площадь обладает свойством монотонности: если множества M и N квадрируемы и $N\subset M$, то $s(N)\leqslant s(M)$.

Это сразу следует из очевидного неравенства $\alpha_n(N)\leqslant\alpha_n(M)$ и определения площади. Важно, однако, подчеркнуть, что *монотонность площади является следствием свойств* (α) *и* (β). Действительно, положим $N'=M-N$. Это — квадрируемая фигура, не имеющая общих точек с N, и $M=N+N'$. Следовательно, $s(M)=s(N)+s(N')\geqslant s(N)$.

6.6. Теорема единственности. *Площадь — единственная функция, определенная на классе квадрируемых фигур и обладающая свойствами* (α), (β), (γ), (δ).

Мы докажем более сильное утверждение:

Площадь — единственная функция, определенная на классе квадрируемых фигур и обладающая свойствами (α), (β), (γ′), (δ).

Пусть σ — другая такая функция. Единичный квадрат E распадается на 10^{2n} квадратов ранга n, которые квадрируемы (см. п. **6.2**), попарно не имеют общих внутренних точек и получаются друг из друга параллельными сдвигами. Обозначая эти квадраты через $E_1, \ldots, E_{10^{2n}}$, мы можем написать на основании свойств (β), (γ′), (δ):

$$\sum_{i=1}^{10^{2n}}\sigma(E_i)=\sigma(E),\ \sigma(E_1)=\sigma(E_2)=\ldots=\sigma(E_{10^{2n}}),\ \sigma(E)=1.$$

Из этих соотношений следует: $10^{2n}\sigma(E_1)=1$, $\sigma(E_1)=10^{-2n}$.

Пусть теперь M — произвольная квадрируемая фигура и P_n, Q_n — многоугольные фигуры, определенные в п. **6.2.** Так как квадраты ранга n квадрируемы, то P_n и Q_n также квадрируемы (п. **6.4**) и, согласно свойствам (β) и (γ′),

$$\sigma(P_n) = \alpha_n \cdot 10^{-2n} = s_n(M), \qquad \sigma(Q_n) = \alpha_n' \cdot 10^{-2n} = s_n'(M).$$

В силу монотонности функции σ (которая является следствием свойств (α) и (β), (см. п. **6.5**) и соотношения (7), мы имеем:

$$s_n(M) = \sigma(P_n) \leqslant \sigma(M) \leqslant \sigma(Q_n) = s_n'(M).$$

При $n \longrightarrow \infty$ крайние члены этого неравенства имеют общий предел $s(M)$. Следовательно, $\sigma(M) = s(M)$.

6.7. Инвариантность площади. Докажем, что площадь обладает свойством (γ). Параллельные переносы были рассмотрены в п. **6.5.** Остается рассмотреть повороты вокруг начала координат.

Пусть U — такой поворот. Мы должны доказать, что для всякой квадрируемой фигуры M справедливо соотношение $s(UM) = s(M)$. Рассмотрим на классе квадрируемых фигур функцию

$$\sigma(M) = \frac{s(UM)}{s(UE)}. \tag{14}$$

Если бы квадрат UE был нуль-множеством, то равный ему квадрат E тоже был бы нуль-множеством (см. п. **6.4**), тогда как $s(E) = 1$. Следовательно, $s(UE) \neq 0$ и формула (14) имеет смысл. Непосредственная проверка показывает, что функция σ обладает свойствами (α), (β), (γ′), (δ). Согласно теореме единственности (п. **6.6**), отсюда следует, что $\sigma = s$, т. е. что $s(UM) = s(UE)\, s(M)$.

Таким образом, в результате поворота U площади всех квадрируемых фигур умножаются на одно и то же число $q = s(UE)$. В результате n раз повторенного поворота U они умножатся, следовательно, на q^n. В частности, единичный квадрат E перейдет в квадрат с площадью q^n. Если $q > 1$, то эта площадь неограниченно возрастает вместе с n, тогда как единичный квадрат, сколько бы он ни вращался вокруг начала координат, остается частью квадрата $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 2$, площадь которого равна 16. Следовательно, предположение $q > 1$ отпадает. Если $q < 1$, то $q^{-1} > 1$, и мы приходим к тому же противоречию, заменяя поворот U обратным поворотом. Следовательно, $q = 1$ и $s(UM) = s(M)$.

6.8. Эквивалентность двух определений площади. *Класс квадрируемых фигур, определенный в этом параграфе, совпадает с классом квадрируемых фигур, определенным в* § 4. *Площадь, определенная в этом параграфе, совпадает с площадью, определенной в* § 5.

В силу теоремы единственности, достаточно доказать первое из этих утверждений.

Покажем сначала, что всякая многоугольная фигура квадрируема в смысле п. **6.2** и что на классе многоугольных фигур площадь, определенная в п. **6.2**, совпадает с площадью, определенной в § 3.

Очевидно, что всякий отрезок, лежащий на оси абсцисс, есть нуль-множество в смысле п. **6.3**. Согласно п. **6.4**, отсюда следует, что всякий вообще отрезок является нуль-множеством. Но граница многоугольной фигуры состоит из конечного числа отрезков. Следовательно (см. п. **6.4**), граница многоугольной фигуры есть нуль-множество, и потому (п. **6.3**) всякая многоугольная фигура квадрируема в смысле п. **6.2**. Совпадение наших площадей на классе многоугольных фигур следует из теоремы единственности (п. **3.7**).

Покажем теперь, что класс нуль-множеств, определенный в п. **6.3**, совпадает с классом нуль-множеств, определенным в п. **4.3**. Если M — нуль-множество в смысле п. **6.3** и ε — положительное число, то существует такое n, что $s'_n(M) < \varepsilon$. Рассмотрим многоугольную фигуру Q_n, определенную в п. **6.2**. Мы имеем: $M \subset Q_n$, $s(Q_n) = s'_n(M) < \varepsilon$. Следовательно, M есть нуль-множество в смысле п. **4.3**. Обратно, если M — нуль-множество в смысле п. **4.3** и ε — положительное число, то существует такая многоугольная фигура R, что $M \subset R$ и $s(R) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как фигура R квадрируема в смысле п. **6.2**, то существует такое n, что $s'_n(R) - s(R) < \frac{\varepsilon}{2}$. Из этих неравенств следует, что $s'_n(R) < \varepsilon$. Так как $M \subset R$, то и $s'_n(M) < \varepsilon$. Следовательно, M есть нуль-множество в смысле п. **6.3**.

Согласно критерию квадрируемости, изложенному в п. **6.3**, класс квадрируемых фигур, определенный в п. **6.2**, совпадает с классом квадрируемых фигур, определенным в п. **4.1**.

§ 7. Объем

7.1. Введение. Теория объемов строится в основном так же, как теория площадей. Сначала объем аксиоматически определяется и изучается на классе многогранных тел, затем вводится класс кубируемых тел и, наконец, объем аксиоматически определяется и изучается на классе кубируемых тел. Аксиомы — такие же, как на плоскости. Имеется и второе построение теории, основанное на конструктивном определении объема.

Не только общий план, но и многие детали изложения повторяют теорию площадей. Это позволяет произвести значительные сокращения. Там, где повторение является дословным или почти дословным, мы ограничиваемся перечислением основных фактов. Менее очевидные изменения и новые факты излагаются подробно.

С наиболее существенным отличием теории объемов многогранных тел от теории площадей многоугольных фигур мы встречаемся

тогда, когда приступаем к вычислению объема тетраэдра. Напомним, что при вычислении площади на классе многоугольных фигур нам только один раз, а именно при вычислении площади прямоугольника, приходится пользоваться оценками, т. е. аксиомой (α). Все дальнейшие вычисления основываются уже только на формуле для площади прямоугольника и аксиомах (β) и (γ). При вычислении объема на классе многогранных тел оценками и, значит, аксиомой (α) приходится пользоваться дважды: при вычислении объема прямоугольного параллелепипеда и при вычислении объема тетраэдра. Тот факт, что объем тетраэдра не удается вычислить без новых оценок, делает всю теорию существенно менее элементарной и по этой причине давно привлекал внимание математиков. После многочисленных исследований выяснилось, что получить формулу для объема тетраэдра из формулы для объема прямоугольного параллелепипеда с помощью одних только аксиом (β) и (γ) принципиально невозможно. Более того, *на классе многогранных тел существует бесчисленное множество функций со свойствами* (β) *и* (γ), *совпадающих с объемом на классе прямоугольных параллелепипедов*. К сожалению, доказательство этой теоремы не просто и не может быть здесь изложено.

Более элементарное классическое объяснение того, что объем тетраэдра не удается вычислить такими же простыми средствами, как площадь треугольника, связано с понятием *равносоставленности*. Две фигуры называются *равновеликими*, если они имеют одну и ту же площадь, и *равносоставленными*, если их можно разбить на конечное число попарно равных треугольников. Два тела называются равновеликими, если они имеют один и тот же объем, и равносоставленными, если их можно разбить на конечное число попарно равных тетраэдров. В силу аксиом (β) и (γ) из равносоставленности следует равновеликость, и сравнительно нетрудно доказать, что равновеликие многоугольные фигуры равносоставлены. Оказывается, однако, что уже правильный тетраэдр не равносоставлен ни с каким прямоугольным параллелепипедом [1]). Конечно, это объяснение далеко не исчерпывает вопроса.

За пределами класса многогранных тел мы занимаемся проблемой вычисления объема только в самых простых частных случаях (цилиндры, конусы, тела вращения). Более полное рассмотрение этой проблемы потребовало бы привлечения кратных интегралов.

7.2. Класс многогранных тел (ср. § 2). *Внутренние*, *внешние* и *граничные* точки определяются в пространстве так же, как на плоскости, только слово «круг» заменяется словом «шар». Поэтому для

---

[1]) Доказательства вместе с подробным рассмотрением этого круга вопросов читатель найдет в статье «Равносоставленность многоугольников и многогранников» в этой книге ЭЭМ. (*Прим. ред.*)

пространства справедливо все, что было сказано в пп. **2.1** и **2.2** о *внутренней части*, *границе* и *замыкании* множества, об *открытых* и *замкнутых множествах* и *замкнутых областях*. Множество называется *ограниченным*, если его можно заключить в шар.

Выпуклым многогранником называется пересечение конечного числа полупространств при условии, что это пересечение ограничено и не лежит в одной плоскости. Пересечение выпуклого многогранника с полупространством или другим выпуклым многогранником есть либо выпуклый многогранник, либо выпуклый многоугольник, либо отрезок, либо точка, либо пустое множество.

Простейшими выпуклыми многогранниками являются *тетраэдры*. Пусть A, B, C, D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Обозначим через Π_A, Π_B, Π_C, Π_D полупространства с граничными плоскостями BCD, CDA, DAB, ABC, содержащие соответственно точки A, B, C, D.

Тетраэдр с вершинами A, B, C, D может быть определен как пересечение полупространств Π_A, Π_B, Π_C, Π_D. Это — ограниченная замкнутая область, граница которой состоит из треугольников BCD, CDA, DAB, ABC.

Многогранным телом называется множество точек пространства, которое можно разложить на конечное число тетраэдров без общих внутренних точек. Всякий выпуклый многогранник является многогранным телом. Всякое многогранное тело является ограниченной замкнутой областью.

Разложение многогранного тела на тетраэдры без общих внутренних точек кратко называется *разбиением*. Разбиение называется *правильным*, если пересечение любых двух его тетраэдров есть либо их общая грань, либо их общее ребро, либо их общая вершина, либо пустое множество (рис. 20). При правильном разбиении треугольники, служащие гранями тетраэдров разбиения, могут быть двух типов. Треугольник первого типа служит гранью только одного тетраэдра разбиения. Треугольник второго типа лежит (возможно, за исключением своих сторон) во внутренней части многогранного тела.

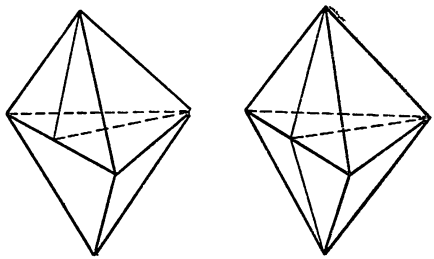


Рис. 20. Неправильное разбиение и его правильное измельчение.

Одно разбиение многогранного тела называется *измельчением* другого, если всякий тетраэдр первого разбиения содержится в некотором тетраэдре второго разбиения (см. рис. 20). Всякие

два разбиения многогранного тела обладают общим измельчением, и всякое разбиение многогранного тела обладает правильным измельчением.

Сумма двух многогранных тел всегда есть многогранное тело, но пересечение и разность двух многогранных тел могут не быть многогранными телами. Формулы $[UV]=((UV)_в)_з$, $[U-V]=(U-V)_з$ определяют *приведенное пересечение* и *приведенную разность* многогранных тел U и V, всегда являющиеся многогранными телами. Как и на плоскости (п. **5.10**), эти операции переносятся на произвольные замкнутые области.

7.3. Определение объема на классе многогранных тел (ср. пп. **3.1** и **3.2**). *Объемом* на классе многогранных тел называется функция, определенная на этом классе и обладающая следующими четырьмя свойствами:

(α) Положительность: *объем тела есть неотрицательное число.*

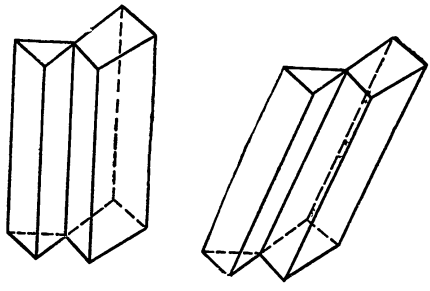
(β) Аддитивность: *объем тела, составленного из нескольких тел без общих внутренних точек, равен сумме объемов этих тел.*

(γ) Инвариантность: *равные тела имеют равные объемы.*

(δ) Нормированность: *объем единичного куба* (т. е. куба, построенного на единичном отрезке) *равен* 1.

Объем будем обозначать буквой v.

Простейшие следствия аксиом. Из аксиом (α) и (β) следует монотонность объема: если многогранное тело V является частью многогранного тела U, то $v(V)\leqslant v(U)$. Из аксиомы (β) следует, что $v(U+V)=v(U)+v(V)-v([UV])$ для любых двух многогранных тел U и V. Из аксиом (α) и (β) следует, что для любых многогранных тел $U_1, \ldots, U_n$ $v(U_1+\ldots+U_n)\leqslant v(U_1)+\ldots+v(U_n)$.



а) *б)*

Рис. 21.

7.4. Вычисление объема на классе многогранных тел (ср. пп. **3.3—3.6**). Призмы. Пусть P — многоугольная фигура и h — положительное число. Проведем через все точки фигуры P прямые, перпендикулярные к ее плоскости, и рассмотрим отрезки этих прямых между этой плоскостью и параллельной ей плоскостью, проходящей от нее на расстоянии h (рис. 21, *а*). Множество всех точек всех этих отрезков называется *прямой призмой* с основанием P и высотой h. Если вместо прямых, перпендикулярных к плоскости фигуры P, взять параллельные между собой прямые, образующие с этой плоскостью положительный угол, меньший

прямого, то получится *наклонная призма* с основанием P и высотой h (рис. 21, *б*). Отрезки, из которых, согласно этому определению, состоит призма, называются ее *образующими*. Призма, основанием которой служит выпуклый многоугольник, например треугольник, является выпуклым многогранником и, следовательно, многогранным телом. В общем случае разбиение фигуры P на треугольники приводит к разбиению призмы с основанием P на выпуклые многогранники и затем на тетраэдры. Следовательно, призма есть многогранное тело. Прямая призма, основанием которой служит прямоугольник, есть прямоугольный параллелепипед.

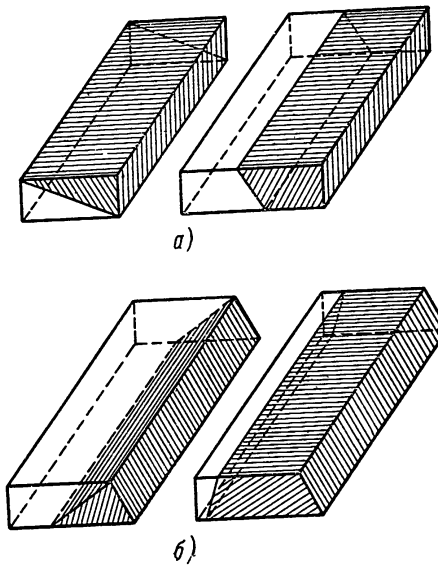


Рис. 22.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство распадается на четыре части.

Прежде всего доказывается, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех ребер, выходящих из одной вершины. Доказательство вполне аналогично рассуждениям п. **3.3**.

Второй шаг — доказательство теоремы для прямой призмы, основанием которой служит треугольник или трапеция. Если один из углов основания является прямым, то основание можно дополнить равной ему фигурой до прямоугольника (ср. п. **3.4**) и, значит, призму можно дополнить равной ей призмой до прямоугольного параллелепипеда (рис. 22, *а*). Объем призмы равен половине объема параллелепипеда (аксиомы (β) и (γ)), площадь основания призмы равна половине площади основания параллелепипеда и высота призмы равна высоте параллелепипеда. Следовательно, из справедливости теоремы для параллелепипеда следует ее справедливость для призмы. Если у основания нет прямого угла, то оно может быть дополнено трапецией с прямым углом до большей трапеции с прямым углом (ср. п. **3.4**) и, значит, призма может быть дополнена призмой только что рассмотренного вида до большей призмы того же вида (рис. 22, *б*). Объем нашей призмы равен разности объемов построенных призм (аксиома (β)), площадь основания нашей призмы равна разности площадей оснований построенных призм, и все три призмы имеют одну и ту же

высоту. Следовательно, объем нашей призмы равен произведению площади основания на высоту.

Третий шаг состоит в очевидном распространении теоремы с прямых треугольных призм на произвольные прямые призмы. Он опирается только на аксиому (β).

Последний шаг — перенесение теоремы с прямых призм на наклонные. Продолжим образующие призмы в одну сторону и пересечем двумя плоскостями, перпендикулярными к образующим и расположенными друг от друга на расстоянии, равном длине образующих (рис. 23). Мы получим прямую призму, отделенную от наклонной призмы некоторым многогранным телом. Если присоединить это тело сначала к прямой призме, а затем к наклонной, то

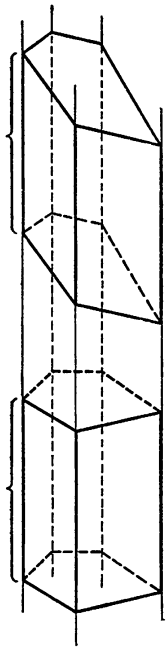


Рис. 23.

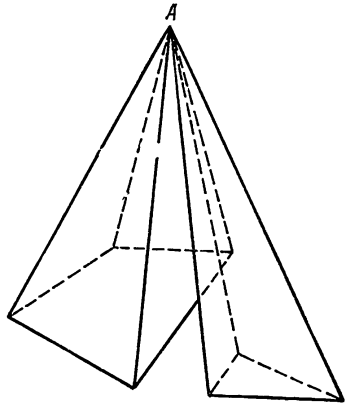


Рис. 24.

получатся равные многогранные тела. Следовательно (аксиомы (β) и (γ)), объем наклонной призмы равен объему прямой призмы, т. е. произведению площади ее основания на ее высоту. Но, согласно п. **3.9**, площадь основания прямой призмы равна площади основания наклонной призмы, умноженной на косинус угла между плоскостями этих оснований, высота же прямой призмы равна высоте наклонной призмы, деленной на косинус того же угла. Следовательно, объем наклонной призмы равен произведению площади ее основания на ее высоту.

Пирамиды. Пусть P — многоугольная фигура и A — точка, не лежащая в ее плоскости. Соединим все точки фигуры P отрезками с точкой A (рис. 24) и рассмотрим множество всех точек всех этих отрезков. Это множество называется *пирамидой* с осно-

ванием P и вершиной A. Пирамида, основанием которой служит треугольник, есть тетраэдр. В общем случае разбиение фигуры P на треугольники приводит к разбиению пирамиды с основанием P на тетраэдры. Следовательно, пирамида есть многогранное тело.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Для доказательства нам потребуется следующая арифметическая лемма: *при всяком натуральном* n

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2<n^3/3,\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2>n^3/3.$$

Доказательство леммы. При $n=1$ неравенства очевидны. При переходе от n к $n+1$ первая сумма возрастает на n^2, вторая — на $(n+1)^2$, а $n^3/3$ возрастает на

$$\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n^3}{3}=n^2+n+\frac{1}{3},$$

что больше n^2, но меньше $(n+1)^2$. Следовательно, неравенства верны при любом n.

Доказательство теоремы. В силу аксиомы (β) достаточно рассмотреть случай тетраэдра. Пусть T — тетраэдр, P — его основание и h — высота. Разделим одно из боковых ребер тетраэдра на n равных частей, проведем через точки деления плоскости, параллельные плоскости основания (рис. 25), и обозначим треугольники, получившиеся в сечениях, через $P_1, \ldots, P_{n-1}$, считая от вершины к основанию. К ним мы присоединим еще треугольник $P_n=P$. Ясно, что каждый из треугольников $P_1, \ldots, P_n$ подобен треугольнику P и что для P_k коэффициент подобия равен $\frac{k}{n}$. Следовательно,

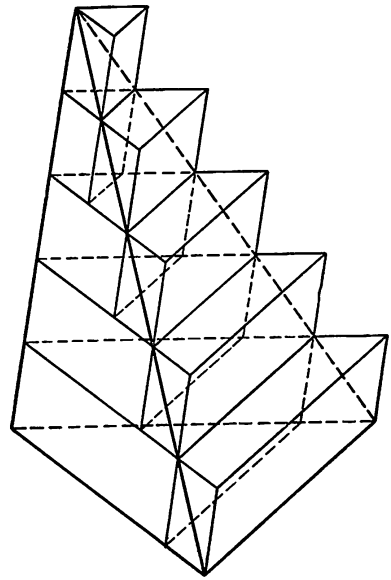


Рис. 25.

$$s(P_k)=s(P)\frac{k^2}{n^2}.$$

Построим для каждого $k=1, \ldots, n$ две призмы с основанием P_k, высотой $\frac{h}{n}$ и образующими, параллельными взятому ребру тетраэдра. Призму, лежащую по ту же сторону от своего основания P_k, что и вершина тетраэдра, обозначим через V_k, вторую призму — через U_k. Согласно предыдущей теореме,

$$v(U_k)=v(V_k)=s(P_k)\frac{h}{n}=s(P)h\frac{k^2}{n^3}.$$

Рассмотрим многогранные тела

$$U=U_1+\ldots+U_{n-1},\ V=V_1+\ldots+V_n.$$

Ясно, что $U\subset T\subset V$. Следовательно,

$$v(U)\leqslant v(T)\leqslant v(V). \tag{1}$$

С другой стороны, в силу аксиомы (β),

$$v(U)=\sum_{k=1}^{n-1} v(U_k)=\sum_{k=1}^{n-1} s(P)\,h\,\frac{k^2}{n^3}=s(P)\,h\,\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2,$$

$$v(V)=\sum_{k=1}^{n} v(V_k)=\sum_{k=1}^{n} s(P)\,h\,\frac{k^2}{n^3}=s(P)\,h\,\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

и потому, согласно лемме,

$$v(U)\leqslant\frac{1}{3}s(P)\,h\leqslant v(V). \tag{2}$$

Наконец,

$$v(V)-v(U)=\frac{1}{n}s(P)\,h. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следует: $\left|v(T)-\frac{1}{3}s(P)\,h\right|\leqslant\frac{1}{n}s(P)\,h$. Так как n произвольно, то $v(T)=\frac{1}{3}s(P)\,h$.

Объем произвольного многогранного тела. *Объем многогранного тела T, разбитого на тетраэдры T_1, ..., T_n без общих внутренних точек, дается формулой*

$$v(T)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s(P_i)\,h_i, \tag{4}$$

где P_i — основание тетраэдра T_i и h_i — его высота.

Это вытекает из предыдущей теоремы и аксиомы (β).

Следствие: строгая монотонность объема. *Если многогранное тело V есть часть многогранного тела U, отличная от U, то $v(V)<v(U)$.* В частности, *пустое множество есть единственное многогранное тело, объем которого равен нулю.*

Второе утверждение является прямым следствием формулы (4), доказательство первого повторяет рассуждение п. **3.6**.

7.5. Существование и единственность объема на классе многогранных тел (ср. п. **3.7**). *На классе многогранных тел существует одна и только одна функция со свойствами* (α)—(δ).

Доказательство единственности дословно повторяет п. **3.7** с заменой формулы (6) п. **3.5** только что доказанной формулой (4). Доказательство существования также повторяет п. **3.7**, но с некоторыми усложнениями.

Лемма 1 теперь утверждает, что произведение площади грани тетраэдра на соответствующую высоту одинаково для всех четырех граней. Для доказательства опустим из вершин A и D тетраэдра $ABCD$ перпендикуляры AA' и DD' на плоскости BCD и ABC и перпендикуляры AA'' и DD'' на прямую BC (рис. 26). Нужно проверить, что

$$\frac{1}{2}\rho(B, C)\rho(A, A'')\rho(D, D') = \frac{1}{2}\rho(B, C)\rho(D, D'')\rho(A, A'),$$

т. е. что

$$\rho(A, A''):\rho(A, A') = \rho(D, D''):\rho(D, D'),$$

а это следует из подобия треугольников $AA'A''$ и $DD'D''$.

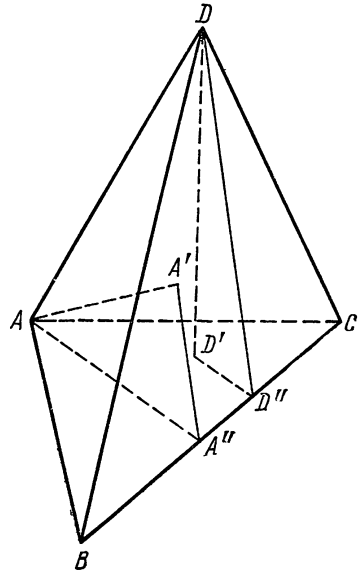


Рис. 26.

Символы (ABC) и $(AB|C)$, введенные в п. **3.7**, теперь заменяются символами $(ABCD)$ и $(ABC|D)$, которые определяются следующим образом. Предположим, что в пространстве фиксирована некоторая точка O. Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то $(ABCD)$ обозначает одну треть произведения площади треугольника ABC на длину перпендикуляра, опущенного из точки D на плоскость ABC. Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то $(ABCD)=0$, а символ $(ABC|D)$ не определен. Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости и точки D и O лежат по одну сторону от плоскости ABC, то $(ABC|D)=(ABCO)$. Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости и точки D и O не лежат по одну сторону от плоскости ABC, то $(ABC|D)=-(ABCO)$.

Лемма 2 теперь утверждает, что для всякого тетраэдра $ABCD$, не содержащего точки O,

$$(ABCD)=(BCD|A)+(CDA|B)+(DAB|C)+(ABC|D). \qquad (5)$$

Для доказательства рассмотрим полупространства Π_A, Π_B, Π_C, Π_D, определенные в п. **7.2**. Плоскости граней тетраэдра делят пространство на 16 частей:

$$\Pi_A\Pi_B\Pi_C\Pi_D,\ \Pi_A\Pi_B\Pi_C(\text{доп. }\Pi_D),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (\text{доп. }\Pi_A)(\text{доп. }\Pi_B)(\text{доп. }\Pi_C)(\text{доп. }\Pi_D),$$

первая из которых есть тетраэдр $ABCD$, а последняя пуста. Остальные 14 пересечений распадаются на три группы однотипных пересечений: пересечения трех полупространств с дополнением

к четвертому, пересечения двух полупространств с дополнениями к двум другим и пересечения одного полупространства с дополнениями к трем другим. Таким образом, достаточно рассмотреть три случая: $O \in \Pi_A \Pi_B \Pi_C$ (доп. Π_D), $O \in \Pi_A \Pi_B$ (доп. Π_C) (доп. Π_D) и $O \in$ (доп. Π_A) (доп. Π_B) (доп. Π_C) Π_D (рис. 27). В первом и третьем случаях прямая OD пересекает грань ABC во внутренней точке D', во втором случае плоскость OCD пересекает ребро AB во внутренней точке E. В каждом из трех случаев вся конфигурация распадается на шесть частичных тетраэдров, и каждый из пяти

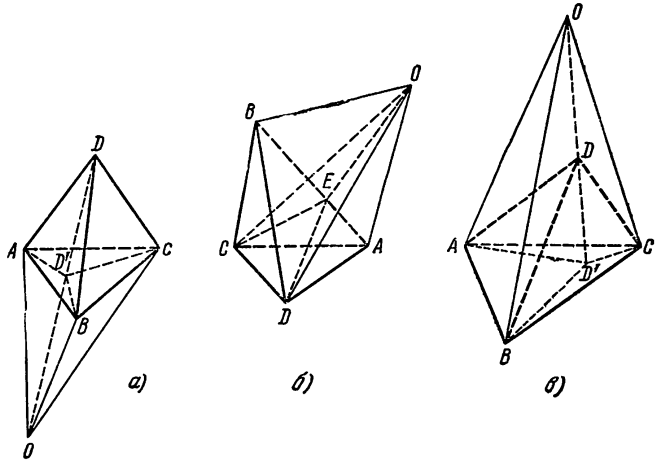


Рис. 27.

символов, входящих в формулу (5), оказывается комбинацией символов, относящихся к этим частичным тетраэдрам. В первом случае

$$(ABCD) = (ABD'D) + (BCD'D) + (CAD'D),$$
$$(BCD \mid A) = (BCDO) = (BCD'D) + (BCD'O),$$
$$(CDA \mid B) = (CDAO) = (CAD'D) + (CAD'O),$$
$$(DAB \mid C) = (DABO) = (ABD'D) + (ABD'O),$$
$$(ABC \mid D) = -(ABCO) = -(ABD'O) - (BCD'O) - (CAD'O),$$

откуда и следует (5). Аналогично проводятся вычисления во втором и третьем случаях.

Лемма 3 теперь утверждает, что при всех разбиениях многогранного тела на тетраэдры сумма символов $(ABCD)$, отнесенных к этим тетраэдрам, принимает одно и то же значение. Доказательство опирается на существование у двух разбиений многогранного тела общего правильного измельчения и проводится так же, как доказательство леммы 3 в п. **3.7.**

В силу леммы 3, указанная сумма символов $(ABCD)$ является функцией, определенной на классе многогранных тел. Очевидно, что она обладает свойствами (α)—(δ).

7.6. Поведение объема многогранного тела при геометрических преобразованиях (ср. пп. **3.8** и **3.10**). Преобразование подобия. *Преобразование подобия переводит многогранное тело в многогранное тело. Если T' — образ многогранного тела T при преобразовании подобия с коэффициентом λ, то $v(T')=\lambda^3 v(T)$.*

Доказательство — такое же, как в п. **3.8**.

Аффинные преобразования. *Аффинное преобразование переводит многогранное тело в многогранное тело. Если T' — образ многогранного тела T при аффинном преобразовании с определителем Δ, то $v(T')=v(T)\cdot|\Delta|$.*

Как и в п. **3.10**, доказательство опирается на две леммы.

Лемма 1 утверждает, что если аффинное преобразование с определителем Δ переводит точки

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3), \quad (x_4, y_4, z_4) \tag{6}$$

в точки (x_1', y_1', z_1'), (x_2', y_2', z_2'), (x_3', y_3', z_3'), (x_4', y_4', z_4'), то

$$\begin{vmatrix} x_2'-x_1' & y_2'-y_1' & z_2'-z_1' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' & z_3'-z_1' \\ x_4'-x_1' & y_4'-y_1' & z_4'-z_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \Delta.$$

Лемма 2 утверждает, что если T — тетраэдр с вершинами (6), то

$$v(T) = \text{абс. вел. } \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

Как и в п. **3.10**, лемма 1 доказывается прямым вычислением, а лемма 2 — с помощью специального выбора координатной системы (ось абсцисс параллельна прямой, проходящей через две первые вершины тетраэдра, а плоскость x, y параллельна плоскости, проходящей через три первые вершины тетраэдра).

7.7. Класс кубируемых тел (ср. § 4). Множество M, лежащее в пространстве, называется *кубируемым множеством* или *кубируемым телом*, если для всякого положительного ε существуют такие многогранные тела U и V, что $U\subset M\subset V$, $v(V)-v(U)<\varepsilon$.

Всякое многогранное тело кубируемо.

Нуль-множества. Если для всякого положительного ε существует такое многогранное тело T, что $M\subset T$, $v(T)<\varepsilon$, то M называется *нуль-множеством*.

Всякое нуль-множество кубируемо. Кубируемое тело в том и только в том случае есть нуль-множество, если оно не содержит внутренних точек.

Сумма конечного числа нуль-множеств есть нуль-множество. Часть нуль-множества есть нуль-множество.

Критерий кубируемости. *Множество кубируемо в том и только в том случае, если оно ограничено и его граница является нуль-множеством.*

Операции над кубируемыми телами. Сумма и пересечение конечного числа кубируемых тел кубируемы. Разность двух кубируемых тел кубируема.

Проблема кубируемости. Тела, с которыми мы встречаемся в геометрии и классическом анализе, обычно бывают ограничены конечным числом поверхностей, удовлетворяющих определенным условиям гладкости. Такие поверхности являются нуль-множествами, и потому «классические» тела кубируемы. Поверхность, не удовлетворяющая условиям гладкости, может не быть нуль-множеством, и в соответствии с этим существуют тела, ограниченные поверхностями, но не кубируемые. Положение здесь таково же, как на плоскости (ср. пп. **4.7**, **4.8** и **4.10**), но детали менее элементарны, и мы не будем ими заниматься.

7.8. Объем на классе кубируемых тел (ср. § 5). *Объемом* называется функция, определенная на классе кубируемых тел и обладающая свойствами (α)—(δ) (п. **7.3**). Такая функция определена, в частности, на классе многогранных тел и совпадает там с функцией v, изучавшейся в пп. **7.3**—**7.6**. Новую функцию мы также будем обозначать через v.

Простейшие следствия аксиом. Из аксиом (α) и (β) следует монотонность объема: если кубируемое множество N является частью кубируемого множества M, то $v(N) \leqslant v(M)$. Из аксиомы (β) следует, что для любых двух кубируемых множеств M и N

$$v(M+N) = v(M) + v(N) - v(MN).$$

Из аксиом (α) и (β) следует, что для любых кубируемых множеств $M_1, \ldots, M_n$

$$v(M_1 + \ldots + M_n) \leqslant v(M_1) + \ldots + v(M_n).$$

Объем как точная грань. Объем кубируемого тела есть точная верхняя грань объемов входящих многогранных тел и точная нижняя грань объемов объемлющих многогранных тел.

Существование и единственность объема. На классе кубируемых тел существует одна и только одна функция со свойствами (α)—(δ).

Нуль-множества. Класс нуль-множеств совпадает с классом кубируемых множеств нулевого объема.

Из существования таких множеств следует, что на классе кубируемых тел объем не является строго монотонной функцией.

Полнота класса кубируемых тел. Если для множества M при любом положительном ε существуют такие кубируемые тела L и N, что $L \subset M \subset N$, $v(N) - v(L) < \varepsilon$, то M — кубируемое тело.

Поведение объема при преобразовании подобия. Преобразование подобия переводит кубируемое тело в кубируемое тело. Если M' — образ кубируемого тела M при преобразовании подобия с коэффициентом λ, то $v(M') = \lambda^3 v(M)$.

Поведение объема при аффинном преобразовании. Аффинное преобразование переводит кубируемое тело в кубируемое тело. Если M' — образ кубируемого тела M при аффинном преобразовании с определителем Δ, то $v(M') = v(M)|\Delta|$.

Объем на классе кубируемых замкнутых областей. Для всякого кубируемого множества существует кубируемая замкнутая область, отличающаяся от него лишь нуль-множеством. На классе кубируемых замкнутых областей объем является строго монотонной функцией.

7.9. Цилиндры и конусы. Если в определении призмы (п. **7.4**) заменить многоугольную фигуру произвольным плоским множеством, то получится общее определение *цилиндра*. Если в определении пирамиды (п. **7.4**) заменить многоугольную фигуру произвольным плоским множеством, то получится общее определение *конуса*.

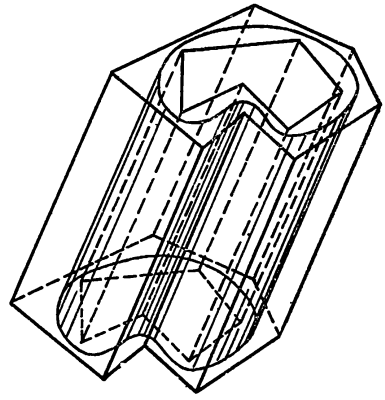


Рис. 28.

Цилиндр с квадрируемым основанием — кубируемое тело. Его объем равен произведению площади основания на высоту.

Конус с квадрируемым основанием — кубируемое тело. Его объем равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство. Пусть Z — цилиндр с основанием F и высотой h и ε — положительное число. Построим такие многоугольные фигуры P и Q, что

$$P \subset F \subset Q, \quad s(Q) - s(P) < \frac{\varepsilon}{h}, \tag{7}$$

и обозначим через U и V призмы с основаниями P и Q, высотой h и образующими, направленными так же, как у Z (рис. 28). Ясно, что

$$U \subset Z \subset V, \tag{8}$$

и так как $v(U) = s(P)h$, $v(V) = s(Q)h$, то $v(V) - v(U) < \varepsilon$. Таким образом, Z — кубируемое тело.

Из включений (7) и (8) следует:

$$v(U) = s(P)\,h \leqslant s(F)\,h \leqslant s(Q)\,h = v(V), \quad v(U) \leqslant v(Z) \leqslant v(V).$$

Поэтому

$$|v(Z) - s(F)\,h| \leqslant v(V) - v(U) < \varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то $v(Z) = s(F)\,h$.

Для конуса доказательство аналогично. В неравенстве (7) достаточно вместо ε/h взять $3\varepsilon/h$. В качестве U и V нужно взять пирамиды с основаниями P и Q и вершинами в вершине конуса (рис. 29).

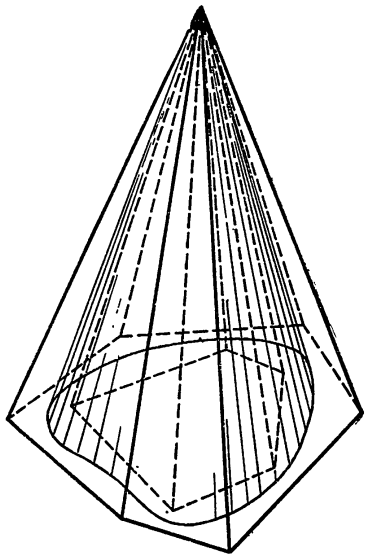


Рис. 29.

7.10. Шар. *Шар — кубируемое тело. Объем шара радиуса r равен* $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Доказательство. Пусть S — полушар радиуса r. Достаточно доказать, что S — кубируемое тело с объемом $2\pi r^3/3$.

Пусть ε — положительное число. Возьмем натуральное число n, большее, чем $\pi r^3/\varepsilon$, и разделим радиус, перпендикулярный к экваториальной плоскости, на n равных частей. Через точки деления проведем плоскости, параллельные экваториальной плоскости (рис. 30), и обозначим круги, получившиеся в сечениях, через $K_1, \ldots, K_{n-1}$, считая от экватора к полюсу. К этим кругам мы присоединим еще экваториальный круг K_0. Так как расстояние плоскости круга K_k от экваториальной плоскости равно kr/n, то

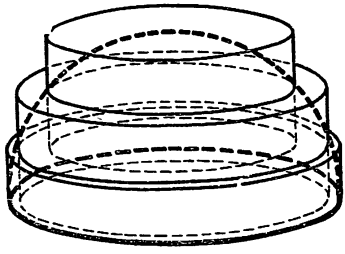


Рис. 30.

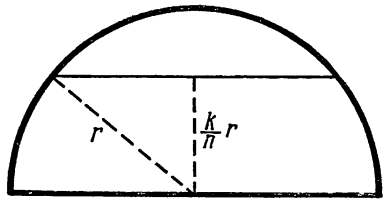


Рис. 31.

квадрат радиуса круга K_k равен $r^2 - \left(\frac{k}{n}r\right)^2$ (рис. 31), и потому $s(K_k) = \pi r^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$.

Построим для каждого $k=0, \ldots, n-1$ два прямых цилиндра с основанием K_k и высотой r/n. Цилиндр, лежащий по ту же сторону от своего основания K_k, что и полюс, обозначим через V_k, второй цилиндр — через U_k. Согласно предыдущему,

$$v(U_k)=v(V_k)=s(K_k)\frac{r}{n}=\frac{\pi r^3}{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right). \tag{9}$$

Рассмотрим ступенчатые тела

$$U=U_1+\ldots+U_{n-1}, \quad V=V_0+\ldots+V_{n-1}.$$

Ясно, что

$$U\subset S\subset V. \tag{10}$$

Согласно п. **7.7**, тела U и V кубируемы, и в силу аксиомы (β)

$$v(U)=\sum_{k=1}^{n-1}v(U_k), \quad v(V)=\sum_{k=0}^{n-1}v(V_k), \tag{11}$$

$$v(V)-v(U)=v(V_0)=\frac{\pi r^3}{n}<\varepsilon. \tag{12}$$

Так как класс кубируемых тел полон (п. **7.8**), то отсюда следует кубируемость тела S.

Те же включения (10) показывают, что

$$v(U)\leqslant v(S)\leqslant v(V). \tag{13}$$

С другой стороны, согласно формулам (11) и (9),

$$v(U)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi r^3}{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)=\pi r^3\left(1-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right),$$

$$v(V)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi r^3}{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)=\pi r^3\left(1-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right),$$

и потому в силу леммы из п. **7.4**

$$v(U)\leqslant 2\pi r^3/3\leqslant v(V). \tag{14}$$

Соотношения (13), (14) и (12) дают: $|v(S)-2\pi r^3/3|<\varepsilon$. Так как ε произвольно, то $v(S)=2\pi r^3/3$.

Следствие. *Эллипсоид — кубируемое тело. Объем эллипсоида с полуосями a, b, c равен* $\frac{4}{3}\pi abc$.

Действительно, аффинное преобразование $x'=ax, y'=by, z'=cz$ переводит шар радиуса 1, определяемый неравенством $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, в эллипсоид с полуосями a, b, c, определяемый неравенством $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$, так что можно воспользоваться теоремой о поведении объема при аффинном преобразовании (п. **7.8**).

7.11*. Тела вращения. Пусть φ—функция, непрерывная и неотрицательная на отрезке $\Delta=[a, b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию, определяемую функцией φ (п. **5.9**), и обозначим через T множество точек пространства, описываемое этой трапецией при вращении вокруг оси x. Множество T называется *телом вращения*, определяемым функцией φ.

Множество T кубируемо, и его объем дается формулой

$$v(T)=\pi\int_a^b[\varphi(x)]^2\,dx. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$—произвольное разбиение отрезка Δ на частичные отрезки и m_i, M_i—наименьшее и наибольшее значения функции φ на отрезке Δ_i $(i=1, \ldots, n)$. Построим, как в п. **5.9**, прямоугольники P_i, Q_i и обозначим через U_i, V_i цилиндры, описываемые этими прямоугольниками при вращении вокруг оси x (рис. 32). Согласно п. **7.9** они кубируемы и $v(U_i)=\pi m_i^2 l(\Delta_i)$, $v(V_i)=\pi M_i^2 l(\Delta_i)$. Следовательно, ступенчатые тела $U=U_1+\ldots+U_n$, $V=V_1+\ldots+V_n$ кубируемы и

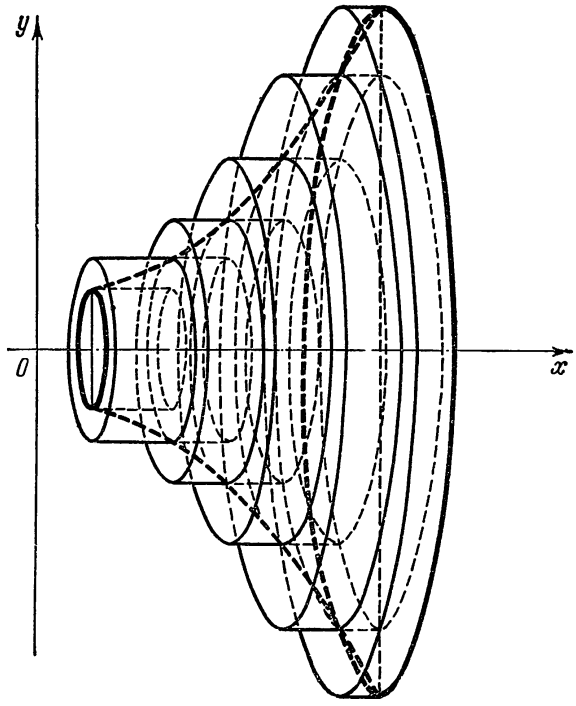


Рис. 32.

$$v(U)=\sum_{i=1}^{n}\pi m_i^2 l(\Delta_i),$$
$$v(V)=\sum_{i=1}^{n}\pi M_i^2 l(\Delta_i). \tag{16}$$

Ясно также, что

$$U\subset T\subset V. \tag{17}$$

Суммы (16) представляют собой не что иное, как нижнюю и верхнюю интегральные суммы функции $\pi\varphi^2$ относительно разбиения $\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$. Согласно лемме из п. **4.7**, для всякого положительного ε существует такое разбиение $\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$, что $v(V)-v(U)<\varepsilon$. Так как класс кубируемых тел полон, то отсюда следует кубируемость тела T.

Те же включения (17) показывают, что $v(U) \leqslant v(T) \leqslant v(V)$, т. е. что $v(T)$ есть верхняя грань нижних интегральных сумм и нижняя грань верхних интегральных сумм. Так как единственным числом, обладающим этим свойством, является интеграл функции $\pi\varphi^2$ по отрезку Δ (ср. п. **5.9**), то этим доказана формула (15).

7.12. Другое построение теории объемов (ср. § 6). Направим оси координат по трем ребрам единичного куба, выходящим из одной вершины, и рассмотрим плоскости, определяемые уравнениями $x = k \cdot 10^{-n}$, $y = l \cdot 10^{-n}$, $z = m \cdot 10^{-n}$, где n—неотрицательное целое число, а k, l, m—всевозможные целые числа. Эти плоскости разбивают пространство на равные кубы, называемые кубами ранга n.

Пусть M—ограниченное множество, лежащее в пространстве. Обозначим через α_n число кубов ранга n, содержащихся в M, и через α'_n число кубов ранга n, пересекающихся с M, и положим: $v_n = \alpha_n \cdot 10^{-3n}$, $v'_n = \alpha'_n \cdot 10^{-3n}$. Последовательность $v_0, v_1, \ldots$ возрастает, последовательность $v'_0, v'_1, \ldots$ убывает, и при любых p и q справедливо неравенство $v_p \leqslant v'_q$. Следовательно, точные грани $\underline{v} = \sup v_n$, $\overline{v} = \inf v'_n$ служат пределами последовательностей $v_0, v_1, \ldots$ и $v'_0, v'_1, \ldots$, и $\underline{v} \leqslant \overline{v}$. Если $\underline{v} = \overline{v}$, то M называется *кубируемым множеством* или *кубируемым телом*, а число $\underline{v} = \overline{v}$ называется *объемом* этого тела и обозначается через $v(M)$.

Дальнейшее построение теории шаг за шагом повторяет § 6: доказывается кубируемость куба ранга n и вычисляется его объем; определяются и изучаются нуль-множества; дается критерий кубируемости; рассматриваются операции над кубируемыми телами; устанавливаются свойства объема; доказывается теорема единственности. При этом, как и в § 6, свойство (γ) устанавливается сначала в ослабленной форме (γ') (кубируемые тела, получающиеся друг из друга параллельным переносом, имеют равные объемы), затем в усиленной форме доказывается теорема единственности и, наконец, свойство (γ) устанавливается полностью. В заключение доказывается, что это второе определение кубируемости и объема эквивалентно первому.

Добавление. Площадь и объем в геометрии подобия

1. Метрическая геометрия и геометрия подобия. Определения площади и объема, изложенные в этой статье, в одном пункте расходятся с представлениями, вынесенными нами из школы: согласно этим определениям, площади и объемы являются числами, тогда как в школе нас учат, что это—особые величины, измеряемые специальными единицами.

Это расхождение, конечно, не означает, что одно из двух представлений ошибочно. Просто мы имеем здесь дело с двумя разными теориями площадей и объемов, и более того, с двумя разными, хотя и близкими геометриями. Эти геометрии имеют специальные названия: одна называется *метрической геометрией* Евклида, другая — евклидовой *геометрией подобия*[1]).

Геометрия подобия — это та, которую мы изучаем в школе и которая излагается во всех учебниках геометрии от Евклида до наших дней. В ней нет метрики, т. е. числовых длин, а есть лишь отношения отрезков и, конечно, все то, что может быть выражено через эти отношения, например углы.

Напротив, в метрической геометрии каждый отрезок имеет определенную числовую длину. Чтобы превратить геометрию подобия в метрическую геометрию, достаточно фиксировать какой-нибудь отрезок и объявить длиной всякого другого отрезка его отношение к выбранному «единичному» отрезку. Нужно только иметь в виду, что в метрической геометрии длины даны раз и навсегда, как точки или прямые. Если мы сменим единичный отрезок и введем новую метрику, т. е. новые длины, то получится новая метрическая геометрия. Она совпадет с прежней лишь в случае, если новые длины совпадут со старыми, т. е. если новый единичный отрезок будет равен старому. Можно, таким образом, сказать, что метрическая геометрия Евклида представляет собой евклидову геометрию подобия, в которой дополнительно фиксирован класс равных отрезков.

Конечно, метрическую геометрию Евклида можно построить и независимо от геометрии подобия. Это делается, например, в курсах линейной алгебры. Там метрика предполагается заданной с самого начала, т. е. включается в аксиоматику.

Метрическая геометрия удобнее геометрии подобия, и в современной научной литературе под «евклидовым пространством» понимают пространство, снабженное метрикой. Однако и геометрия подобия занимает прочные позиции: достаточно сказать, что геометрия физического мира, поскольку она может считаться евклидовой, является не метрической геометрией, а геометрией подобия. Правда, мы пытаемся сделать ее метрической с помощью искусственных «единичных отрезков» вроде парижского метра, однако выбрать такой отрезок «раз и навсегда» по многим причинам невозможно.

Теория площадей и объемов, изложенная в этой статье, есть теория площадей и объемов метрической геометрии. Цель настоящего добавления — указать на те изменения и дополнения, которые должны быть внесены в эту теорию при переходе к геометрии подобия.

---

[1]) Ср. стр. 98 и след. кн. IV ЭЭМ. (*Прим. ред.*)

2. Преобразование площади и объема при замене единичного отрезка. Известно, что если единичный отрезок заменяется другим отрезком, то новая длина $l'(\Delta)$ любого отрезка Δ получается из его старой длины $l(\Delta)$ по формуле

$$l'(\Delta) = a^{-1} l(\Delta), \tag{1}$$

где a — старая длина нового единичного отрезка. Задача этого пункта — выяснить, как ведут себя при замене единичного отрезка площади и объемы. Следующая теорема дает полное решение этого вопроса.

Класс квадрируемых фигур и класс кубируемых тел не зависят от выбора единичного отрезка. Если единичный отрезок заменяется другим, имеющим относительно прежнего длину a, то новая площадь s' и новый объем v' получаются из старой площади s и старого объема v по формулам

$$s'(F) = a^{-2} s(F), \tag{2}$$

$$v'(T) = a^{-3} v(T), \tag{3}$$

где F — произвольная квадрируемая фигура и T — произвольное кубируемое тело.

Доказательство. Мы рассмотрим только площадь. Для объема доказательство аналогично.

Покажем сначала, что соотношение (2) справедливо на классе многоугольных фигур. В силу единственности площади на этом классе достаточно доказать, что функция $a^{-2}s(F)$ удовлетворяет на нем условиям (α), (β), (γ), (δ), последнее из которых отнесено к *новому* единичному отрезку. То, что она удовлетворяет первым трем условиям, очевидно; займемся последним условием. Пусть E' — квадрат, построенный на новом единичном отрезке. Так как относительно старого единичного отрезка его сторона имеет длину a, то $s(E') = a^2$ (см. п. **3.3**). Следовательно, $a^{-2}s(E') = 1$.

Покажем теперь, что всякое множество, квадрируемое относительно старого единичного отрезка, квадрируемо и относительно нового единичного отрезка; поскольку новый и старый отрезки равноправны, этим будет доказано, что класс квадрируемых фигур не зависит от выбора единичного отрезка. Пусть F — множество, квадрируемое относительно старого единичного отрезка, и ε — положительное число. Найдем такие многоугольные фигуры P и Q, что $P \subset F \subset Q$, $s(Q) - s(P) < a^2\varepsilon$. Согласно уже доказанному, $s'(P) = a^{-2}s(P)$, $s'(Q) = a^{-2}s(Q)$, $s'(Q) - s'(P) = a^{-2}[s(Q) - s(P)]$. Следовательно, $s'(Q) - s'(P) < \varepsilon$, и множество F квадрируемо относительно нового единичного отрезка.

Остается доказать, что соотношение (2) справедливо на классе квадрируемых фигур. Это делается опять с помощью теоремы

единственности, с тем упрощением, что соотношение $a^{-2}s(E')=1$ уже было доказано.

Следующие предложения являются очевидными следствиями доказанной теоремы:

Класс нуль-множеств (на плоскости и в пространстве) не зависит от выбора единичного отрезка.

Отношение площадей двух квадрируемых фигур и отношение объемов двух кубируемых тел не зависят от выбора единичного отрезка.

Фигуры или тела, равновеликие относительно одного отрезка, равновелики и относительно другого отрезка.

3. Переход к геометрии подобия. В геометрии подобия нет единичного отрезка и потому нет площади в смысле §§ 1—6. Так как, однако, любой отрезок можно принять за единичный отрезок некоторой метрической геометрии, то каждому отрезку e отвечает своя функция s_e со свойствами (α)—(δ). Согласно п. **2**, все эти функции определены на одном и том же классе квадрируемых фигур. Мы получаем, таким образом, функцию $s_e(F)$ двух аргументов: отрезка e и квадрируемой фигуры F. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы вместо $s_e(F)$ будем писать $s(F, e)$.

Функция $s(F, e)$ и называется *площадью в геометрии подобия*. Если фиксировать фигуру F, то она превратится в функцию отрезка e, называемую *площадью фигуры* F.

Таким образом, *в геометрии подобия, как и в метрической геометрии, имеется класс квадрируемых фигур и имеется площадь, определенная на этом классе, — только площадь фигуры представляет собой не число, а функцию отрезка.*

Сказанное о площади с очевидными изменениями переносится на объем и, конечно, на длину. Объем $v(T, e)=v_e(T)$ есть функция кубируемого тела T и отрезка e, длина $l(\Delta, e)=l_e(\Delta)$ есть функция отрезков Δ и e. Объем тела T и длина отрезка Δ являются функциями отрезка e.

Зависимость длины $l(\Delta, e)$, площади $s(F, e)$ и объема $v(T, e)$ от e была рассмотрена в п.**2**. Из имеющихся там предложений, в частности, следует, что длины $l(\Delta_1, e)$, $l(\Delta_2, e)$ двух любых отрезков Δ_1, Δ_2, площади $s(F_1, e)$, $s(F_2, e)$ двух любых квадрируемых фигур F_1, F_2 и объемы $v(T_1, e)$, $v(T_2, e)$ двух любых кубируемых тел T_1, T_2 отличаются друг от друга лишь постоянными множителями. Формулы (1), (2), (3) представятся теперь в виде

$$l(\Delta, e)=l(\Delta, e')\ l(e', e), \tag{4}$$

$$s(F, e)=s(F, e')\ [l(e', e)]^2, \tag{5}$$

$$v(T, e)=v(T, e')\ [l(e', e)]^3, \tag{6}$$

где e и e' — любые отрезки. Подчеркнем еще, что в геометрии

подобия (на плоскости и в пространстве), как и в метрической геометрии, имеется класс нуль-множеств и имеется отношение равновеликости.

Все вычислительные формулы теории площадей и объемов, начиная с формулы для площади прямоугольника и кончая интегральными формулами, переносятся в геометрию подобия. Действительно, обе части каждой из этих формул могут рассматриваться как функции единичного отрезка, и они равны при любом выборе единичного отрезка. Заметим, что число π, входящее во многие из этих формул, не зависит от выбора единичного отрезка, т. е. является абсолютной постоянной. Действительно, согласно п. **5.8**, число π при любом выборе единичного отрезка равно площади круга радиуса r, деленной на r^2, а согласно формуле (2), эта площадь умножается при замене единичного отрезка на то же число, что и r^2.

4. Единицы длины, площади и объема. То обстоятельство, что длины отрезков, а также площади фигур и объемы тел отличаются друг от друга только числовыми множителями, позволяет ввести в геометрию подобия *единицы* длины, площади и объема. За единицу длины принимают длину какого-нибудь отрезка Δ_0, т. е. функцию $l(\Delta_0, e)$ отрезка e, за единицу площади — площадь какой-нибудь квадрируемой фигуры F_0, т. е. функцию $s(F_0, e)$ отрезка e, за единицу объема — объем какого-нибудь кубируемого тела T_0, т. е. функцию $v(T_0, e)$ отрезка e. Единственное условие, налагаемое на F_0 и T_0, состоит в том, что они не должны быть нуль-множествами. Длина всякого другого отрезка, площадь всякой другой квадрируемой фигуры, объем всякого другого кубируемого тела оказываются тогда равными выбранной единице, умноженной на некоторое число. Эта привычная запись (единица длины, площади или объема с числовым коэффициентом) представляет собой, таким образом, не формальное, а самое обычное произведение — произведение числовой функции на число.

Единицы длины, площади и объема не являются независимыми друг от друга: каждые две из них выражаются через третью. Действительно, полагая в формулах (5), (6) $e' = \Delta_0$, $F = F_0$, $T = T_0$, мы получаем:

$$s(F_0, e) = s(F_0, \Delta_0)\,[l(\Delta_0, e)]^2,\quad v(T_0, e) = v(T_0, \Delta_0)\,[l(\Delta_0, e)]^3.$$

Обычно в качестве F выбирают квадрат, построенный на отрезке Δ_0, а в качестве T_0 — куб, построенный на отрезке Δ_0. В этом случае $s(F_0, \Delta_0) = v(T_0, \Delta_0) = 1$ и $s(F_0, e) = [l(\Delta_0, e)]^2$, $v(T_0, e) = [l(\Delta_0, e)]^3$.

Окончательное выражение площади и объема через единицу длины не будет, конечно, зависеть от выбора F_0 и T_0. Его можно получить прямо из формул (5), (6), если положить в них $e' = \Delta_0$.

Обозначая единицу длины через ε, мы находим: $s(F, e) = s(F, \Delta_0)\varepsilon^2$, $v(T, e) = v(T, \Delta_0)\varepsilon^3$ и, по формуле (4), $l(\Delta, e) = l(\Delta, \Delta_0)\varepsilon$. Таким образом, коэффициентами при ε, ε^2 и ε^3 служат длина, площадь и объем относительно Δ_0.

Чтобы получить физические примеры, примем за Δ_0 парижский метр, а за F_0 и T_0 — построенные на нем квадрат и куб. Соответствующие единицы $l(\Delta_0, e)$, $s(F_0, e)$ и $v(T_0, e)$ называются *метром*, *квадратным метром* и *кубическим метром*. Метр обозначается буквой $м$, квадратный и кубический метры равны, согласно предыдущему, $м^2$ и $м^3$. Таким образом, $м^2$ и $м^3$ — не только обозначения единиц площади объема, но и обыкновенные степени функции $м$.

Изложенные определения геометрических единиц делают очевидными обычные правила перехода от одних единиц к другим. Как известно, правила эти в том именно и состоят, что с единицами следует обращаться как с числовыми множителями, а с их формальными степенями — как с настоящими степенями. Например, $км$ (километр) есть единица длины, равная 1000 $м$, и потому $\frac{1}{5}\,км^2 = \frac{1}{5}(1000\ м)^2 = \frac{1}{5}\,1000^2\ м^2 = 200\,000\ м^2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Лебег, Об измерении величин, перев. с франц., М., Учпедгиз, 1960.

Книга выдающегося французского математика, обращенная к учителям французской школы; содержит широкое обсуждение теории длин, площадей и объемов и ее преподавания в средней и высшей школе.

[2] В. Ф. Каган, Очерки по геометрии, М., изд. Московского университета, 1963.

Сборник работ выдающегося советского геометра, обращенных к широкому читателю. К теме настоящей статьи примыкают «Этюды по основаниям геометрии».

[3] Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

Обстоятельный и весьма тщательно написанный курс планиметрии, содержащий, в частности, изложение вопроса о площадях многоугольников (§§ 53—60, гл. VII).

[4] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, перев. с франц., ч. I, М., Учпедгиз, 1957; ч. 2, М., Учпедгиз, 1958.

Подробный курс элементарной геометрии. К теме настоящей статьи примыкает прибавление D к первой части книги «О понятии площади» и прибавление F ко второй части «О понятии объема».

[5] И. М. Яглом, О площади многоугольника, в книге: Я. С. Дубнов, Измерение отрезков, М., Физматгиз, 1962, стр. 79—100.

Популярная статья, рассчитанная на широкого читателя

[6] Д. Гильберт, Основания геометрии, перев. с нем., М—Л., Гостехиздат, 1948.

Классическое сочинение знаменитого немецкого математика, посвященное вопросам обоснования геометрии. Глава IV этой книги посвящена учению о площадях многоугольников.

[7] Г. Б. Гуревич, Измерение площадей многоугольников в евклидовой геометрии, сборник «Математическое просвещение», вып. 5, 1960, стр. 161—177.

Статья, содержащая изложение учения о площадях многоугольников, базирующееся на аксиоматике Гильберта (см. [6]).

[8] А. М. Лопшиц, Об измерении площадей ориентированных фигур, М., Гостехиздат, 1956.

Общедоступная брошюра, посвященная важному понятию «ориентированной площади» плоской фигуры

[9] А. М. Лопшиц, Теория площадей ориентированных многоугольников (в аффинной плоскости), сборник «Математическое просвещение», вып. 3, 1958, стр. 183—198.

Методическая статья, примыкающая по своему содержанию к брошюре [8].

См. также книгу Г. Хадвигера, указанную в списке литературы к статье «Равносоставленность многоугольников и многогранников».

ДЛИНА КРИВОЙ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Длины ломаных линий 89
1.1. Основные свойства длины 89
1.2. Длина отрезка 89
1.3. Ломаные линии и их длины 94
1.4. Отрезок—кратчайшая ломаная 95
1.5. Отклонение ограниченных множеств 96
1.6. Полунепрерывность длины 97
§ 2. Простые дуги 100
2.1. Обзор содержания параграфа 100
2.2. Расстояние между простыми дугами 103
2.3. Доказательство свойства (а) 105
2.4. Доказательство свойств (б), (в), (г), (д) 106
2.5. Доказательство свойства (е) 107
2.6. Доказательство свойства (ж) 107
2.7. Доказательство свойств (з) и (и) 107
§ 3. Спрямляемые линии 109
3.1. Вписанные «ломаные» 109
3.2. Определение спрямляемой простой дуги 111
3.3. Спрямляемость и вписанные «ломаные» 111
3.4. Спрямляемость составной дуги 112
3.5. Функции с ограниченным изменением 113
3.6. Связь с теорией площадей 115
3.7. Простые замкнутые линии 116
§ 4. Длина на классе спрямляемых линий 117
4.1. Аксиоматическое определение длины 117
4.2. Доказательство теоремы существования 117
4.3. Доказательство теоремы единственности 119
4.4. Основные свойства длины 121
4.5. Другие определения длины 127
§ 5. О понятии площади поверхности 130
5.1. Основные свойства площади поверхности 130
5.2. Простые куски 131
5.3. Полунепрерывность площади 133
5.4. Определение квадрируемых простых кусков 134
5.5. Вписанные «многогранники» 134
5.6. Аксиоматическое определение площади поверхности 136
5.7. Квадрируемость гладких простых кусков и определение площади поверхности с помощью интеграла 137
5.8. Заключение 140
Литература 140

§ 1. Длины ломаных линий

1.1. Основные свойства длины. Как и понятие площади, понятие длины постоянно встречается в нашей практической деятельности, но является весьма сложно определяемым математическим понятием. Наиболее просто определяется *длина прямолинейного отрезка* или *ломаной линии*. В этом случае определение длины совершенно аналогично определению площади, но отличается от него значительно большей простотой. Свойства, на которых в этом случае основывается определение длины, в точности повторяют условия (α)—(δ), определяющие площадь плоской фигуры (см. стр. 7—8 настоящей книги ЭЭМ). Эти свойства следующие:

(α) *Длина линии является неотрицательным числом.*

(β) *Длина линии, составленной из конечного числа линий, последовательно примыкающих друг к другу, равна сумме длин составляющих линий.*

(γ) *Равные линии имеют равные длины.*

(δ) *Длина единичного отрезка равна единице.*

(Как и в предыдущей статье, мы предполагаем, что единичный отрезок раз и навсегда фиксирован.) В следующем пункте мы покажем, что свойства (α)—(δ) однозначно определяют длины отрезков (а также и ломаных, см. п. **1.3**). Однако для определения понятия длины на более широком классе «линий» (а именно, на классе спрямляемых простых дуг, см. п. **3.2**) этих свойств, оказывается, уже недостаточно, и к ним приходится присоединить еще одно свойство («полунепрерывность»), которое мы рассмотрим ниже, в п. **1.6**.

1.2. Длина отрезка. В этом пункте мы покажем, что условия (α)—(δ) однозначно определяют длину отрезка. Более точно:

существует одна и только одна функция l (называемая длиной), определенная на классе всех прямолинейных отрезков и удовлетворяющая условиям (α)—(δ).

Доказательство существования. Возьмем прямую p, на которой расположен единичный отрезок,— для наглядности будем ее считать «горизонтальной»,— и обозначим через O один из концов единичного отрезка. Далее, разбив единичный отрезок на 10^n равных частей и взяв одну из этих частей, будем последовательно откладывать вправо и влево от точки O отрезки, равные этой части. В результате вся прямая p будет разбита на равные отрезки, которые мы назовем *отрезками ранга n*. Пусть теперь AB — произвольный отрезок, расположенный на прямой p. Обозначим через α_n число отрезков ранга n, целиком содержащихся в отрезке AB, а через α'_n — число отрезков ранга n, имеющих с отрезком AB хотя бы одну общую точку. Ясно, что если мы возьмем самый «правый» из содержащихся в AB отрезков

ранга n, то примыкающий к нему справа отрезок ранга n имеет с отрезком AB общие точки, но не содержится целиком в AB. Аналогичное положение вещей имеет место для самого «левого» из содержащихся в AB отрезков ранга n. Следовательно,

$$\alpha'_n - \alpha_n = 2. \tag{1}$$

Положим

$$l_n = \alpha_n \cdot 10^{-n}, \quad l'_n = \alpha'_n \cdot 10^{-n}.$$

Числа l_n и l'_n (так же как и α_n, α'_n) определены для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$

Легко видеть, что имеют место соотношения $l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant \ldots$ и $l'_1 \geqslant l'_2 \geqslant l'_3 \geqslant \ldots$ Действительно, всякий отрезок ранга n разбит на 10 отрезков ранга $n+1$. Если исходный отрезок (ранга n) содержится в AB, то каждый из этих десяти отрезков ранга $n+1$ содержится в AB; если хотя бы один из десяти отрезков ранга $n+1$ имеет общую точку с отрезком AB, то и исходный отрезок ранга n имеет общую точку с отрезком AB. Следовательно, $\alpha_{n+1} \geqslant 10\alpha_n$, $\alpha'_{n+1} \leqslant 10\alpha'_n$, и потому $l_{n+1} \geqslant l_n$, $l'_{n+1} \leqslant l'_n$.

Из очевидного соотношения $l_n < l'_n$ (см. (1)) мы находим, что монотонная последовательность l_1, l_2, l_3, ... ограничена: $l_n \leqslant l'_n \leqslant l'_1$ для любого n, и потому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$. Аналогично $l'_n \geqslant l_n \geqslant l_1$, и потому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} l'_n$.

Из соотношения (1) мы теперь получаем: $l'_n - l_n = 2 \cdot 10^{-n}$, и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} l'_n. \tag{2}$$

Получаемое таким образом число (2) мы обозначим через $l(AB)$ и будем называть *длиной* отрезка AB.

Покажем, что *построенная функция l удовлетворяет всем условиям* $(\alpha)-(\delta)$.

Выполнение условия (α) очевидно (причем ясно, что $l(AB) > 0$ для любого отрезка AB).

Условие (β) достаточно проверить для случая отрезка AC, составленного из *двух* отрезков AB, BC. Будем у чисел l_n и α_n ставить сверху индексы, указывающие, к какому отрезку они относятся; например, $l_n^{(AB)}$, $l_n^{(BC)}$ и т. п. Если точка B является общим концом двух смежных отрезков ранга n, то, как легко видеть (рис. 1, *а*), $\alpha_n^{(AC)} = \alpha_n^{(AB)} + \alpha_n^{(BC)}$, в противном же случае (рис. 1, *б*) $\alpha_n^{(AC)} = \alpha_n^{(AB)} + \alpha_n^{(BC)} + 1$. Таким образом, в любом слу-

чае справедливы неравенства $\alpha_n^{(AC)} - 1 \leqslant \alpha_n^{(AB)} + \alpha_n^{(BC)} \leqslant \alpha_n^{(AC)}$, из которых мы находим: $l_n^{(AC)} - 10^{-n} \leqslant l_n^{(AB)} + l_n^{(BC)} \leqslant l_n^{(AC)}$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, мы получаем $l(AC) = l(AB) + l(BC)$, что и доказывает свойство (β).

Установим справедливость свойства (γ). Пусть AB — произвольный отрезок, расположенный на прямой p. Сдвигая оба конца этого отрезка вправо (или оба влево) на 10^n-ю часть единичного отрезка, мы перенесем отрезок AB в новое положение, но числа $\alpha_n^{(AB)}$ и $l_n^{(AB)}$ при этом, очевидно, не изменятся. Следовательно, если AB и CD — два равных отрезка, расположенных на прямой p,

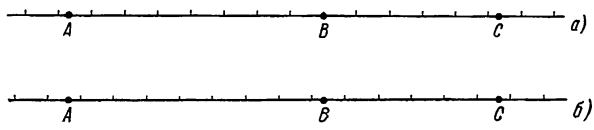


Рис. 1.

то мы можем, не меняя чисел $\alpha_n^{(AB)}$ и $\alpha_n^{(CD)}$, переместить эти отрезки в такие положения, что точки A и C будут расположены на одном отрезке ранга n. Из равенства отрезков AB и CD вытекает, что $AC = BD$ (рис. 2), и потому отрезок BD меньше, чем 10^n-я часть единичного отрезка. Следовательно, точки B и D расположены либо на одном и том же отрезке ранга n, либо же на соседних отрезках ранга n, и потому числа $\alpha_n^{(AB)}$ и $\alpha_n^{(CD)}$ отличаются друг от друга не более чем на одну единицу. Таким образом, $\left| l_n^{(AB)} - l_n^{(CD)} \right| \leqslant 10^{-n}$, откуда, переходя к пределу, мы и получаем требуемое соотношение $l(AB) = l(CD)$.

Свойство (δ) вытекает из справедливых для единичного отрезка соотношений $\alpha_n = 10^n$, $l_n = 1$.

Итак, функция l, определенная для расположенных на прямой p отрезков, обладает свойствами (α)—(δ). Если теперь AB — произвольный отрезок на плоскости или в пространстве и $A'B'$ — равный ему отрезок, расположенный на прямой p, то мы положим $l(AB) = l(A'B')$. В результате длина l оказывается определенной для любого отрезка AB, причем свойства (α)—(δ), как легко понять, выполняются. Таким образом, теорема существования полностью доказана.

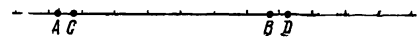


Рис. 2.

Доказательство единственности. Пусть λ — какая-либо функция, заданная на множестве всех прямолинейных отрезков и обладающая свойствами (α)—(δ). Покажем, что она

совпадает с построенной выше функцией l. Обозначим через Δ единичный отрезок; в силу свойства (δ), мы имеем $\lambda(\Delta) = l(\Delta) = 1$. Далее, разделим отрезок Δ на 10^n равных частей $\Delta_1, \ldots, \Delta_{10^n}$. В силу свойства ($\gamma$), мы имеем: $\lambda(\Delta_1) = \lambda(\Delta_2) = \ldots = \lambda(\Delta_{10^n})$, $l(\Delta_1) = l(\Delta_2) = \ldots = l(\Delta_{10^n})$, а в силу свойства ($\beta$) находим:

$$\lambda(\Delta_1) + \lambda(\Delta_2) + \ldots + \lambda(\Delta_{10^n}) = \lambda(\Delta) = 1,$$
$$l(\Delta_1) + l(\Delta_2) + \ldots + l(\Delta_{10^n}) = l(\Delta) = 1.$$

Следовательно, $l(\Delta_1) = \lambda(\Delta_1) = 10^{-n}$.

Пусть теперь AB—произвольный отрезок, расположенный на прямой p. Рассмотрим, как и в доказательстве существования, разбиение прямой p на отрезки ранга n и определим числа α_n и α'_n. Обозначая через MN отрезок, образованный всеми α_n отрезками ранга n, целиком содержащимися в AB, мы найдем, согласно свойствам (γ) и (β), $\lambda(MN) = l(MN) = \alpha_n \cdot 10^{-n} = l_n$. Точно так же для отрезка $M'N'$, образованного всеми α'_n отрезками ранга n, имеющими с AB общие точки, мы найдем, согласно свойствам (γ) и (β), $\lambda(M'N') = l(M'N') = \alpha'_n \cdot 10^{-n} = l'_n$. Заметим теперь, что

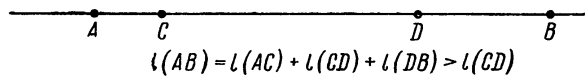


Рис. 3.

из свойств (β) и (α) вытекает монотонность функций l и λ, т. е. вытекает, что если отрезок CD является частью отрезка AB, то $l(CD) \leqslant l(AB)$, $\lambda(CD) \leqslant \lambda(AB)$ (рис. 3). Так как отрезок MN содержится в отрезке AB (может быть, совпадает с ним), то $l(AB) \geqslant l(MN) = l_n$, $\lambda(AB) \geqslant \lambda(MN) = l_n$. Точно так же $l(AB) \leqslant l(M'N') = l'_n$, $\lambda(AB) \leqslant \lambda(M'N') = l'_n$ (ибо отрезок AB содержится в отрезке $M'N'$). Таким образом, $l_n \leqslant l(AB) \leqslant l'_n$, $l_n \leqslant \lambda(AB) \leqslant l'_n$, и потому $|l(AB) - \lambda(AB)| \leqslant l'_n - l_n = 2 \cdot 10^{-n}$ (см. (1)). Ввиду произвольности числа n отсюда вытекает равенство $l(AB) = \lambda(AB)$. Итак, для отрезка AB, расположенного на прямой p, функции λ и l принимают одно и то же значение. Из этого в силу свойства (γ) вытекает, что функции λ и l совпадают.

Замечание 1. Рассмотрим, в частности, расположенный на прямой p отрезок OB, левый конец которого совпадает с точкой O. Обозначим через a_0 число отрезков ранга 0 (т. е. равных единичному отрезку), целиком содержащихся в отрезке OB, и пусть C—правый конец последнего из этих отрезков. Обозначим, далее, через a_1 число отрезков ранга 1, содержащихся в «первом

остатке» CB, и пусть D—правый конец последнего из этих отрезков (рис. 4). Затем мы обозначим через a_2 число отрезков ранга 2, содержащихся во втором остатке DB, и т. д. В результате мы определим некоторую последовательность целых неотрицательных чисел a_0, a_1, a_2, ..., в которой каждое число, кроме, может быть, a_0, не превосходит девяти. Как легко видеть, числа l_n и l'_n, определенные выше, имеют следующие значения:

$$l_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \quad l'_n = l_n + \frac{1}{10^n}.$$

Таким образом, числа l_n и l'_n—это те самые хорошо известные приближения с недостатком и избытком, которые получаются

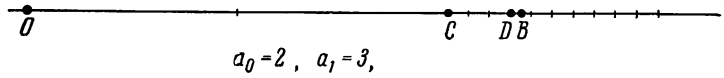


Рис. 4.

при обычном *десятичном процессе измерения*. Длина отрезка OB выражается бесконечным рядом

$$l(OB) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots,$$

т. е. *бесконечной десятичной дробью*, которая, разумеется, в некоторых случаях может оказаться и конечной. Если эта десятичная дробь бесконечна, но является периодической, то, как показывается в арифметике, эта дробь представляет собой *рациональное число*, т. е. может быть представлена в виде отношения двух целых чисел. Если же бесконечная десятичная дробь не является периодической, то она представляет собой *иррациональное число* (число, не являющееся рациональным). Таким образом, процесс измерения является одной из причин введения иррациональных чисел.

Замечание 2. В вышеприведенных доказательствах существенно была использована аксиома Архимеда (см. ЭЭМ, кн. IV, стр. 37). Действительно, мы откладывали от точки O в обе стороны равные отрезки и говорили при этом, что «вся прямая будет разбита на равные отрезки». Без аксиомы Архимеда это заключение было бы необоснованным. В связи с тем, что описанный выше процесс измерения существенно опирается на аксиому Архимеда, ее часто называют также аксиомой измерения.

Тесно связана с процессом измерения и вторая аксиома непрерывности—аксиома Кантора. Именно, если аксиома Архимеда позволяет каждому отрезку сопоставить положительное

число — его длину, — то аксиома Кантора позволяет доказать, что и, обратно, для каждого числа $l>0$ существуют отрезки, имеющие длину l. Это позволяет установить сохраняющее порядок взаимно однозначное соответствие между точками прямой линии и действительными числами (см. стр. 42—43 кн. V ЭЭМ).

1.3. Ломаные линии и их длины. Термин *ломаная* всегда будет обозначать в этой статье простую незамкнутую ломаную линию (на плоскости или в пространстве). Такая линия представляет собой сумму конечного числа отрезков, скажем отрезков $\Delta_1 = A_1B_1$, $\Delta_2 = A_2B_2, \ldots$, $\Delta_k = A_kB_k$, расположенных таким образом, что $A_{i+1} = B_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, а других общих точек отрезки Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$ попарно не имеют. Отрезки Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$ называются *звеньями* рассматриваемой ломаной. Звенья Δ_i и Δ_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$ называются *соседними*. Как видно из приведенного определения, мы не исключаем случаев, когда соседние звенья составляют продолжение одно другого.

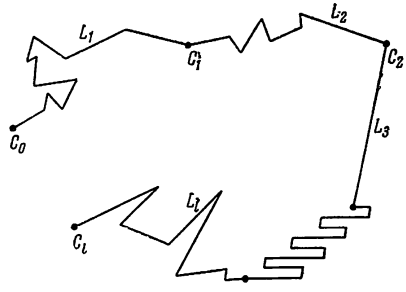


Рис. 5.

Ломаную, составленную из отрезков $\Delta_1 = A_0A_1$, $\Delta_2 = A_1A_2, \ldots$, $\Delta_k = A_{k-1}A_k$, мы будем обозначать символом $A_0A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$. Точки $A_0, A_1, \ldots, A_k$ называются *вершинами* ломаной $A_0A_1 \ldots A_k$. Вершины A_0 и A_k называются *концевыми точками*, или *концами* этой ломаной.

Пусть $C_0, C_1, \ldots, C_l$ — некоторые точки. Предположим, что для каждого $i = 1, \ldots, l$ выбрана некоторая ломаная L_i с концевыми точками C_{i-1} и C_i. Если ломаные $L_1, L_2, \ldots, L_l$ других общих точек не имеют, то они образуют, вместе взятые, некоторую ломаную линию L^* (рис. 5). В этом случае мы будем говорить, что ломаная L^* *составлена* из ломаных $L_1, L_2, \ldots, L_l$, последовательно примыкающих друг к другу.

Длина ломаной $L = A_0A_1 \ldots A_k$ определяется как сумма длин ее звеньев:

$$l(L) = l(A_0A_1) + l(A_1A_2) + \ldots + l(A_{k-1}A_k). \qquad (3)$$

Таким образом, длина l является функцией с действительными значениями, заданной теперь уже на классе всех ломаных линий. Эта функция обладает свойствами (α)—(δ), так как свойствами (α)—(δ) обладают длины отрезков. Далее, l является единственной функцией с этими свойствами, так как свойства (α)—(δ) определяют длины отрезков однозначно, а из свойства (β) вытекает, что длина произвольной ломаной $L = A_0A_1 \ldots A_k$ должна

определяться формулой (3). Итак, справедлива следующая теорема существования и единственности:

На классе всех ломаных линий существует одна и только одна функция, обладающая свойствами (α)—(δ).

1.4. Отрезок — кратчайшая ломаная. Пусть A и B — произвольные точки (на плоскости или в пространстве). Длину отрезка AB называют в геометрии также *расстоянием* между точками A и B. В соответствии со сказанным выше, расстояние между точками A и B можно обозначать символом $l(AB)$. Однако обычно в математике расстояние между точками A и B принято обозначать через $\rho(A, B)$. Этим обозначением мы, как правило, и будем пользоваться.

Для любых трех точек A, B, C (*на плоскости или в пространстве*) *справедливо соотношение*

$$\rho(A, B)+\rho(B, C)\geqslant\rho(A, C).$$

В самом деле, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то $\rho(A, B)+\rho(B, C)>\rho(A, C)$, так как сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны [1]). Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, то $\rho(A, B)+\rho(B, C)=\rho(A, C)$ при условии, что точка B лежит на отрезке AC, и $\rho(A, B)+\rho(B, C)>\rho(A, C)$ в противном случае.

Доказанное соотношение (оно называется в математике «неравенством треугольника») легко обобщается и на большее число точек. Именно, *для любых точек* $A_0, A_1, \ldots, A_k$, $k\geqslant 2$, *справедливо соотношение*

$$\rho(A_0, A_1)+\rho(A_1, A_2)+\ldots+\rho(A_{k-1}, A_k)\geqslant\rho(A_0, A_k). \qquad (4)$$

Доказательство проводится индукцией по числу точек. Например, для четырех точек

$$\rho(A_0, A_1)+\rho(A_1, A_2)+\rho(A_2, A_3)\geqslant$$
$$\geqslant\rho(A_0, A_2)+\rho(A_2, A_3)\geqslant\rho(A_0, A_3).$$

Пусть теперь $L=A_0A_1\ldots A_k$ — произвольная ломаная. Тогда сумма $\rho(A_0, A_1)+\rho(A_1, A_2)+\ldots+\rho(A_{k-1}, A_k)$ представляет собой, по определению, длину ломаной L, а число $\rho(A_0, A_k)$ является длиной отрезка, соединяющего концы этой ломаной. Таким образом, неравенство (4) показывает, что *длина любой ломаной не меньше, чем длина отрезка, соединяющего концы*

---

[1]) Обычное доказательство этого факта, приводимое в учебниках геометрии, как легко проследить, не использует никаких других свойств длины, кроме (α), (β), (γ), (δ). Это же относится и ко всем другим теоремам элементарного курса геометрии, в которых говорится о длинах отрезков и ломаных. Таким образом, всеми этими теоремами мы можем пользоваться в дальнейшем.

этой ломаной. Иначе говоря, среди всех ломаных, соединяющих заданные точки A и B, отрезок AB имеет наименьшую длину.

1.5. Отклонение ограниченных множеств. Пусть M—некоторое множество на плоскости и r—положительное число. Для каждой точки A множества M мы рассмотрим открытый круг (т. е. круг без границы) радиуса r с центром в точке A. Сумма всех этих кругов (рис. 6) представляет собой множество, которое мы будем называть *r-окрестностью* множества M и будем обозначать символом $O(M, r)$. Иначе говоря, точка B в том и только в том случае принадлежит множеству $O(M, r)$, если в множестве M найдется такая точка A, что $\rho(A, B)<r$. Аналогично (с заменой кругов шарами) определяется r-окрестность множества M, расположенного в пространстве.

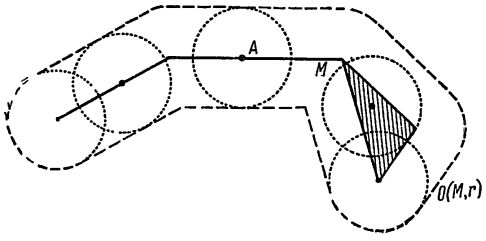


Рис. 6.

Ясно, что если $M \subset N$ (т. е. множество M является частью множества N), то при любом $r>0$ справедливо соотношение $O(M, r) \subset O(N, r)$. Далее, если $r_1<r_2$, то $O(M, r_1) \subset O(M, r_2)$.

Докажем теперь следующую лемму:

Для любого множества M и любых положительных чисел r_1, r_2 выполнено соотношение [1])

$$O(O(M, r_1), r_2) \subset O(M, r_1+r_2). \tag{5}$$

В самом деле, пусть $A \in O(O(M, r_1), r_2)$. Тогда существует такая точка $B \in O(M, r_1)$, что $\rho(A, B)<r_2$. Так как $B \in O(M, r_1)$, то существует такая точка $C \in M$, что $\rho(B, C)<r_1$. Мы имеем (см. п. **1.4**): $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B)+\rho(B, C)<r_1+r_2$, и потому $A \in O(M, r_1+r_2)$. Таким образом, соотношение (5) установлено.

Пусть теперь M и N—некоторые ограниченные множества. Ясно, что при достаточно большом r выполнены соотношения $M \subset O(N, r)$, $N \subset O(M, r)$. Точная нижняя грань положительных чисел r, для которых выполнены эти соотношения, называется *отклонением* множеств M и N и обозначается символом $d(M, N)$. На рис. 7 показан пример нахождения отклонения:

$$N \subset O(M, r) \quad \text{при} \quad r>\rho(C, D);$$
$$M \subset O(N, r) \quad \text{при} \quad r>\rho(A, B);$$

[1]) В действительности, для любого множества M, расположенного на плоскости или в пространстве, справедливо равенство $O(O(M, r_1), r_2)=O(M, r_1+r_2)$; в случае же множества M, расположенного в произвольном *метрическом пространстве* (см. стр. 537 этой книги ЭЭМ), это равенство может не выполняться.

следовательно,

$$d(M, N) = \rho(A, B).$$

Отклонение ограниченных множеств обладает следующим свойством (которое, как и соотношение, доказанное в п. **1.4**, называется «неравенством треугольника»):

Для любых трех ограниченных множеств M, N, P выполнено соотношение

$$d(M, N) + d(N, P) \geqslant \geqslant d(M, P).$$

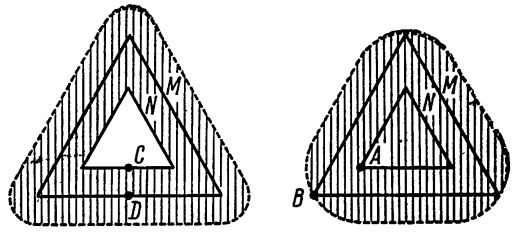


Рис. 7.

В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число. Положим $r_1 = d(M, N) + \varepsilon$, $r_2 = d(N, P) + \varepsilon$. Тогда, по определению отклонения, выполнены включения: $M \subset O(N, r_1)$, $N \subset O(M, r_1)$, $N \subset O(P, r_2)$, $P \subset O(N, r_2)$. Следовательно, в силу (5), имеем: $M \subset O(N, r_1) \subset O(O(P, r_2), r_1) \subset \subset O(P, r_1 + r_2)$, $P \subset O(N, r_2) \subset O(O(M, r_1), r_2) \subset O(M, r_1 + r_2)$, и потому $d(M, P) \leqslant r_1 + r_2$. Таким образом, $d(M, P) \leqslant (d(M, N) + \varepsilon) + (d(N, P) + \varepsilon)$. Ввиду произвольности ε, отсюда вытекает требуемое соотношение.

Заметим, что доказанное предложение дает интересный пример метрического пространства: «точками» этого метрического пространства являются всевозможные замкнутые ограниченные множества на плоскости (или в пространстве), а за «расстояние» между двумя ограниченными множествами M и N принимается число $d(M, N)$. Выполнение первых двух условий, определяющих метрическое пространство (см. стр. 537 этой книги ЭЭМ) очевидно; выполнение последнего условия (неравенства треугольника) только что доказано. Это метрическое пространство играет важную роль во многих вопросах геометрии (см., например, статью «Выпуклые фигуры и тела» в этой книге ЭЭМ).

1.6. Полунепрерывность длины. В этом пункте мы рассмотрим еще одно свойство длины ломаной. Мы будем пользоваться им только в § 4, но для полноты и ясности картины сформулируем его здесь. Интересующее нас свойство длины (так называемую *полунепрерывность снизу*) можно наглядно описать следующим образом. Пусть L — некоторая ломаная, может быть, сильно извилистая, и r — очень маленькое положительное число. Рассмотрим r-окрестность $O(L, r)$ линии L. Тогда ясно, что всякая ломаная L', проходящая внутри множества $O(L, r)$ от одного конца линии L до другого, должна в основном повторять все извилины линии L (рис. 8), и потому длина ломаной L' не может быть намного меньше, чем длина ломаной L. В точной формулировке это означает, что длина ломаной обладает следующим свойством (ε):

(ε) *Пусть L — некоторая линия и ε — положительное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что для всякой линии L', удовлетворяющей условию $d(L, L') < \delta$, выполнено соотношение*

$$l(L') > l(L) - \varepsilon. \tag{6}$$

Доказательство того факта, что длина ломаной обладает свойством (ε), мы приведем в § 3 (см. п. **3.1**). Таким образом, после доказательства этого свойства мы сможем следующим образом

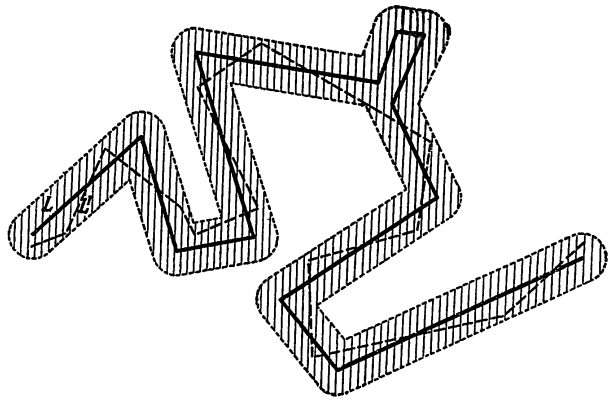


Рис. 8.

уточнить теорему существования и единственности длины ломаной (см. п. **1.3**):

На классе всех ломаных линий существует одна и только одна функция l, обладающая свойствами (α)—(δ); *эта функция l обладает также и свойством* (ε).

Присоединение свойства (ε) к сформулированным ранее свойствам (α)—(δ) будет иметь принципиальное значение в дальнейшем. Дело в том, что при определении длины на более широком классе линий, чем ломаные (а именно, на классе так называемых спрямляемых линий, см. § 3), свойств (α)—(δ) уже оказывается недостаточно, т. е. существует много различных функций со свойствами (α)—(δ), определенных на классе спрямляемых линий (хотя на классе ломаных линий все эти функции совпадают с обычной длиной). В то же время свойства (α)—(ε) определяют на классе спрямляемых линий единственную функцию, которая и называется длиной (см. § 4).

Важно отметить, что, каковы бы ни были ломаная линия L и положительное число δ, существуют ломаные L' произвольно большой длины, удовлетворяющие условию $d(L, L') < \delta$ (рис. 9). Таким образом, условие $d(L, L') < \delta$ ограничивает длину ломаной L' *снизу* (см. (6)), но не накладывает никаких ограничений *сверху*,

в связи с чем свойство (ε) и называют *полунепрерывностью снизу*. Можно сформулировать свойство полунепрерывности снизу и в других терминах. Будем говорить, что последовательность ломаных $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ *сходится* к ломаной L, если выполнено

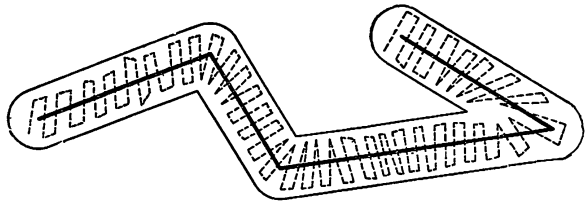


Рис. 9.

соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} d(L, L_n)=0$. Не следует думать, что если последовательность ломаных $L_1, L_2, \ldots$ сходится к ломаной L, то непременно выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} l(L_n)=l(L). \tag{7}$$

В действительности соотношение (7) (которое, если бы оно было всегда справедливо, можно было бы назвать *непрерывностью* длины), вообще говоря, не выполняется. Можно лишь утверждать, что *если предел* $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n)$ *существует, то он удовлетворяет неравенству*

$$\lim_{n\to\infty} l(L_n)\geqslant l(L). \tag{8}$$

Это утверждение эквивалентно свойству (ε); таким образом, неравенство (8) и означает полунепрерывность длины снизу.

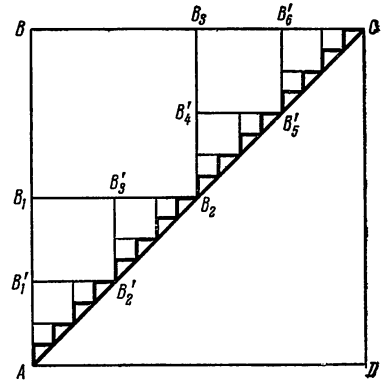


Рис. 10.

Тот факт, что длина только полунепрерывна снизу, но не непрерывна, хорошо иллюстрируется одним известным софизмом [1]). Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 10), сторона которого равна единице. Тогда ломаная $L_1=ABC$ имеет длину 2. Длина не изменится, если мы заменим L_1 ступенчатой ломаной $L_2=AB_1B_2B_3C$. Мы можем удвоить число ступеней — получим ломаную $L_3=AB_1'B_2'B_3'B_2B_4'B_5'B_6'C$ той же длины 2. Продолжая это удвоение

[1]) См. В. Литцман, Где ошибка?, Физматгиз, 1962, стр. 128 и Я. С. Дубнов [5], стр. 48.

ступеней до бесконечности, мы будем получать все новые и новые ломаные длины 2, которые все более приближаются к диагонали AC, в пределе сливаясь с ней. Отсюда «следует», что длина этой диагонали равна двум. (Таким же путем можно «доказать», что диагональ параллелограмма равна сумме двух прилегающих его сторон.) Основой этого софизма является следующее заключение: так как последовательность ломаных $L_1, L_2, L_3, \ldots$ сходится к отрезку AC, «то» $l(AC) = \lim\limits_{n\to\infty} l(L_n)$. В этом заключении неявно используется равенство (7). Так как равенство (7), вообще говоря, не выполняется, то приведенное заключение является необоснованным. И действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} l(L) = 2$, $l(AC) = \sqrt{2}$, что отнюдь не противоречит неравенству (8).

§ 2. Простые дуги

2.1. Обзор содержания параграфа. Напомним, что *простой дугой* называется множество (на плоскости или в пространстве), на которое может быть взаимно однозначно и непрерывно отображен отрезок (см. стр. 37). Мы установим в этом параграфе некоторые важные для дальнейшего свойства простых дуг, связанные главным образом с вопросом о *последовательном расположении* точек на простой дуге. Все свойства простых дуг, о которых идет речь, достаточно наглядны; в то же время строгие доказательства этих свойств (пп. **2.2**—**2.7**) несколько кропотливы и утомительны. К тому же эти свойства не имеют прямого отношения к понятию длины (хотя и будут существенно использованы в дальнейшем). Поэтому для удобства читателя мы приведем в этом пункте формулировки и наглядные пояснения интересующих нас свойств. Дальнейшие пункты этого параграфа (посвященные доказательству сформулированных свойств), если они покажутся трудными или неинтересными, мы рекомендуем при первом чтении пропустить.

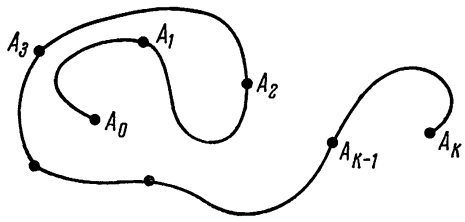


Рис. 11.

(а) Пусть Λ — некоторая простая дуга и f — непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка $\Delta = [a, b]$ на множество Λ. Точки $f(a)$ и $f(b)$ мы будем называть *концами* простой дуги Λ. Далее будем говорить, что точки $A_0, A_1, \ldots, A_k$ расположены *последовательно* на простой дуге Λ (рис. 11), если числа

$t_0, t_1, \ldots, t_k$, удовлетворяющие условиям $f(t_i) = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$, образуют монотонную последовательность (т. е. либо $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, либо $t_0 > t_1 > \ldots > t_k$). Эти определения, наглядно вполне понятные, страдают, однако, некорректностью. В самом деле, эти определения связаны с выбором к а к о г о - т о о д н о г о непрерывного взаимно однозначного отображения f числового отрезка на множество Λ, и заранее не ясно, не изменятся ли, например, концевые точки простой дуги, если отображение f заменить другим аналогичным отображением. В действительности, как и следует ожидать, *концевые точки и последовательное расположение точек определяются самой простой дугой*, а от выбора отображения f не зависят, но этот факт требует доказательства (оно проведено в п. **2.3**). Кроме того, *если точки* $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *последовательно расположены на простой дуге* Λ, *то точки* $A_k, \ldots, A_1, A_0$ *также последовательно расположены на этой простой дуге.*

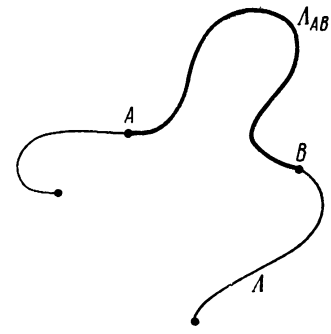


Рис. 12.

(б) Пусть Λ — некоторая простая дуга и A, B, C — три различные ее точки. Будем говорить, что точка B расположена на дуге Λ *между* точками A и C, если точки A, B, C последовательно расположены на дуге Λ. *Из трех различных точек, взятых на простой дуге* Λ, *всегда одна и только одна расположена на дуге* Λ *между двумя другими.*

(в) Пусть Λ — некоторая простая дуга и A, B — две ее различные точки. Обозначим через Λ_{AB} множество, состоящее из точек A, B и всех точек простой дуги Λ, расположенных на ней между A и B. *Полученное множество* Λ_{AB} *является простой дугой с концевыми точками* A *и* B (рис. 12). Эту простую дугу Λ_{AB} мы будем называть *частью* простой дуги Λ, расположенной между точками A и B.

(г) Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — точки, последовательно расположенные на простой дуге Λ, причем A_0 и A_k — ее концевые точки. Обозначим через Λ_i часть дуги Λ, расположенную между точками A_{i-1} и A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (см. рис. 11). Тогда *дуги* Λ_i *и* Λ_j *с несоседними номерами* i *и* j (*т. е. такими номерами, что* $|i-j| > 1$) *не имеют общих точек, а дуги* Λ_i *и* Λ_{i+1} *имеют единственную общую точку* A_i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$). *Сумма* $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_k$ *совпадает с простой дугой* Λ. Мы будем называть дуги $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$ *частями*, на которые простая дуга Λ разбивается точками $A_0, A_1, \ldots, A_k$.

(д) Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — различные точки и пусть для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ построена некоторая простая дуга Λ_i с концевыми точками A_{i-1} и A_i. Предположим при этом, что простые

дуги Λ_i и Λ_j с несоседними номерами i и j не имеют общих точек, а дуги Λ_i и Λ_{i+1} имеют единственную общую точку A_i, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, k-1$. В этом случае мы будем говорить, что простые дуги Λ_1, Λ_2, $\ldots$, Λ_k *последовательно примыкают друг к другу*. Тогда *сумма* $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2+\ldots+\Lambda_k$ *представляет собой простую дугу с концевыми точками* A_0 *и* A_k, *причем точки* A_0, A_1, $\ldots$, A_k *последовательно расположены на простой дуге* Λ, *а части, на которые дуга* Λ *разбивается этими точками, совпадают с* Λ_1, Λ_2, $\ldots$, Λ_k. Мы будем говорить, что простая дуга Λ *составлена* из последовательно примыкающих друг к другу дуг Λ_1, Λ_2, $\ldots$, Λ_k.

(е) *Диаметром* ограниченного множества M называется точная верхняя грань расстояний $\rho(A, B)$, где $A\in M$, $B\in M$. *При любом* $\varepsilon>0$ *всякую простую дугу* Λ (*на плоскости или в пространстве*) *можно конечным числом точек разбить на части* (см. (г)), *диаметр каждой из которых меньше* ε.

(ж) *Пусть* A, B, C—*три различные точки*, Λ_1—*некоторая простая дуга с концами* A, B *и* Λ_2—*некоторая простая дуга с концами* B, C. *Тогда существует такая общая точка* B_0 *дуг* Λ_1 *и* Λ_2 (*возможно, совпадающая с* B), *что часть* Λ_1' *простой дуги* Λ_1, *заключенная между точками* A *и* B_0, *и часть* Λ_2' *простой дуги* Λ_2, *заключенная между точками* B_0 *и* C, *составляют вместе простую дугу* $\Lambda_1'+\Lambda_2'$ *с концевыми точками* A *и* C (рис. 13).

Перед формулировкой последних двух свойств мы дадим наглядные пояснения. Пусть Λ—некоторая простая дуга и A, B, C—три последовательно расположенные на ней точки. Предположим, что участок ABC простой дуги Λ представляет собой «петлю», так что точки A и C близко расположены друг от друга, а точка B—далеко от них (рис. 14, *а*). Выберем положительное число r и рассмотрим некоторую простую дугу Λ', расположенную в r-окрестности дуги Λ и идущую от одного конца линии Λ до другого. Если r больше половины расстояния между точками A и C, то круги радиуса r с центрами в точках A и C имеют общие точки, и потому дуга Λ' может «миновать» точку B (как показано, например, на рис. 14, *б*). Но если r достаточно мало, то r-окрестность линии Λ повторяет в основном извилины этой линии (рис. 14, *в*), и потому линия Λ' должна пройти вдоль всей петли ABC. Иначе говоря, если r достаточно мало, то не только линия Λ' расположена вся вблизи линии Λ, но и сама линия Λ не может далеко отходить от линии Λ'.

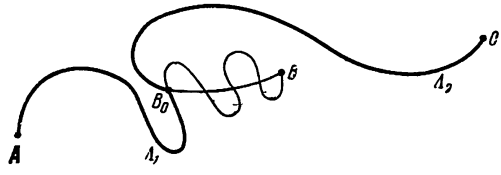


Рис. 13.

Сформулируем теперь точные утверждения.

(з) *Пусть* Λ *— простая дуга,* A_0, A_1, ..., A_k *— последовательно расположенные на ней точки и* ε *— положительное число. Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что на всякой простой дуге* $\Lambda' \subset O(\Lambda, \delta)$, *концы которой отстоят от концов дуги* Λ *менее чем на* δ,

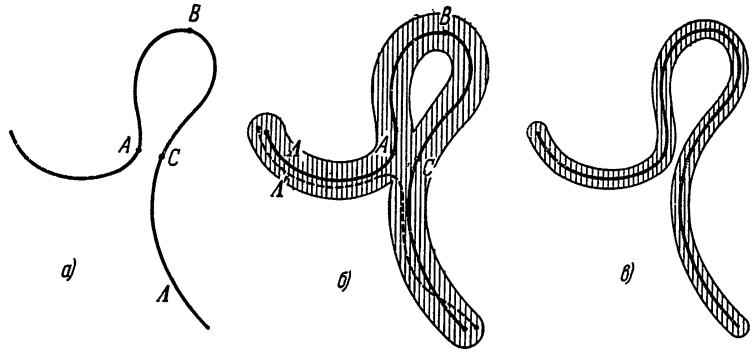


Рис. 14.

найдутся последовательно расположенные точки B_0, B_1, ..., B_k, *для которых* $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

(и) *Пусть* Λ *— простая дуга и* ε *— положительное число. Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что всякая простая дуга* $\Lambda' \subset O(\Lambda, \delta)$, *концы которой отстоят от концов дуги* Λ *менее чем на* δ, *удовлетворяет условию* $d(\Lambda, \Lambda') < \varepsilon$.

2.2. Расстояние между простыми дугами. При формулировке свойств (е) и (и) использовались *диаметр* простой дуги и *отклонение* $d(\Lambda, \Lambda')$ между двумя простыми дугами Λ, Λ'. Для рассмотрения этих понятий необходимо знать, что

всякая простая дуга является ограниченным множеством.

Докажем это. Пусть Λ — простая дуга, расположенная на плоскости (в случае пространства доказательство аналогично), и f — взаимно однозначное непрерывное отображение некоторого отрезка $\Delta = [a, b]$ на множество Λ. Введем на плоскости систему координат x, y и обозначим для каждой точки $t \in \Delta$ координаты точки $f(t)$ через $x_f(t)$ и $y_f(t)$. Тогда $x_f(t)$ и $y_f(t)$ представляют собой непрерывные функции, заданные на отрезке Δ (см. стр. 37). Так как всякая непрерывная функция, заданная на отрезке, ограничена (см. ЭЭМ, кн. III, стр. 217), то существует такое число M, что $-M \leqslant x_f(t) \leqslant M$, $-M \leqslant y_f(t) \leqslant M$ для любой точки t отрезка Δ. Иначе говоря, для любого $t \in \Delta$ точка $f(t)$ расположена в квадрате, определяемом неравенствами $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$, и потому множество Λ ограничено.

Пусть Λ *— некоторая простая дуга и* A *— не лежащая на ней точка. Тогда существует такое положительное число* r, *что для любой точки* $B \in \Lambda$ *выполнено неравенство* $\rho(A, B) \geqslant r$.

Для доказательства рассмотрим непрерывное взаимно однозначное отображение f некоторого отрезка Δ на множество Λ и положим $\varphi(t) = \rho(A, f(t))$, $t \in \Delta$. Получаемая таким образом функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке Δ, непрерывна, что видно, например, из ее записи в координатах

$$\varphi(t) = \sqrt{(x_f(t) - a_1)^2 + (y_f(t) - a_2)^2}$$

(a_1 и a_2—координаты точки A, см. рис. 15). Из непрерывности этой функции вытекает существование такого значения $\theta \in \Delta$, для которого функция $\varphi(t)$ принимает наименьшее значение (см. ЭЭМ, кн. III, стр. 218): $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(t)$ для любого $t \in \Delta$. Иначе говоря, $\varphi(\theta) \leqslant \rho(A, B)$ для любой точки $B \in \Lambda$, и потому число $r = \varphi(\theta) = \rho(A, f(\theta))$—искомое (это число положительно, так как точка A не лежит на линии Λ и, следовательно, $A \neq f(\theta)$).

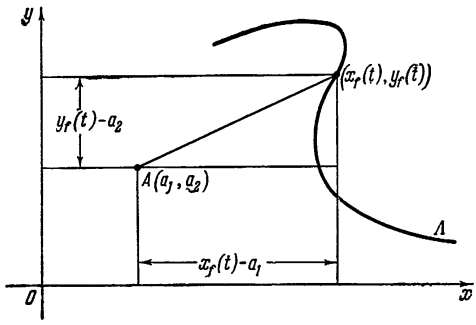


Рис. 15.

Пусть Λ_1 и Λ_2—две простые дуги, не имеющие общих точек. Тогда существует такое положительное число r, что для любых точек $A \in \Lambda_1$ и $B \in \Lambda_2$ выполнено неравенство $\rho(A, B) \geqslant r$.

Для доказательства рассмотрим непрерывное взаимно однозначное отображение f некоторого отрезка Δ_1 на множество Λ_1 и непрерывное взаимно однозначное отображение g некоторого отрезка Δ_2 на множество Λ_2.

Для любых точек $t_1 \in \Delta_1$, $t_2 \in \Delta_2$ мы положим:

$$\varphi(t_1, t_2) = \rho(f(t_1), g(t_2)).$$

Мы получаем таким образом функцию φ двух переменных $t_1 \in \Delta_1$, $t_2 \in \Delta_2$. Эта функция непрерывна, что видно, например, из ее записи в координатах:

$$\varphi(t_1, t_2) = \sqrt{(x_f(t_1) - x_g(t_2))^2 + (y_f(t_1) - y_g(t_2))^2}.$$

Из непрерывности этой функции вытекает существование таких значений $\theta_1 \in \Delta_1$, $\theta_2 \in \Delta_2$, для которых функция принимает наименьшее значение [1]):

$$\varphi(\theta_1, \theta_2) \leqslant \varphi(t_1, t_2) \quad \text{для любых } t_1 \in \Delta_1,\ t_2 \in \Delta_2.$$

Иначе говоря,

$$\rho(f(\theta_1), g(\theta_2)) \leqslant \rho(A, B) \quad \text{для любых точек } A \in \Lambda_1,\ B \in \Lambda_2,$$

и потому положительное число $r = \rho(f(\theta_1), g(\theta_2))$—искомое.

Символом M_3 мы будем, как и на стр. 14, обозначать *замыкание* множества M, т. е. множество, получающееся, если к M присоединить все его граничные точки. Мы докажем следующее важное для дальнейшего свойство окрестностей.

Пусть Λ_1 и Λ_2—две простые дуги, не имеющие общих точек. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что множества $(O(\Lambda_1, \varepsilon))_3$ и $(O(\Lambda_2, \varepsilon))_3$ также не имеют общих точек (рис. 16). Для доказательства обозначим через r такое положительное число, что $\rho(A, B) \geqslant r$ для любых точек $A \in \Lambda_1$, $B \in \Lambda_2$ (см. выше), и положим $\varepsilon = \frac{r}{4}$. Покажем, что множества $(O(\Lambda_1, \varepsilon))_3$ и $(O(\Lambda_2, \varepsilon))_3$ не имеют общих точек. Допустим противное: существует точка C, принадлежащая обоим этим множествам. Так как $C \in (O(\Lambda_1, \varepsilon))_3$,

---

[1]) Для случая непрерывных функций от одного переменного доказательство существования наименьшего значения приведено в ЭЭМ, кн. III, стр. 218. В случае функций двух (или большего числа) переменных доказательство аналогично; оно использует теорему Больцано—Вейерштрасса (ЭЭМ, кн. III, стр. 156).

то круг радиуса ε с центром в точке C содержит внутри себя хотя бы одну точку множества $O(\Lambda_1, \varepsilon)$, т. е. существует такая точка $D \in O(\Lambda_1, \varepsilon)$, что $\rho(C, D) < \varepsilon$. Аналогично существует такая точка $E \in O(\Lambda_2, \varepsilon)$, что $\rho(C, E) < \varepsilon$. Так как $D \in O(\Lambda_1, \varepsilon)$, то существует такая точка $A \in \Lambda_1$, что $\rho(A, D) < \varepsilon$. Аналогично, так как $E \in O(\Lambda_2, \varepsilon)$, то существует такая точка $B \in \Lambda_2$, что $\rho(E, B) < \varepsilon$. Теперь мы получаем (см. п. **1.4**):

$$\rho(A, B) \leqslant \rho(A, D) + \rho(D, C) + \rho(C, E) + \rho(E, B) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon,$$

т. е. $\rho(A, B) < r$. Но это противоречит тому, что $\rho(A, B) \geqslant r$ для любых точек $A \in \Lambda_1$, $B \in \Lambda_2$.

Совершенно аналогично доказывается, что *если точка A не лежит на простой дуге Λ, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что множества $O(A, \varepsilon)$ и $(O(\Lambda, \varepsilon))_3$ не имеют общих точек* (рис. 17).

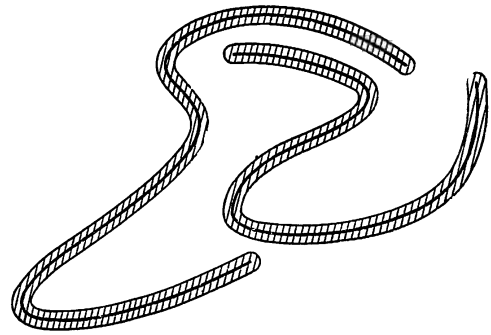


Рис. 16.

2.3. Доказательство свойства (а). Пусть f — непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка $\Delta_1 = [a, b]$ на простую дугу Λ и g — некоторое другое отображение числового отрезка $\Delta_2 = [c, d]$ на то же множество Λ. Для каждого $t \in \Delta_1$ выберем такое значение $\tau \in \Delta_2$, что $g(\tau) = f(t)$, и положим $\tau = \varphi(t)$. Мы получаем, таким образом, некоторую функцию φ, заданную на отрезке Δ_1 и принимающую значения на отрезке Δ_2. Мы изучим некоторые свойства функции φ.

Функция φ взаимно однозначно отображает отрезок Δ_1 на весь отрезок Δ_2. Действительно, для любой точки $\tau \in \Delta_2$ мы имеем $g(\tau) \in \Lambda$, и потому найдется такое число $t \in \Delta_1$, что $f(t) = g(\tau)$, т. е. $\tau = \varphi(t)$. Следовательно, функция φ отображает отрезок Δ_1 на весь отрезок Δ_2. Далее, если $t_1 \neq t_2$, то $f(t_1) \neq f(t_2)$ (в силу взаимной однозначности отображения f), и потому числа τ_1 и τ_2, удовлетворяющие соотношениям $g(\tau_1) = f(t_1)$, $g(\tau_2) = f(t_2)$, различны между собой, т. е. $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Таким образом, отображение φ взаимно однозначно.

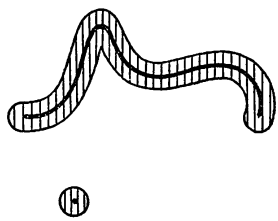


Рис. 17.

Функция φ непрерывна. В самом деле, пусть t_0 — произвольная точка отрезка Δ_1 и ε — положительное число. Для доказательства непрерывности функции φ нам достаточно установить существование такого числа $\delta_1 > 0$, что для любой точки $t \in \Delta_1$, удовлетворяющей условию $|t - t_0| < \delta_1$, выполнено соотношение $\varphi(t) < \varphi(t_0) + \varepsilon$, и существование такого числа $\delta_2 > 0$, что для любой точки $t \in \Delta_1$, удовлетворяющей условию $|t - t_0| < \delta_2$, выполнено соотношение $\varphi(t) > \varphi(t_0) - \varepsilon$. Существование чисел δ_1 и δ_2 доказывается одинаково; докажем существование числа δ_1.

Положим $\tau_0 = \varphi(t_0)$. Если $\varphi(t_0) + \varepsilon > d$, то соотношение $\varphi(t) < \varphi(t_0) + \varepsilon$ выполнено для любой точки t отрезка Δ_1 и существование числа δ_1 очевидно. Пусть $\varphi(t_0) + \varepsilon \leqslant d$. Образ отрезка $[\tau_0 + \varepsilon, d]$ при отображении g представляет собой простую дугу Λ', не содержащую точки $g(\tau_0)$ (или, в случае $\tau_0 + \varepsilon = d$, представляет собой точку, отличную от $g(\tau_0)$). Поэтому

(см. п. 2.2) существует такое положительное число r, что $\rho(g(\tau_0), B) > r$ для любой точки $B \in \Lambda'$. Иначе говоря, $\rho(g(\tau_0), g(\tau)) > r$ при $\tau \geqslant \tau_0 + \varepsilon$. Так как отображение f непрерывно, то существует такое число $\delta_1 > 0$, что для любой точки t отрезка Δ_1, удовлетворяющей условию $|t_0 - t| < \delta$, выполнено соотношение $\rho(f(t_0), f(t)) < r$. Пусть t—точка отрезка Δ_1, удовлетворяющая условию $|t_0 - t| < \delta_1$; положим $\tau = \varphi(t)$. Мы имеем $\rho(f(t_0), f(t)) < r$. Далее, так как $\tau = \varphi(t)$, $\tau_0 = \varphi(t_0)$, то $f(t) = g(\tau)$, $f(t_0) = g(\tau_0)$, и потому $\rho(g(\tau_0), g(\tau)) < r$. Из этого, в силу определения числа r, вытекает, что точка τ не лежит на отрезке $[\tau_0 + \varepsilon, d]$, т. е. $\tau < \tau_0 + \varepsilon$.

Итак, при $|t_0 - t| < \delta_1$ мы имеем $\tau < \tau_0 + \varepsilon$, т. е. $\varphi(t) < \varphi(t_0) + \varepsilon$. Тем самым непрерывность функции φ доказана.

Функция φ монотонна. Пусть t_0, t_1, t_2—такие точки отрезка Δ_1, что $t_0 < t_1 < t_2$. Покажем, что значение $\varphi(t_1)$ заключено между $\varphi(t_0)$ и $\varphi(t_2)$ (т. е. либо $\varphi(t_0) < \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$, либо $\varphi(t_0) > \varphi(t_1) > \varphi(t_2)$). Допустим, что это не так; пусть, например, значение $\varphi(t_0)$ заключено между $\varphi(t_1)$ и $\varphi(t_2)$. Тогда на отрезке $[t_1, t_2]$ найдется такая точка t_1', что $\varphi(t') = \varphi(t_0)$ (см. ЭЭМ, кн. III, стр. 216). Так как $t_0 < t_1 \leqslant t' \leqslant t_2$, то $t_0 \neq t'$. Но тогда соотношение $\varphi(t') = \varphi(t_0)$ противоречит взаимной однозначности отображения φ. Полученное противоречие доказывает, что значение $\varphi(t_1)$ заключено между $\varphi(t_0)$ и $\varphi(t_2)$.

Из доказанного вытекает монотонность функции φ. Действительно мы имеем $\varphi(a) \neq \varphi(b)$; пусть, например, $\varphi(a) < \varphi(b)$. Тогда для любых точек $t' < t''$ отрезка $[a, b]$ мы находим $a < t'' < b$, откуда $\varphi(a) < \varphi(t'') < \varphi(b)$; далее, $a < t' < t''$, откуда $\varphi(a) < \varphi(t') < \varphi(t'')$. Итак, при $t' < t''$ мы имеем $\varphi(t') < \varphi(t'')$, т. е. φ—монотонно возрастающая функция. (При $\varphi(a) > \varphi(b)$ функция φ будет монотонно убывающей.)

Значения $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ совпадают с концами отрезка $[c, d]$. Это непосредственно следует из того, что функция φ монотонна и отображает отрезок Δ_1 на весь отрезок Δ_2.

Из доказанного предложения вытекает, что точки $f(a)$, $f(b)$ совпадают, с точностью до порядка, с точками $g(c)$, $g(d)$, и потому приведенное в п. 2.1 (а) определение концевых точек простой дуги корректно. Точно так же корректным является и определение последовательного расположения точек на простой дуге. В самом деле, пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$—некоторые точки простой дуги Λ. Выберем на отрезке Δ_1 точки $t_1, t_2, \ldots, t_k$, удовлетворяющие условиям $f(t_i) = A_i$, $i = 1, \ldots, k$, а на отрезке Δ_2—точки $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, удовлетворяющие условиям $g(\tau_i) = A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $\tau_i = \varphi(t_i)$, $i = 1, \ldots, k$, и потому (в силу монотонности функции φ) из монотонности последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_k$ вытекает монотонность последовательности $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, и обратно.

2.4. Доказательство свойств (б), (в), (г), (д). Пусть A, B, C—три точки простой дуги Λ. Выберем непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка $\Delta = [a, b]$ на множество Λ, и пусть t_1, t_2, t_3—такие точки этого отрезка, что $f(t_1) = A$, $f(t_2) = B$, $f(t_3) = C$. Так как из трех различных чисел t_1, t_2, t_3 всегда одно и только одно лежит между двумя другими, то из трех точек A, B, C одна и только одна лежит между двумя другими. Свойство (б) доказано.

Для доказательства свойства (в) сохраним те же обозначения Λ, f, A, B, t_1, t_2. Будем для определенности предполагать, что $t_1 < t_2$. Из свойства (а) ясно, что точка D дуги Λ в том и только в том случае лежит между A и B на дуге Λ, если она имеет вид $D = f(t)$, где $t_1 < t < t_2$. Присоединяя к точкам, лежащим между A и B, еще сами точки $A = f(t_1)$ и $B = f(t_2)$, мы найдем, что точка D в том и только в том случае принадлежит множеству Λ_{AB}, если она имеет вид $D = f(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Иначе говоря,

множество Λ_{AB} представляет собой образ отрезка $[t_1, t_2]$ при отображении f и потому является простой дугой.

Перейдем к доказательству свойства (г). Пусть f — непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка $\Delta=[a, b]$ на множество Λ и пусть t_i — такая точка отрезка Δ, что $f(t_i)=A_i$, $i=0, 1, \ldots, k$. Тогда точки $t_0, t_1, \ldots, t_k$ образуют монотонную последовательность, причем t_0 и t_k — концы отрезка Δ. Будем для определенности предполагать, что $a=t_0<t_1<\ldots<t_{k-1}<t_k=b$. Дуга Λ_i представляет собой образ отрезка $\Delta_i=[t_{i-1}, t_i]$ при отображении f. Из свойств числовых неравенств легко вытекает, что отрезки Δ_i и Δ_j с несоседними номерами не имеют общих точек, а отрезки Δ_i и Δ_{i+1} имеют единственную общую точку t_i, $i=1, 2, \ldots, k-1$. Отсюда и следует справедливость свойства (г).

Наконец, свойство (д) легко установить сначала для $k=2$, а затем по индукции — для произвольного k.

2.5. Доказательство свойства (е). Пусть f — непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка $\Delta=[a, b]$ на простую дугу Λ. Введем на плоскости прямоугольную систему координат (в случае пространства доказательство аналогично) и обозначим координаты точки $f(t)$ через $x_f(t)$ и $y_f(t)$. Так как функции $x_f(t)$ и $y_f(t)$, заданные на отрезке Δ, непрерывны, то существует такое число $\delta>0$, что при $|t'-t''|<\delta$ мы имеем:

$$|x_f(t')-x_f(t'')|<\varepsilon/3, \quad |y_f(t')-y_f(t'')|<\varepsilon/3$$

(свойство «равномерной непрерывности»; см. ЭЭМ, кн. III, стр. 220), и потому

$$\rho(f(t'), f(t''))<2\varepsilon/3 \qquad \text{при } |t'-t''|<\delta. \tag{9}$$

Выберем теперь на отрезке Δ такие точки $a=t_0<t_1<\ldots<t_{k-1}<t_k=b$, что $t_i-t_{i-1}<\varepsilon$, $i=1, 2, \ldots, k$. Точку $f(t_i)$ мы обозначим через A_i, $i=0, 1, \ldots, k$, а образ отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ при отображении f — через Λ_i, $i=1, \ldots, k$. Таким образом, простая дуга Λ разбивается точками $A_0, A_1, \ldots, A_k$ на последовательно примыкающие друг к другу части $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$. Из неравенства (9) вытекает, что диаметр каждой дуги Λ_i не превосходит $2\varepsilon/3$, т. е. меньше ε.

2.6. Доказательство свойства (ж). Пусть f — такое непрерывное отображение числового отрезка $\Delta=[b, c]$ на простую дугу Λ_2, что $f(b)=B$, $f(c)=C$. Обозначим через Q множество всех тех значений $t\in\Delta$, для которых $f(t)\in\Lambda_1$. Множество Q содержит точку b и потому не пусто. Обозначим через τ точную верхнюю грань множества Q и положим $B_0=f(\tau)$. Мы покажем прежде всего, что $\tau\in Q$, т. е. что $B_0=f(\tau)\in\Lambda_1$. Допустим, что это не так. Тогда существует круг некоторого радиуса r с центром в точке B_0, не содержащий точек дуги Λ_1 (см. п. 2.2), и потому существует такое $\varepsilon>0$, что $f(t)\in O(B_0, r)$ при $|t-\tau|\leqslant\varepsilon$. Следовательно, точка $f(t)$ не лежит на дуге Λ_1 при $|t-\tau|\leqslant\varepsilon$. Но тогда на отрезке $[\tau-\varepsilon, \tau]$ нет ни одной точки множества Q, а это противоречит тому, что τ — точная верхняя грань множества Q. Итак, $\tau\in Q$, т. е. $B_0=f(\tau)\in\Lambda_1$. По определению числа τ, при $t>\tau$ точка $f(t)$ не принадлежит дуге Λ_1, т. е. часть Λ_2' дуги Λ_2, заключенная между точками B_0 и C, не имеет с Λ_1 других общих точек, кроме B_0. Следовательно, часть Λ_1' дуги Λ_1, заключенная между точками A и B_0, и часть Λ_2' дуги Λ_2 составляют вместе простую дугу $\Lambda_1'+\Lambda_2'$ (см. свойство (д)).

2.7. Доказательство свойств (з) и (и). Проведем сначала доказательство свойства (з). Мы можем считать (добавив, если нужно, к точкам $A_0, A_1, \ldots, A_k$ еще конечное число точек), что A_0 и A_k — концевые точки дуги Λ и точки $A_0, A_1, \ldots, A_k$ делят дугу Λ на части, каждая из которых имеет диаметр

$< \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим эти части через $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$ (дуга Λ_i имеет своими концевыми точками A_{i-1} и A_i). Пусть f — непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка Δ на множество Λ и $t_0, t_1, \ldots, t_k$ — такие точки отрезка Δ, что $f(t_i) = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда последовательность $t_0, t_1, \ldots, t_k$ монотонна, причем t_0 и t_k — концевые точки отрезка Δ. Мы можем без ограничения общности считать, что эта последовательность — возрастающая, т. е. $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ и $\Delta = [t_0, t_k]$. Ясно, что $\Lambda_i = f([t_{i-1}, t_i])$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Выберем такое положительное число r, что выполнены следующие условия:

множества $(O(\Lambda_i, r))_3$ и $(O(\Lambda_j, r))_3$ не имеют общих точек при $|i-j| > 1$;

множества $O(A_0, r)$ и $(O(\Lambda_2, r))_3$ не имеют общих точек;

множества $O(A_k, r)$ и $(O(\Lambda_{k-1}, r))_3$ не имеют общих точек.

Существование такого числа r вытекает из сказанного в п. **2.2.** Наконец, выберем положительное число δ, удовлетворяющее условиям $\delta < r$, $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Мы покажем, что это число δ удовлетворяет условиям, указанным в формулировке свойства (з).

В самом деле, пусть $\Lambda' \subset O(\Lambda, \delta)$ — простая дуга, концы которой отстоят от концов линии Λ менее чем на δ. Обозначим концы дуги Λ' через B_0 и B_k, так что $\rho(A_0, B_0) < \delta$, $\rho(A_k, B_k) < \delta$. Выберем некоторое непрерывное взаимно однозначное отображение g числового отрезка Δ' на простую дугу Λ' и обозначим через q_0 и q_k концы этого отрезка. Мы можем без ограничения общности считать, что $g(q_0) = B_0$, $g(q_k) = B_k$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ обозначим через Q_i множество всех точек $t > q_0$ отрезка Δ', удовлетворяющих условию $g([q_0, t]) \subset U_i$, где $U_i = O(\Lambda_1, \delta) \cup O(\Lambda_2, \delta) \cup \ldots \cup O(\Lambda_i, \delta)$. Ясно, что Q_i представляет собой некоторый отрезок (возможно, без правого конца), содержащийся в отрезке Δ', причем $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_{k-1}$.

Следовательно, обозначая правый конец отрезка Q_i через q_i (т. е. $q_i = \sup Q_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$), мы получим $q_0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_{k-1} \leqslant q_k$. Положим $B_i = g(q_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$ (точки B_0 и B_k уже были определены выше). Мы покажем, что точки $B_0, B_1, \ldots, B_k$ различны между собой, последовательно расположены на линии Λ' и удовлетворяют условиям $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Пусть i — какое-либо из значений $1, 2, \ldots, k-1$. Так как при $t < q_i$ мы имеем $g(t) \in U_i$, то как угодно близко к точке $g(q_i)$ найдутся точки множества U_i, и потому $B_i = g(q_i) \in (U_i)_3$. Точка B_k принадлежит множеству $O(A_k, \delta)$, которое не пересекается с $(U_i)_3$ (ибо $\delta < r$ и $i < k$). Следовательно, $B_i \neq B_k$, и потому $q_i < q_k$. Далее, точка B_i не может принадлежать множеству U_i, так как это множество открыто, и потому из включения $g(q_i) \in U_i$ вытекало бы существование такой точки $t \in [q_0, q_k]$, что $t > q_i$ и $g([q_0, t]) \subset U_i$, а это противоречит определению числа q_i как точной верхней грани множества Q_i. Итак, точка B_i не принадлежит множеству U_i, т. е. не принадлежит ни одному из множеств $O(\Lambda_1, \delta), \ldots, O(\Lambda_i, \delta)$. Далее, так как $B_i \in (U_i)_3$, то точка B_i не принадлежит ни одному из множеств $(O(\Lambda_{i+2}, \delta))_3, \ldots, (O(\Lambda_k, \delta))_3$. Таким образом, ни одно из множеств $O(\Lambda_j, \delta)$ не содержит точки B_i при $j \neq i+1$. Но мы имеем:

$$B_i \in \Lambda' \subset O(\Lambda, \delta) = O(\Lambda_1, \delta) \cup O(\Lambda_2, \delta) \cup \ldots \cup O(\Lambda_k, \delta).$$

Следовательно, $B_i \in O(\Lambda_{i+1}, \delta)$. Из включения $B_i \in (U_i)_3$ вытекает теперь, что $B_i \in (O(\Lambda_i, \delta))_3$, так как при $j < i$ множества $(O(\Lambda_j, \delta))_3$ и $O(\Lambda_{i+1}, \delta)$ не пересекаются. Итак,

$$B_i \in (O(\Lambda_i, \delta))_3, \qquad B_i \in O(\Lambda_{i+1}, \delta), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

В частности, $B_{i-1} \in (O(\Lambda_{i-1}, \delta))_3$, $B_i \in O(\Lambda_{i+1}, \delta)$, откуда вытекает, что $B_{i-1} \neq B_i$, т. е. $q_{i-1} \neq q_i$, $i = 2, 3, \ldots, k-1$. Из включений $B_0 \in O(A_0, \delta)$, $B_1 \in O(\Lambda_2, \delta)$ вытекает, что $B_0 \neq B_1$, т. е. $q_0 \neq q_1$. Наконец, как мы выше видели, $B_{k-1} \neq B_k$, т. е. $q_{k-1} \neq q_k$. Вспоминая теперь неравенства $q_0 \leqslant q_1 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant q_k$, мы находим, что $q_0 < q_1 < \ldots < q_k$, т. е. точки $B_0, B_1, \ldots, B_k$ различны между собой и последовательно расположены на дуге Λ'.

Так как $B_0 \in O(A_0, \delta)$, то $\rho(A_0, B_0) < \delta < \varepsilon$. Аналогично $\rho(A_k, B_k) < \varepsilon$. Наконец, при $i = 1, 2, \ldots, k-1$ мы имеем $B_i \in O(\Lambda_{i+1}, \delta)$, т. е. существует такая точка $C_i \in \Lambda_{i+1}$, что $\rho(B_i, C_i) < \delta < \varepsilon/2$. Кроме того, $\rho(A_i, C_i) < \varepsilon/2$, так как диаметр дуги Λ_{i+1} (содержащей обе точки A_i, C_i) меньше $\varepsilon/2$. Таким образом, $\rho(A_i, C_i) < \varepsilon/2$, $\rho(C_i, B_i) < \varepsilon/2$, и потому $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon$. Тем самым неравенство $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon$ доказано для всех $i = 0, 1, \ldots, k$.

Перейдем к доказательству свойства (и). Разобьем дугу Λ последовательно расположенными на ней точками $A_0, A_1, \ldots, A_k$ (A_0 и A_k—концевые точки) на части $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, диаметр каждой из которых меньше $\varepsilon/2$. Выберем такое $\delta > 0$, что на всякой простой дуге $\Lambda' \subset O(\Lambda, \delta)$, концы которой отстоят от концов дуги Λ менее чем на δ, найдутся точки $B_0, B_1, \ldots, B_k$, для которых $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon/2$, $i = 0, 1, \ldots, k$ (такое число δ существует в силу уже доказанного свойства (з)). При этом мы будем предполагать, что $\delta < \varepsilon$. Покажем, что это число δ—искомое.

Пусть $\Lambda' \subset O(\Lambda, \delta)$—простая дуга, концы которой отстоят от концов дуги Λ менее чем на δ. Выберем на дуге Λ' такие точки $B_0, B_1, \ldots, B_k$, что $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon/2$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Так как диаметр дуги Λ_i меньше $\varepsilon/2$, то $\Lambda_i \subset O(A_i, \varepsilon/2)$. Кроме того, $A_i \in O(B_i, \varepsilon/2)$. Следовательно,

$$\Lambda_i \subset O(A_i, \varepsilon/2) \subset O(O(B_i, \varepsilon/2), \varepsilon/2) \subset O(B_i, \varepsilon) \subset O(\Lambda', \varepsilon).$$

Это соотношение справедливо для любого $i = 1, 2, \ldots, k$, и потому $\Lambda \subset O(\Lambda', \varepsilon)$. Кроме того, $\Lambda' \subset O(\Lambda, \delta) \subset O(\Lambda, \varepsilon)$. Таким образом, $d(\Lambda, \Lambda') < \varepsilon$.

§ 3. Спрямляемые линии

3.1. Вписанные «ломаные». Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_k$—какие-либо $k+1$ различных точек (на плоскости или в пространстве), рассматриваемых в указанном порядке. Сумму отрезков $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{k-1}A_k$ с отмеченными на ней точками $A_0, A_1, \ldots, A_k$ (в указанном порядке) мы будем называть *цепочкой отрезков* и будем обозначать ее через $A_0A_1 \ldots A_k$. Точки $A_0, A_1, \ldots, A_k$ называются *вершинами* рассматриваемой цепочки отрезков. Всякая ломаная $L = B_0B_1 \ldots B_l$ является также цепочкой отрезков (с вершинами $B_0, B_1, \ldots, B_l$). Обратное, вообще говоря, неверно: цепочка отрезков может не быть ломаной (в смысле п. **1.3**), так как отрезки, составляющие цепочку, могут иметь пересечения, наложения и т. п. (рис. 18). Тем не менее мы часто в дальнейшем будем вместо термина *цепочка отрезков* употреблять слово «ломаная», заключая его в этом случае в кавычки.

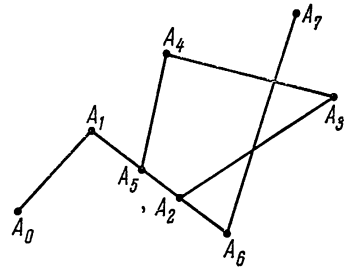


Рис. 18.

Таким образом, *ломаная* будет всегда пониматься в том же смысле, что и в п. **1.3**, а термин «*ломаная*» будет употребляться как синоним термина «цепочка отрезков».

Длиной цепочки отрезков $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$ мы будем называть число

$$l(\Gamma) = \rho(A_0, A_1) + \rho(A_1, A_2) + \ldots + \rho(A_{k-1}, A_k);$$

в случае, если цепочка отрезков является ломаной, мы получаем обычную длину ломаной (см. п. **1.3**).

Таким образом, цепочка отрезков и ее длина определяются выбором вершин $A_0, A_1, \ldots, A_k$, в качестве которых можно взять любую конечную совокупность различных точек, рассматриваемых в определенном порядке.

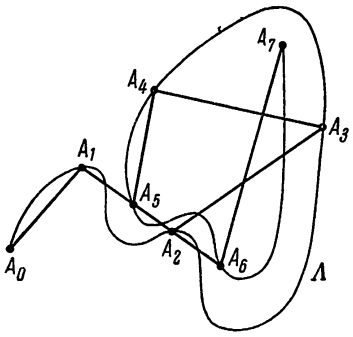


Рис. 19

Пусть теперь Λ — некоторая простая дуга и $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — точки, последовательно расположенные на дуге Λ, причем A_0 и A_k — ее концевые точки. В этом случае цепочку отрезков

$$\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$$

мы будем называть *вписанной «ломаной»* дуги Λ с вершинами в точках $A_0, A_1, \ldots, A_k$. (Эта «ломаная» может иметь самопересечения и самоналожения, рис. 19.)

Докажем теперь следующую лемму:

Пусть Λ — *простая дуга и* $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$ — *некоторая ее вписанная «ломаная». Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $\delta > 0$, *что всякая ломаная* L, *для которой* $d(\Lambda, L) < \delta$, *удовлетворяет условию* $l(L) > l(\Gamma) - \varepsilon$.

В самом деле, пусть $\delta > 0$ — такое число, что на всякой простой дуге $\Lambda' \subset O(\Lambda, \delta)$, концы которой отстоят от концов дуги Λ менее чем на δ, найдутся последовательно расположенные точки $B_0, B_1, \ldots, B_k$, для которых $\rho(A_i, B_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$, $i = 0, 1, \ldots, k$ (см. свойство (з) в п. **2.1**). Пусть, далее, L — произвольная ломаная, удовлетворяющая условию $d(\Lambda, L) < \delta$. Тогда $L \subset O(\Lambda, \delta)$ и $\Lambda \subset O(L, \delta)$. Из включения $\Lambda \subset O(L, \delta)$ вытекает существование на ломаной L таких точек P и Q, что $\rho(A_0, P) < \delta$, $\rho(A_k, Q) < \delta$. Обозначим часть ломаной L, заключенную между точками P и Q, через Λ'. Тогда $\Lambda' \subset L \subset O(\Lambda, \delta)$ и концы дуги Λ' отстоят от концов дуги Λ менее чем на δ. Следовательно, на ломаной Λ' найдутся такие последовательно расположенные точки $B_0, B_1, \ldots, B_k$, что $\rho(A_i, B_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Обозначим через L_i часть ломаной Λ', заключенную между точками B_{i-1} и B_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), а через L' — часть ломаной Λ', заключенную между точками B_0 и B_k. Тогда

L' является частью ломаной L, и потому $l(L) \geqslant l(L')$ (см. свойства (α) и (β) в п. **1.1**). Далее, ломаная L' составлена из ломаных $L_1, L_2, \ldots, L_k$, последовательно примыкающих друг к другу, и потому (см. свойство (β)) $l(L') = l(L_1) + l(L_2) + \ldots + l(L_k)$. Так как ломаная L_i соединяет точки B_{i-1} и B_i, то $l(L_i) \geqslant \rho(B_{i-1}, B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (см. п. **1.4**). Наконец, из соотношений $\rho(A_i, B_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, мы получаем: $\rho(B_{i-1}, B_i) > \rho(A_{i-1}, A_i) - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2k}$. Из написанных соотношений непосредственно вытекает, что

$$l(L) > \rho(A_0, A_1) + \rho(A_1, A_2) + \ldots + \rho(A_{k-1}, A_k) - 2k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = l(\Gamma) - \varepsilon,$$

и лемма полностью доказана.

Доказанная лемма позволяет очень просто установить, что *длина ломаной обладает свойством* (ε) (см. п. **1.6**). Действительно, пусть Λ — ломаная линия и $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — ее вершины, последовательно расположенные на линии Λ. Тогда вписанная «ломаная» $\Gamma = A_0 A_1 \ldots A_k$ совпадает с Λ, и доказанная лемма утверждает существование такого числа $\delta > 0$, что всякая ломаная L, для которой $d(\Lambda, L) < \delta$, удовлетворяет условию $l(L) > l(\Lambda) - \varepsilon$.

3.2. Определение спрямляемой простой дуги. Отмеченные выше свойства длины ломаной послужат нам теперь для определения класса спрямляемых линий. Именно, мы будем говорить, что простая дуга Λ является *спрямляемой*, если выполнено следующее условие.

Существует такое положительное число M, что при любом $\delta > 0$ найдется ломаная L, для которой $d(L, \Lambda) < \delta$ и $l(L) \leqslant M$.

Иными словами, простая дуга Λ называется спрямляемой, если существует такое положительное число M и такая последовательность $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ ломаных, что $\lim\limits_{n \to \infty} L_n = \Lambda$ (т. е. $d(L_n, \Lambda) \to 0$ при $n \to \infty$) и $l(L_n) \leqslant M$ для любого n.

3.3. Спрямляемость и вписанные «ломаные». В этом пункте мы докажем следующую теорему:

Простая дуга Λ в том и только в том случае спрямляема, если существует такое положительное число M', что длина любой вписанной в Λ «ломаной» не превосходит M'.

Эта теорема вытекает, очевидно, из следующих двух предложений:

а) *Пусть Λ — спрямляемая простая дуга и $M > 0$ — такое положительное число, что при любом $\delta > 0$ найдется ломаная L, для которой $d(\Lambda, L) < \delta$ и $l(L) \leqslant M$. Тогда длина любой вписанной в Λ «ломаной» не превосходит M.*

б) *Пусть Λ — такая простая дуга, что длина любой вписанной в нее «ломаной» не превосходит M'. Тогда при любом $\delta > 0$*

найдется ломаная L, *для которой* $d(\Lambda, L) < \delta$ *и* $l(L) \leqslant M'$. *Следовательно, простая дуга* Λ *спрямляема.*

Докажем эти предложения.

(а) Пусть $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$—произвольная вписанная в дугу Λ «ломаная» и ε—положительное число. Выберем число δ, существование которого утверждается в лемме п. **3.1**. В силу спрямляемости дуги Λ, существует такая ломаная L, что $d(\Lambda, L) < \delta$ и $l(L) \leqslant M$. Из соотношения $d(\Lambda, L) < \delta$ вытекает в силу леммы п. **3.1**, что $l(L) > l(\Gamma) - \varepsilon$. Таким образом, $l(\Gamma) < l(L) + \varepsilon \leqslant M + \varepsilon$. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $l(\Gamma) \leqslant M$.

(б) Пусть δ—произвольное положительное число. Выберем такое положительное число $\varepsilon > 0$, что всякая простая дуга $\Lambda' \subset O(\Lambda, \varepsilon)$, концы которой отстоят от концов дуги Λ менее чем на ε, удовлетворяет условию $d(\Lambda, \Lambda') < \delta$ (см. свойство (и) в п. **2.1**). Число ε будем, кроме того, предполагать меньшим, чем δ. Разобьем дугу Λ точками A_0, A_1, ..., A_k (A_0 и A_k—концевые точки) на части, диаметр каждой из которых меньше ε, так что, в частности, $\rho(A_{i-1}, A_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда вся вписанная «ломаная» $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$ содержится в множестве $O(\Lambda, \varepsilon)$:

$$\Gamma \subset O(\Lambda, \varepsilon) \subset O(\Lambda, \delta).$$

Согласно предположению, $l(\Gamma) \leqslant M'$.

Докажем теперь по индукции, что существует ломаная $L_i \subset \Gamma$ с концевыми точками A_0 и A_i, длина которой не превосходит длины «ломаной» $A_0A_1 \ldots A_i$. При $i = 1$ это утверждение очевидно: можно за L_1 принять отрезок A_0A_1. Пусть уже построена ломаная $L_{i-1} \subset \Gamma$ с концевыми точками A_0 и A_{i-1}, длина которой не превосходит длины «ломаной» $A_0A_1 \ldots A_{i-1}$. Обозначим через B_0 ближайшую к A_i общую точку ломаной L_{i-1} и отрезка $A_{i-1}A_i$. Тогда отрезок B_0A_i имеет с ломаной L_{i-1} единственную общую точку B_0. Поэтому часть L'_{i-1} ломаной L_i, заключенная между точками A_0 и B_0, составляет вместе с отрезком B_0A_i ломаную, содержащуюся в Γ и имеющую A_0 и A_i своими концевыми точками. Ее длина $l(L'_{i-1}) + l(B_0A_i)$ не превосходит числа $l(L_{i-1}) + l(A_{i-1}A_i)$, т. е. не превосходит длины «ломаной» $A_0A_1 \ldots A_i$. Таким образом, за L_i можно принять ломаную $L'_{i-1} + B_0A_i$.

Проведенная индукция позволяет найти ломаную $L_k \subset \Lambda$ с концевыми точками A_0 и A_k, длина которой не превосходит длины «ломаной» $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$, т. е. $l(L_k) \leqslant l(\Gamma) \leqslant M'$. Так как $L_k \subset \Lambda$, то $L_k \subset O(\Lambda, \varepsilon)$, и потому, согласно выбору числа ε, мы имеем $d(\Lambda, L_k) < \delta$. Таким образом, ломаная L_k—искомая.

3.4. Спрямляемость составной дуги. *Пусть* Λ—*простая дуга, составленная из простых дуг* Λ_1 Λ_2, ..., Λ_k, *последовательно*

примыкающих друг к другу. Если длина всякой «ломаной», вписанной в дугу Λ_i, *не превосходит* M_i', *то длина всякой «ломаной», вписанной в дугу* Λ, *не превосходит* $M_1'+M_2'+\ldots+M_k'$.

Доказательство достаточно провести для случая двух примыкающих дуг Λ_1 и Λ_2. Обозначим общий конец дуг Λ_1 и Λ_2 через C, а вторые их концы—через A и B. Пусть $\Gamma=A_0A_1\ldots A_k$—произвольная вписанная в дугу Λ «ломаная» ($A_0=A$, $A_k=B$). Если точка C не является вершиной «ломаной» Γ, то существует такой номер i ($1\leqslant i\leqslant k$), что точки $A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, C, A_i, \ldots, A_k$ последовательно расположены на дуге Λ. Обозначим «ломаную» $A_0A_1\ldots A_{i-1}C$, вписанную в дугу Λ_1, через Γ_1, а «ломаную» $CA_i\ldots A_k$, вписанную в дугу Λ_2, — через Γ_2. Тогда мы имеем:

$$l(\Gamma)=\rho(A_0, A_1)+\ldots+\rho(A_{i-1}, A_i)+\ldots+\rho(A_{k-1}, A_k)\leqslant$$
$$\leqslant\rho(A_0, A_1)+\ldots+(\rho(A_{i-1}, C)+\rho(C, A_i))+\ldots+\rho(A_{k-1}, A_k)=$$
$$=l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)\leqslant M_1'+M_2'.$$

Если же точка C является вершиной ломаной Γ, например $C=A_i$, то $l(\Gamma)=l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)$, где $\Gamma_1=A_0\ldots A_i$, $\Gamma_2=A_i\ldots A_k$, и потому $l(\Gamma)\leqslant M_1'+M_2'$. Таким образом, в любом случае $l(\Gamma)\leqslant M_1'+M_2'$.

Следствие. *Если простая дуга* Λ *составлена из спрямляемых простых дуг* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, *последовательно примыкающих друг к другу, то дуга* Λ *спрямляема.*

3.5. Функции с ограниченным изменением. Пусть $f(t)$—некоторая функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Напомним, что f называется *функцией с ограниченным изменением*, если существует такое положительное число M'', что для любых точек $a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b$ (k произвольно) выполнено неравенство

$$|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+\ldots+|f(t_{k-1})-f(t_k)|\leqslant M''.$$

Если функция $f(t)$ *монотонна на отрезке* $[a, b]$, *то она обладает ограниченным изменением.* Например, если $f(t)$—возрастающая функция (т. е. $f(t')>f(t'')$ при $t'>t''$), то мы имеем:

$$|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+\ldots+|f(t_{k-1})-f(t_k)|=$$
$$=(f(t_1)-f(t_0))+(f(t_2)-f(t_1))+\ldots+(f(t_k)-f(t_{k-1}))=f(b)-f(a).$$

Если функция $f(t)$ *имеет на отрезке* $[a, b]$ *непрерывную производную, то функция* $f(t)$ *обладает ограниченным изменением.*

Действительно, так как производная $f'(t)$ функции $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена, т. е. существует такое число K, что $|f'(t)| \leqslant K$ для любой точки $t \in [a, b]$. Следовательно, для любых точек t', t'' отрезка Δ мы имеем: $f(t') - f(t'') = f'(\xi)(t' - t'')$, где ξ — некоторая точка отрезка Δ, лежащая между t' и t'', и потому $|f(t') - f(t'')| \leqslant K \cdot |t' - t''|$. Таким образом,

$$|f(t_0) - f(t_1)| + |f(t_1) - f(t_2)| + \ldots + |f(t_{k-1}) - f(t_k)| \leqslant$$
$$\leqslant K(|t_0 - t_1| + |t_1 - t_2| + \ldots + |t_{k-1} - t_k|) = K(b - a).$$

Установим теперь следующий критерий спрямляемости простой дуги:

Теорема. *Пусть Λ — некоторая простая дуга на плоскости и f — непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка $\Delta = [a, b]$ на множество Λ. Введем на плоскости декартовы координаты x, y и обозначим координаты точки $f(t)$ через $x_f(t)$ и $y_f(t)$. Простая дуга Λ в том и только в том случае спрямляема, если обе функции $x_f(t)$, $y_f(t)$, определенные на отрезке Δ, обладают ограниченным изменением.*

Доказательство. Предположим, что простая дуга Λ спрямляема, и пусть M' — такое число, что длина всякой вписанной в Λ «ломаной» не превосходит M'. Выберем на отрезке Δ точки $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ и положим $f(t_i) = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда для вписанной «ломаной» $\Gamma = A_0 A_1 \ldots A_k$ мы имеем $l(\Gamma) \leqslant M'$, т. е. $\rho(A_0, A_1) + \rho(A_1, A_2) + \ldots + \rho(A_{k-1}, A_k) \leqslant M'$. Но так как точка A_i имеет координаты $x_f(t_i)$, $y_f(t_i)$, то

$$|x_f(t_{i-1}) - x_f(t_i)| \leqslant \rho(A_{i-1}, A_i),$$
$$|y_f(t_{i-1}) - y_f(t_i)| \leqslant \rho(A_{i-1}, A_i)$$

(ибо катет прямоугольного треугольника не превосходит его гипотенузы). Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} |x_f(t_{i-1}) - x_f(t_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \rho(A_{i-1}, A_i) \leqslant M',$$
$$\sum_{i=1}^{k} |y_f(t_{i-1}) - y_f(t_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \rho(A_{i-1}, A_i) \leqslant M',$$

и потому каждая из функций $x_f(t)$, $y_f(t)$ обладает ограниченным изменением.

Обратно, пусть Λ — такая простая дуга, что функции $x_f(t)$ и $y_f(t)$ обладают ограниченным изменением. Обозначим через M''

такое число, что для любых точек $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} |x_f(t_{i-1}) - x_f(t_i)| \leqslant M'', \qquad \sum_{i=1}^{k} |y_f(t_{i-1}) - y_f(t_i)| \leqslant M''.$$

Пусть, далее, $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$ — произвольная вписанная «ломаная» дуги Λ. Выберем такие числа $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, что $f(t_i) = A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Так как гипотенуза прямоугольного треугольника меньше суммы его катетов, то $\rho(A_{i-1}, A_i) \leqslant |x_f(t_{i-1}) - x_f(t_i)| + |y_f(t_{i-1}) - y_f(t_i)|$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(A_{i-1}, A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_f(t_{i-1}) - x_f(t_i)| + \sum_{i=1}^{k} |y_f(t_{i-1}) - y_f(t_i)| \leqslant 2M''.$$

Таким образом, длина любой вписанной «ломаной» Γ не превосходит $2M''$, и потому простая дуга Λ спрямляема.

Следствие 1. *Всякая гладкая простая дуга* (стр. 38) *спрямляема.*

Следствие 2. *Всякая кусочно гладкая простая дуга* (стр. 38) *спрямляема* (см. п. **3.4**).

3.6. Связь с теорией площадей. *Всякая спрямляемая простая дуга Λ является нуль-множеством в смысле теории площадей* (т. е. может быть заключена в многоугольную фигуру произвольно малой площади, см. стр. 34).

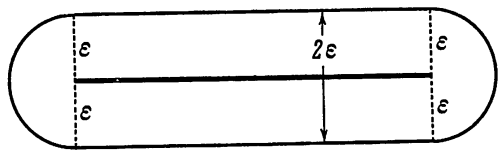


Рис. 20.

В самом деле, пусть M — число, участвующее в определении спрямляемости (п. **3.2**), и ε — некоторое положительное число. Выберем ломаную L, удовлетворяющую условиям $l(L) \leqslant M$, $d(L, \Lambda) < \varepsilon$. Тогда мы имеем $\Lambda \subset O(L, \varepsilon)$, и доказываемое предложение непосредственно вытекает из приводимой ниже леммы.

Лемма. Пусть L — *произвольная ломаная. Тогда множество* $O(L, \varepsilon)$ *представляет собой квадрируемую фигуру площади* $\leqslant \left(l(L) + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon$.

Доказательство легко провести индукцией по числу звеньев ломаной L. В случае одного звена оно ясно из рис. 20 [площадь фигуры $O(L, \varepsilon)$ в этом случае равна $\left(l(L) + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon$]. Пусть лемма уже доказана для ломаных, имеющих $< k$ звеньев, и $L = A_0A_1 \ldots A_k$ —

ломаная, имеющая k звеньев. Положим $L' = A_0A_1 \ldots A_{k-1}$, $L'' = A_{k-1}A_k$. Тогда

$$s(O(L, \varepsilon)) = s(O(L', \varepsilon) + O(L'', \varepsilon)) =$$
$$= s(O(L', \varepsilon)) + s(O(L'', \varepsilon)) - s(O(L', \varepsilon) \cdot O(L'', \varepsilon))$$

(см. стр. 45). В силу предположения индукции, мы имеем:

$$s(O(L', \varepsilon)) \leqslant \left(l(L') + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon,$$

$$s(O(L'', \varepsilon)) \leqslant \left(l(L'') + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon;$$

кроме того, $s(O(L', \varepsilon) \cdot O(L'', \varepsilon)) \geqslant \pi\varepsilon^2$, так как пересечение $O(L', \varepsilon) \cdot O(L'', \varepsilon)$ содержит по крайней мере круг радиуса ε с центром в точке A_{k-1} (рис. 21). Таким образом,

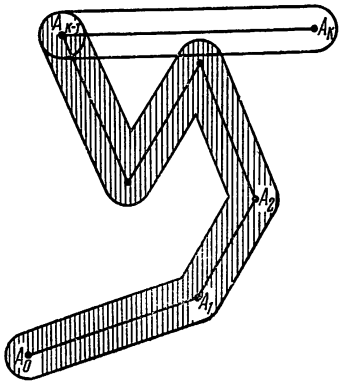


Рис. 21.

$$s(O(L, \varepsilon)) \geqslant \left(l(L') + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon +$$
$$+ \left(l(L'') + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon - \pi\varepsilon^2 =$$
$$= \left(l(L') + l(L'') + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon =$$
$$= \left(l(L) + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right) 2\varepsilon,$$

и лемма доказана.

На стр. 42—44 приведен пример простой дуги, не являющейся нуль-множеством в смысле теории площадей. Следовательно, эта простая дуга неспрямляема.

3.7. Простые замкнутые линии. Часто приходится рассматривать значительно более общие «линии», чем простые дуги. Например, естественно рассматривать фигуры, являющиеся объединением конечного числа простых дуг, попарно не имеющих общих внутренних (т. е. неконцевых) точек. Особый интерес представляют *простые замкнутые линии*, т. е. линии, представляющиеся в виде объединения двух (не имеющих общих внутренних точек) простых дуг с общими концами (рис. 22). Примерами являются окружность, эллипс, контур треугольника или квадрата и т. п.

Как и в случае простых дуг, на простой замкнутой линии можно рассматривать последовательное (циклическое) расположение точек, вписанные «ломаные» (которые будут уже *замкнутыми*

цепочками отрезков, рис. 23) и т. д. Определение спрямляемости (п. **3.2**) и предложения, доказанные в пп. **3.1, 3.3, 3.4, 3.6,** непосредственно обобщаются на случай простых замкнутых линий.

Простую замкнутую линию можно также определить как образ отрезка $[a, b]$ при таком непрерывном отображении f, которое

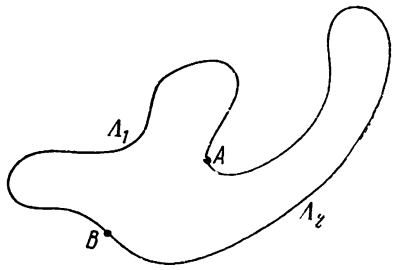


Рис. 22.

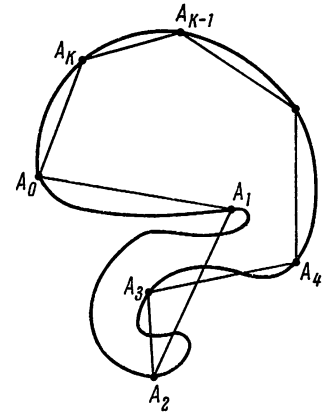


Рис. 23.

переводит концы a, b отрезка в одну и ту же точку, а на полуинтервале $[a, b)$ взаимно однозначно. Это позволяет рассматривать функции x_f и y_f (ср. стр. 40). Теорема п. **3.5** (с тем же доказательством) сохраняется и для простых замкнутых линий.

§ 4. Длина на классе спрямляемых линий

4.1. Аксиоматическое определение длины. *Длиной* мы будем называть функцию l, заданную на классе всех спрямляемых простых дуг и удовлетворяющую условиям (α)—(ε) см. стр. 89 и 98). Мы покажем в следующих пунктах, что на классе всех спрямляемых дуг такая функция l существует и притом только одна (теорема существования и единственности).

4.2. Доказательство теоремы существования. Пусть Λ — произвольная спрямляемая простая дуга. Тогда существует такое положительное число M', что длина любой вписанной в Λ «ломаной» не превосходит M' (см. п. **3.3**), т. е. длины вписанных «ломаных» ограничены. Точную верхнюю грань длин вписанных в Λ «ломаных» обозначим через $\lambda(\Lambda)$. Мы покажем в этом пункте, что *определенная таким образом функция* λ *является длиной, т. е. удовлетворяет условиям* (α)—(ε).

Условие (α). Пусть Λ — произвольная спрямляемая простая дуга. Обозначим ее концевые точки через A и B. Так как отрезок AB является вписанной «ломаной» линии Λ, то $\lambda(\Lambda) \geqslant l(AB) = \rho(A, B) > 0$.

Условие (β) достаточно доказать для случая, когда простая дуга Λ составлена из двух дуг Λ_1 и Λ_2, имеющих общую концевую точку C и не имеющих других общих точек. Любая «ломаная», вписанная в дугу Λ_1, имеет длину $\leqslant \lambda(\Lambda_1)$ (по определению верхней грани), а любая «ломаная», вписанная в дугу Λ_2, имеет длину $\leqslant \lambda(\Lambda_2)$. Следовательно, любая «ломаная» Γ, вписанная в дугу Λ, имеет длину $l(\Gamma) \leqslant \lambda(\Lambda_1) + \lambda(\Lambda_2)$ (см. п. **3.4**), и потому $\lambda(\Lambda) \leqslant \lambda(\Lambda_1) + \lambda(\Lambda_2)$.

Пусть теперь $\Gamma_1 = A_0A_1 \ldots A_{k-1}C$ и $\Gamma_2 = CB_1 \ldots B_l$ — такие «ломаные», вписанные в дуги Λ_1 и Λ_2 соответственно, что $l(\Gamma_1) > \lambda(\Lambda_1) - \varepsilon$, $l(\Gamma_2) > \lambda(\Lambda_2) - \varepsilon$ (такие «ломаные» существуют при любом $\varepsilon > 0$, в силу определения точной верхней грани). Тогда $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_{k-1}CB_1 \ldots B_l$ представляет собой «ломаную», вписанную в дугу Λ, и для ее длины мы имеем неравенство $l(\Gamma) = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2) > \lambda(\Lambda_1) + \lambda(\Lambda_2) - 2\varepsilon$. Из этого в силу определения функции λ, мы получаем $\lambda(\Lambda) > \lambda(\Lambda_1) + \lambda(\Lambda_2) - 2\varepsilon$. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\lambda(\Lambda) \geqslant \lambda(\Lambda_1) + \lambda(\Lambda_2)$.

Таким образом, $\lambda(\Lambda) = \lambda(\Lambda_1) + \lambda(\Lambda_2)$.

Условие (γ) очевидно.

Условие (δ). Всякая «ломаная», вписанная в единичный отрезок Δ, представляет собой разбиение единичного отрезка несколькими точками деления на конечное число отрезков. Следовательно, длина всякой вписанной «ломаной» равна единице, и потому $\lambda(\Delta) = 1$.

Условие (ε). Пусть Λ — спрямляемая простая дуга и ε — положительное число. Выберем такую вписанную в дугу Λ «ломаную» $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$, что $l(\Gamma) > \lambda(\Lambda) - \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть, далее, $\delta > 0$ — такое число, что всякая ломаная L, для которой $d(\Lambda, L) < \delta$, удовлетворяет условию $l(L) > l(\Gamma) - \frac{\varepsilon}{2}$ (см. п. **3.1**) и, следовательно, условию $l(L) > \lambda(\Lambda) - \varepsilon$.

Пусть теперь Λ' — произвольная спрямляемая простая дуга, удовлетворяющая условию $d(\Lambda, \Lambda') < \frac{\delta}{2}$. Выберем такую ломаную L, что $d(\Lambda', L) < \frac{\delta}{2}$ и $l(L) \leqslant \lambda(\Lambda')$ (см. предложение (б) в п. **3.3**). Из соотношений $d(\Lambda, \Lambda') < \frac{\delta}{2}$, $d(\Lambda', L) < \frac{\delta}{2}$ вытекает, что $d(\Lambda, L) < \delta$ (см. п. **1.5**). Следовательно, $l(L) > \lambda(\Lambda) - \varepsilon$. Сопоставляя это неравенство с соотношением $\lambda(\Lambda') \geqslant l(L)$, мы получаем $\lambda(\Lambda') > \lambda(\Lambda) - \varepsilon$. Итак, для любой спрямляемой простой дуги Λ', удовлетворяющей условию $d(\Lambda, \Lambda') < \frac{\delta}{2}$, мы имеем $\lambda(\Lambda') > \lambda(\Lambda) - \varepsilon$, и условие (ε) выполнено.

Таким образом, теорема существования полностью доказана.

4.3. Доказательство теоремы единственности. Пусть λ — функция, построенная в п. **4.2**, а l — произвольная функция, определенная на классе всех спрямляемых простых дуг и удовлетворяющая условиям (α) — (ε). Мы должны доказать, что функции λ и l совпадают.

Прежде всего заметим, что для любой ломаной L мы имеем $\lambda(L) = l(L)$, так как обе функции λ, l удовлетворяют условиям (α) — (δ) (см. п. **1.3**).

Пусть теперь Λ — произвольная спрямляемая простая дуга и ε — положительное число. Пусть, далее, $\delta > 0$ — такое число, что всякая спрямляемая простая дуга Λ', для которой $d(\Lambda, \Lambda') < \delta$, удовлетворяет условию $l(\Lambda') > l(\Lambda) - \varepsilon$ (см. условие (ε)). Выберем такую ломаную L, что $d(\Lambda, L) < \delta$ и $\lambda(L) \leqslant \lambda(\Lambda)$ (см. предложение (б) в п. **3.3**). Тогда мы имеем: $\lambda(\Lambda) \geqslant \lambda(L) = l(L) > l(\Lambda) - \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\lambda(\Lambda) \geqslant l(\Lambda)$.

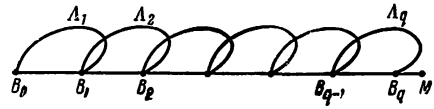


Рис. 24.

Остается доказать, что для любой спрямляемой простой дуги Λ справедливо и обратное неравенство $\lambda(\Lambda) \leqslant l(\Lambda)$. Допустим, что это неверно, т. е. что существует простая дуга Λ_0, для которой $\lambda(\Lambda_0) > l(\Lambda_0)$. Положим $\varepsilon = \left(\frac{\lambda(\Lambda_0) - l(\Lambda_0)}{\lambda(\Lambda_0)}\right)^2$, так что $l(\Lambda_0) = (1 - \sqrt{\varepsilon})\,\lambda(\Lambda_0)$. Пусть, далее, Δ — единичный отрезок и δ — такое положительное число, что для любой спрямляемой простой дуги Λ, удовлетворяющей условию $d(\Lambda, \Delta) < \delta$, выполнено соотношение $l(\Lambda) > l(\Delta) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$ (см. условие (ε)). Наконец, пусть $\sigma > 0$ — такое число, что всякая простая дуга $\Lambda \subset O(\Delta, \sigma)$, концы которой отстоят от концов отрезка Δ менее чем на σ, удовлетворяет условию $d(\Lambda, \Delta) < \delta$. Число σ мы будем, кроме того, предполагать меньшим, чем δ. Выберем такую «ломаную» $\Gamma = A_0 A_1 \ldots A_k$, вписанную в дугу Λ_0, что $\lambda(\Gamma) > \lambda(\Lambda_0) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\lambda(\Lambda_0)$, т. е. $(1 + \sqrt{\varepsilon})\,\lambda(\Gamma) > \lambda(\Lambda_0)$. Тогда мы имеем:

$$l(\Lambda_0) = (1 - \sqrt{\varepsilon})\lambda(\Lambda_0) < (1 - \sqrt{\varepsilon})(1 + \sqrt{\varepsilon})\,\lambda(\Gamma) = (1 - \varepsilon)\lambda(\Gamma). \quad (10)$$

Так как добавление к точкам $A_0, A_1, \ldots, A_k$ новых точек может только увеличить длину $\lambda(\Gamma) = l(\Gamma)$ вписанной «ломаной» Γ (см. соотношение (4)), то мы можем предполагать дополнительно, что точки $A_0, A_1, \ldots, A_k$ разбивают дугу Λ_0 на части $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, каждая из которых имеет диаметр $< \sigma$, так что, в частности, $\rho(A_{i-1}, A_i) < \sigma$. Если бы для каждой из дуг Λ_i было выполнено соотношение $l(\Lambda_i) \geqslant (1 - \varepsilon)\,\rho(A_{i-1}, A_i)$, то, складывая эти соотношения и

пользуясь свойством (β), мы получили бы $l(\Lambda_0) \geqslant (1-\varepsilon)\,\lambda(\Gamma)$, что противоречит соотношению (10). Следовательно, по крайней мере для одного $i = 1, 2, \ldots, k$ выполнено соотношение $l(\Lambda_i) < (1-\varepsilon)\,\rho(A_{i-1}, A_i)$. Выберем такое значение i и отложим на единичном отрезке Δ, начиная от его левого конца B_0, отрезки B_0B_1, B_1B_2, ..., $B_{q-1}B_q$, равные отрезку $A_{i-1}A_i$, причем откладывание произведем столько раз, что остаток B_qM (от точки B_q до правого конца M отрезка Δ) будет меньше, чем $A_{i-1}A_i$, так что $\rho(B_q, M) < \sigma$. Далее, для каждого $j = 1, 2, \ldots, q$ построим дугу Λ_j', имеющую концы B_{j-1} и B_j и равную дуге Λ_i (рис. 24). Тогда мы имеем $l(\Lambda_j') = l(\Lambda_i) < (1-\varepsilon)\,\rho(A_{i-1}, A_i) = (1-\varepsilon)\,\rho(B_{j-1}, B_j)$, и потому

$$l(\Lambda_1') + l(\Lambda_2') + \ldots + l(\Lambda_q') < (1-\varepsilon)\,\rho(B_0, B_q) \leqslant 1-\varepsilon. \quad (11)$$

Кроме того, множество $Q = \Lambda_1' + \Lambda_2' + \ldots + \Lambda_q'$ содержится в $O(\Delta, \sigma)$, так как диаметр каждой дуги Λ_j' меньше σ.

Разумеется, множество Q может не являться простой дугой (рис. 24). Однако мы докажем, что для любого $j = 1, 2, \ldots, q$ существует простая дуга $\Lambda_j^* \subset Q$ с концами в точках B_0 и B_j, длина $l(\Lambda_j^*)$ которой не превосходит $l(\Lambda_1') + \ldots + l(\Lambda_j')$. В самом деле, при $j = 1$ за дугу Λ_1^* можно принять Λ_1'. Пусть уже построена простая дуга $\Lambda_{j-1}^* \subset Q$ с концевыми точками B_0 и B_{j-1}, для которой $l(\Lambda_{j-1}^*) \leqslant l(\Lambda_1') + \ldots + l(\Lambda_{j-1}')$. Рассматривая дуги Λ_{j-1}^* и Λ_j', мы, согласно свойству (ж) п. **2.1**, найдем такую точку C, принадлежащую обеим дугам Λ_{j-1}^*, Λ_j', что часть Λ_{j-1}^{**}, дуги Λ_{j-1}^*, заключенная между точками B_0 и C, и часть Λ_j'' дуги Λ_j', заключенная между точками C и B_j, имеют единственную общую точку C. Таким образом, мы получаем простую дугу $\Lambda_{j-1}^{**} + \Lambda_j'' \subset Q$, имеющую B_0 и B_j своими концевыми точками. Ее длина $l(\Lambda_{j-1}^{**}) + l(\Lambda_j'')$ не превосходит $l(\Lambda_{j-1}^*) + l(\Lambda_j')$, т. е. не превосходит $l(\Lambda_1') + \ldots + l(\Lambda_j')$. Таким образом, за Λ_j^* можно принять дугу $\Lambda_{j-1}^{**} + \Lambda_j''$.

Проведенная индукция позволяет найти такую спрямляемую простую дугу $\Lambda_q^* \subset Q$ с концевыми точками B_0 и B_q, что $l(\Lambda_q^*) \leqslant l(\Lambda_1') + \ldots + l(\Lambda_q') < 1-\varepsilon$ (см. (11)). Но так как $\Lambda_q^* \subset Q \subset O(\Delta, \sigma)$, а концы дуги Λ_q^* отстоят от концов отрезка Δ менее чем на σ, то $d(\Delta, \Lambda_q^*) < \delta$, и потому $l(\Lambda_q^*) > 1-\varepsilon$ (см. определение чисел σ и δ). Полученное противоречие показывает, что соотношение $\lambda(\Lambda_0) > l(\Lambda_0)$ не может иметь места. Тем самым теорема единственности полностью доказана.

Замечание. Из доказательства теорем существования и единственности ясно, что длина спрямляемой простой дуги Λ равна верхней грани длин вписанных в нее «ломаных». Поэтому из предложений (а) и (б) п. **3.3** вытекает также, что *длина спрямляемой дуги Λ равна нижней грани чисел M, входящих в определение спрямляемости* (см. п. **3.2**). В случае выпуклых линий (как замкнутых, так и незамкнутых), можно определять длину также с помощью *описанных ломаных* [1]).

В приведенном доказательстве теоремы единственности условие (ε) было дважды использовано. Естественно возникает вопрос, насколько существенно условие (ε) для доказательства теоремы единственности. Может быть, существует другое доказательство, не использующее свойства (ε)? Если бы такое доказательство существовало, то это означало бы, что свойство (ε) *несущественно* для определения длины, и потому длина любой спрямляемой линии определялась бы теми же аксиомами (α)—(δ), что и длина прямолинейного отрезка (см. п. **1.2**). Нижеследующий пример показывает, что *доказать теорему единственности без условия* (ε) *невозможно*. Именно, мы приведем примеры функций, заданных на классе всех спрямляемых простых дуг, удовлетворяющих условиям (α)—(δ), но не совпадающих с длиной.

Пусть Λ — произвольная спрямляемая простая дуга. Обозначим через $l^*(\Lambda)$ точную верхнюю грань таких чисел μ, что существует конечное число прямолинейных отрезков с суммой длин μ, содержащихся в множестве Λ и попарно не имеющих общих точек. Легко проверяется, что функция l^* удовлетворяет условиям (α)—(δ). Кроме того, $0 \leqslant l^*(\Lambda) \leqslant l(\Lambda)$ для любой простой дуги Λ (где l — обычная длина, определенная в п. **4.1**); равенство $l^*(\Lambda) = l(\Lambda)$ выполняется, например, для ломаных, а равенство $l^*(\Lambda) = 0$ — только для простых дуг, не содержащих ни одного прямолинейного куска.

Вообще, для любого неотрицательного значения α функция $\alpha l + (1-\alpha) l^*$ удовлетворяет условиям (α)—(δ), но при $\alpha \neq 1$ не совпадает с l. В частности, при $\alpha = 2$ мы получаем функцию $l^{**} = 2l - l^*$, обладающую тем свойством, что $l^{**}(\Lambda) \geqslant l(\Lambda)$ для любой простой дуги Λ; если дуга Λ не содержит ни одного прямолинейного куска (например, если Λ — полуокружность), то $l^{**}(\Lambda) = 2l(\Lambda)$.

4.4. Основные свойства длины. а) Отрезок — кратчайшая линия. *Если Λ — простая дуга с концевыми точками A и B, то для ее длины $l(\Lambda)$ мы имеем неравенство $l(\Lambda) \geqslant \rho(A, B)$; равенство имеет место в том и только в том случае, если дуга Λ совпадает с отрезком AB.*

[1]) См. статью «Выпуклые фигуры и тела» в этой книге ЭЭМ.

В самом деле, отрезок AB является одной из вписанных «ломаных» дуги Λ, а так как $l(\Lambda)$ представляет собой верхнюю грань длин вписанных «ломаных», то $l(\Lambda) \geqslant \rho(A, B)$. Если дуга Λ содержит хотя бы одну точку C, не принадлежащую отрезку AB, то, обозначая через Γ вписанную «ломаную» ACB, мы получим $l(\Lambda) \geqslant l(\Gamma) = \rho(A, C) + \rho(C, B) > \rho(A, B)$. Таким образом, равенство $l(\Lambda) = \rho(A, B)$ может иметь место только в том случае, если вся дуга Λ содержится в отрезке AB. Но простая дуга с концами A, B, содержащаяся целиком в отрезке AB, должна совпадать с этим отрезком. Действительно, пусть f — непрерывное взаимно однозначное отображение числового отрезка $[c, d]$ на простую дугу Λ. Для любой точки $t \in [c, d]$ положим $\varphi(t) = \rho(A, f(t))$. Тогда $\varphi(t)$ — непрерывная функция (см. стр. 103), которая в концах отрезка $[c, d]$ принимает значения 0 и $\rho(A, B)$. Так как непрерывная функция принимает все промежуточные значения (см. ЭЭМ, кн. III, стр. 216), то для любой точки C отрезка AB найдется такое значение $t \in [c, d]$, что $f(t) = C$. Таким образом, простая дуга Λ совпадает со всем отрезком AB, и сформулированное предложение полностью доказано.

б) Положительность и монотонность длины. *Длина любой спрямляемой простой дуги является положительным числом.* Действительно, пусть A и B — концы простой дуги Λ. Тогда $l(\Lambda) \geqslant \rho(A, B) > 0$.

Если простая дуга Λ' является частью спрямляемой простой дуги Λ, то $l(\Lambda') \leqslant l(\Lambda)$, причем равенство имеет место только тогда, когда Λ' совпадает с Λ.

Доказательство очевидным образом вытекает из положительности длины.

в) Поведение длины при преобразованиях подобия. *Если простая дуга Λ' получается из дуги Λ преобразованием подобия с коэффициентом* λ (см. стр. 29), *то* $l(\Lambda') = \lambda l(\Lambda)$.

В самом деле, пусть α — преобразование подобия с коэффициентом λ. Тогда, по определению подобного преобразования, длина любого отрезка AB и длина отрезка $A'B'$, в который он переходит при преобразовании α, связаны соотношением $l(A'B') = \lambda l(AB)$. Иначе говоря, если Λ — прямолинейный отрезок, то $l(\Lambda') = \lambda l(\Lambda)$, в силу определения подобного преобразования. Свойство в) утверждает, что это же соотношение справедливо и для любой спрямляемой простой дуги Λ. Для доказательства заметим прежде всего, что из справедливости свойства в) для отрезков вытекает его справедливость для ломаных. Ломаная, вписанная в дугу Λ, переходит при преобразовании α в ломаную, вписанную в дугу Λ'. Из этого и вытекает справедливость свойства в) в общем случае.

Из доказанного вытекает, что *при преобразованиях подобия сохраняется отношение длин, т. е. если* α *— преобразование подобия, то* $l(\Lambda_1):l(\Lambda_2)=l(\alpha(\Lambda_1)):l(\alpha(\Lambda_2))$ *для любых спрямляемых простых дуг* Λ_1, Λ_2 [1]).

г) Длина как предел. *Пусть* Λ *— произвольная спрямляемая простая дуга и* ε *— положительное число. Тогда существует такое число* $\sigma>0$, *что всякая вписанная в дугу* Λ *«ломаная»* Γ, *каждое звено которой меньше* σ, *удовлетворяет неравенству* $l(\Gamma)>l(\Lambda)-\varepsilon$.

В самом деле, обозначим через δ число, существование которого утверждается в условии (ε). Пусть, далее, $\sigma>0$ — такое число, что всякая простая дуга $\Lambda'\subset O(\Lambda,\sigma)$, концы которой отстоят от концов дуги Λ менее чем на σ, удовлетворяет условию $d(\Lambda,\Lambda')<\delta$. Покажем, что число σ — искомое.

Пусть $\Gamma=A_0A_1\ldots A_k$ — вписанная в дугу Λ «ломаная», каждое звено которой имеет длину $<\sigma$. Тогда, очевидно, $\Gamma\subset O(\Lambda,\sigma)$. Выберем такую ломаную $L\subset\Gamma$ с концевыми точками A_0 и A_k, что $l(L)\leqslant l(\Gamma)$ (см. доказательство предложения (б) в п. **3.3**). Тогда $L\subset\Gamma\subset O(\Lambda,\sigma)$, и так как концы ломаной L совпадают с концами простой дуги Λ, то $d(\Lambda,L)<\delta$. Из этого, в силу условия (ε), вытекает, что $l(L)>l(\Lambda)-\varepsilon$, и потому, подавно, $l(\Gamma)>l(\Lambda)-\varepsilon$.

Доказанному предложению можно также придать следующую форму:

Пусть Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n, ... *— такая последовательность «ломаных», вписанных в спрямленную простую дугу* Λ, *что длина наибольшего из звеньев «ломаной»* Γ_n *стремится к нулю при* $n\to\infty$. *Тогда* $l(\Lambda)=\lim\limits_{n\to\infty} l(\Gamma_n)$.

Эти предложения справедливы также и для простых замкнутых линий (см. п. **3.7**).

д) Длина окружности. Пусть Λ — окружность радиуса r. Согласно сказанному в п. **3.7**, окружность является спрямляемой линией. Обозначим через L_n правильный 2^n-угольник, вписанный в эту окружность, через l_n — длину его периметра, через s_n — его площадь, а через h_n — апофему, т. е. длину перпендикуляра, опущенного из центра на сторону 2^n-угольника. Величины l_n, h_n и s_n связаны очевидным соотношением

$$s_n=1/2\,l_nh_n. \tag{12}$$

При $n\to\infty$ величина s_n имеет своим пределом площадь круга K, ограниченного окружностью Λ (см. стр.46—47): $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s(K)$; далее, величина l_n имеет своим пределом *длину окружности* (см. выше,

[1]) Как известно, аффинные преобразования этим свойством не обладают. Однако *отношение длин параллельных отрезков сохраняется при аффинных преобразованиях* (см. стр. 77 и 104).

предложение г)): $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = l(\Lambda)$; наконец, величина h_n имеет, очевидно, предел r: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = r$. Таким образом, переходя в равенстве (12) к пределу при $n \to \infty$, мы получаем $s(K) = \frac{1}{2} r \cdot l(\Lambda)$. Так как $s(K) = \pi r^2$ (см. стр. 49), то мы находим отсюда $l(\Lambda) = 2\pi r$, где π — то же самое число, которое участвует в формуле для площади круга.

е) Близость первого порядка и роль вписанных ломаных. Из доказательства теоремы существования (см. стр. 117—118) и из приведенного выше свойства г) длины выясняется особая роль вписанных ломаных. Почему же именно вписанные ломаные так удобны для определения длины? Мы выясним этот вопрос для случая гладких дуг.

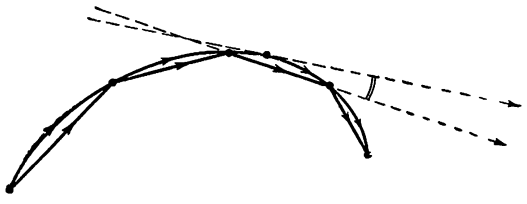


Рис. 25.

Первое объяснение, которое приходит в голову, заключается в том, что вписанная в гладкую дугу Λ ломаная очень «близка» к дуге Λ, если звенья ломаной имеют малую длину. Однако пример, приведенный на стр. 99, убеждает нас в том, что близкая к дуге Λ ломаная может иметь длину, весьма сильно отличающуюся от длины линии Λ. Правильное объяснение «хороших» свойств вписанных ломаных заключается в том, что *не только сама вписанная ломаная близка к дуге* Λ, *но и направления звеньев вписанной ломаной близки к направлению линии* Λ *в соседних точках* (рис. 25). В примере на стр. 99 это не было выполнено: ступенчатые ломаные хотя и располагались все ближе и ближе к отрезку AC, но направления звеньев ступенчатых ломаных не были все более близкими к направлению отрезка AC (звенья ступенчатой ломаной составляли с отрезком AC угол 45°). Именно этим и объясняется тот факт, что предел длин ступенчатых ломаных не равен длине отрезка AC.

Говорят, что ломаная L находится в *ε-близости нулевого порядка* от простой дуги Λ, если $L \subset O(\Lambda, \varepsilon)$ и концы ломаной L отстоят от концов дуги Λ менее чем на ε. Ломаная L находится от гладкой дуги Λ в *ε-близости первого порядка*, если она находится от Λ в ε-близости нулевого порядка, и, кроме того, для любых двух точек $x \in L$, $y \in \Lambda$, расстояние между которыми меньше ε, звено линии L, проходящее через точку x, и касательная к линии Λ, проведенная через точку y, составляют между собой угол, меньший ε (рис. 26). Наконец, будем говорить, что последовательность ломаных $L_1, L_2, \ldots$ *сильно сходится* к глад-

кой простой дуге Λ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число q_ε, что при $n > q_\varepsilon$ ломаная L_n находится в ε-близости первого порядка от дуги Λ.

Имеют место следующие две теоремы, в значительной степени проясняющие роль вписанных ломаных в определении длины:

1. *Если последовательность ломаных* $L_1, L_2, \ldots$ *сильно сходится к гладкой простой дуге* Λ, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n) = l(\Lambda)$.

2. *Пусть* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ — *такая последовательность ломаных, вписанных в гладкую простую дугу* Λ, *что длина наибольшего из звеньев ломаной* Γ_n *стремится к нулю при* $n \to \infty$. *Тогда последовательность ломаных*

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$$

сильно сходится к дуге Λ.

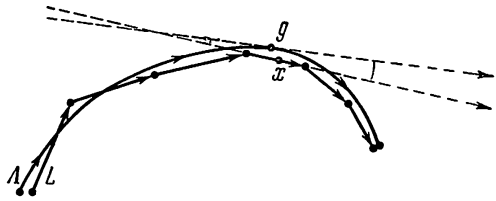


Рис 26.

Доказательства этих теорем сравнительно несложны, но мы их приводить не будем.

ж) Вычисление длины с помощью интеграла. *Пусть* Λ — *элементарная гладкая простая дуга* (см. стр. 37), *являющаяся графиком функции* $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 27). *Тогда*

$$l(\Lambda) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \tag{13}$$

В самом деле, пусть $\Gamma = A_0 A_1 \ldots A_k$ — некоторая вписанная ломаная дуга Λ (она, очевидно, не имеет самопересечений). Обозначим

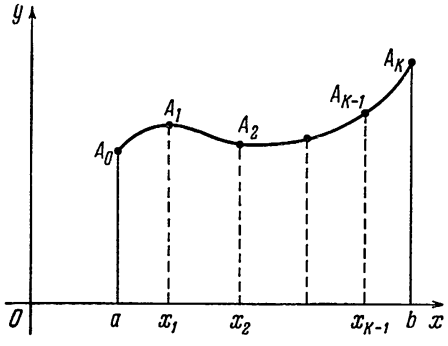


Рис. 27.

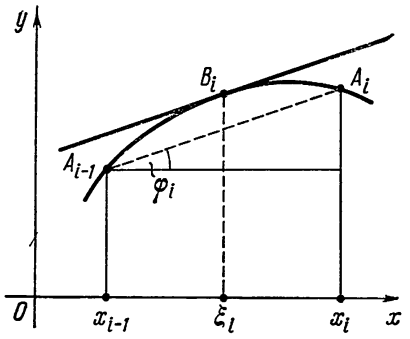


Рис. 28.

абсциссы точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ через $a = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = b$ (рис. 27). Угол, образованный отрезком $A_{i-1}A_i$ с осью абсцисс, обозначим через φ_i (рис. 28). Между точками A_{i-1} и A_i

имеется на дуге Λ такая точка B_i, что касательная к дуге Λ в этой точке параллельна прямой $A_{i-1}A_i$ (рис. 28; см. также *теорему Лагранжа*, ЭЭМ, кн. III, стр. 342—343). Абсциссу точки B_i обозначим через ξ_i. Тогда $\operatorname{tg}\varphi_i = y'(\xi_i)$. Далее, длина хорды $A_{i-1}A_i$ равна (см. рис. 28)

$$\rho(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}.$$

Таким образом,

$$l(\Gamma) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + (y'(\xi_i)^2)}\,(x_i - x_{i-1}). \tag{14}$$

Если ломаная Γ меняется таким образом, что все звенья ее делаются меньше и меньше, то левая часть равенства (14) приближается к пределу $l(\Lambda)$; правая же часть, представляющая собой интегральную сумму, приближается к пределу, равному $\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$. Это и дает равенство (13).

Аналогично доказывается следующее утверждение:

Пусть Λ — произвольная гладкая простая дуга и f — взаимно однозначное дифференцируемое отображение числового отрезка $[a, b]$ на дугу Λ. Обозначим координаты точки $f(t)$ через $x_f(t)$ и $y_f(t)$. Тогда длина дуги Λ имеет следующее значение:

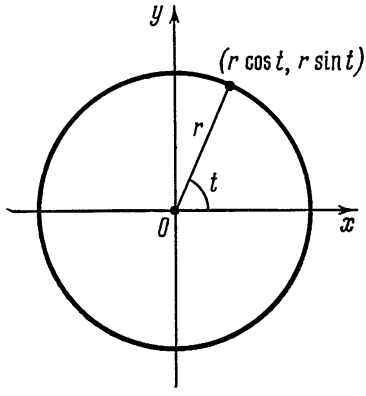


Рис. 29.

$$l(\Lambda) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_f}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_f}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Эта же формула применима и к простым замкнутым дугам (в этом случае $f(a) = f(b)$).

Пример. Полагая $x_f(t) = r\cos t$, $y_f(t) = r\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, мы получаем дифференцируемое отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на окружность Λ радиуса r с центром в начале координат (рис. 29). Таким образом, для длины окружности Λ мы получаем следующее значение:

$$l(\Lambda) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx_f}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_f}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} r\,dt = r\int_0^{2\pi} dt = r\cdot 2\pi = 2\pi r.$$

4.5. Другие определения длины. В этом пункте мы приведем два других определения длины, принадлежащих Г. Минковскому и Ф. Хаусдорфу. Эти определения ценны своей общностью: они позволяют приписать «длину» значительно более общим множествам, чем спрямляемые простые дуги. Для любой спрямляемой простой дуги длина в смысле Минковского и длина в смысле Хаусдорфа совпадают с обычной длиной, определенной выше. Однако, несмотря на все эти достоинства, определения Минковского и Хаусдорфа страдают серьезными недостатками, о которых мы скажем ниже.

Мы рассмотрим определение длины по Минковскому только для случая плоских множеств. Для этого мы сначала введем понятие *меры* ограниченного открытого множества на плоскости. Разобьем плоскость на квадраты ранга n ($n=1, 2, 3, \ldots$) так же, как это было сделано на стр. 57. Если теперь G—открытое ограниченное множество на плоскости, то мы обозначим через α_n число квадратов ранга n, содержащихся целиком в множестве G, и положим $s_n=\alpha_n\cdot 10^{-2n}$. Числа $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ образуют возрастающую последовательность (ср. стр. 57—58), причем эта последовательность ограничена, так как G—ограниченное множество. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, который и называется *мерой* множества G. Меру открытого ограниченного множества G мы будем обозначать символом $m(G)$. Очевидно, что мера обладает следующими двумя свойствами:

1) *если* $G_1\supset G_2$, *то* $m(G_1)\geqslant m(G_2)$;

2) *если открытое множество* G *квадрируемо, то* $m(G)=s(G)$.

(Существуют и другие полезные и интересные свойства меры, но мы их не упоминаем, так как они не будут использоваться ниже.) Заметим, в частности, что если M—произвольное ограниченное множество плоскости, то множество $O(M, r)$ при любом $r>0$ открыто и ограничено, и потому определено число $m(O(M, r))$.

Пусть теперь Δ—произвольный отрезок. Тогда множество $O(\Delta, r)$ квадрируемо, и мы имеем (ср. рис. 20): $m(O(\Delta, r))=s(O(\Delta, r))=2rl(\Delta)+\pi r^2$. Следовательно, $\dfrac{m(O(\Delta, r))}{2r}=l(\Delta)+\dfrac{\pi r}{2}$, и потому $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{m(O(\Delta, r))}{2r}=l(\Delta)$.

Это соображение и лежит в основе определения длины по Минковскому. Именно, *длиной плоского множества* M *в смысле Минковского называется предел*

$$l_{\text{Минк}}(M)=\lim_{r\to 0}\frac{m(O(M, r))}{2r} \tag{15}$$

(если этот предел существует). Множества, для которых предел (15) существует, называются *спрямляемыми в смысле Минковского*, прочие множества — *неспрямляемыми*.

Т е о р е м а. *Для всякой спрямляемой простой дуги* Λ (в смысле п. **3.2**) *выполнено соотношение* $l_{\text{Минк}}(\Lambda)=l(\Lambda)$.

Для доказательства достаточно, очевидно, установить справедливость следующей леммы:

Пусть Λ—*спрямляемая простая дуга и* ε—*положительное число. Тогда существует такое число* $\delta>0$, *что при* $r<\delta$ *выполнены неравенства*

$$l(\Lambda)-\varepsilon<\frac{m(O(\Lambda, r))}{2r}<l(\Lambda)+\varepsilon. \tag{16}$$

Докажем эту лемму. Пусть σ—произвольное положительное число и L—ломаная, удовлетворяющая условиям: $d(\Lambda, L)<\sigma$, $l(L)\leqslant l(\Lambda)$ (см. предложение (б) в п. **3.3**). Тогда мы имеем: $O(\Lambda, r)\subset O(O(L, \sigma), r)\subset O(L, r+\sigma)$, и потому $m(O(\Lambda, r))\leqslant m(O(L, r+\sigma))$. Далее, по лемме п. **3.6**,

$m(O(L, r+\sigma)) \leqslant \left(l(L)+\frac{\pi}{2}(r+\sigma)\right)[2(r+\sigma)] \leqslant \left[l(\Lambda)+\frac{\pi}{2}(r+\sigma)\right][2(r+\sigma)]$.

Таким образом, $m(O(\Lambda, r)) \leqslant \left(l(\Lambda)+\frac{\pi}{2}r\right)2r + 2\sigma l(\Lambda) + 2\pi r\sigma + \pi\sigma^2$. Это неравенство справедливо при любом $\sigma > 0$, и потому $m(O(\Lambda, r)) \leqslant \left(l(\Lambda)+\frac{\pi}{2}r\right)2r$. Из доказанного неравенства вытекает, что при $r < \frac{2}{\pi}\varepsilon$ справедливо второе из неравенств (16).

Обратимся теперь к первому из неравенств (16). Прежде всего заметим, что если L — ломаная с концами A и B, то

$$m(O(L, r)) \geqslant 2r\rho(A, B). \quad (17)$$

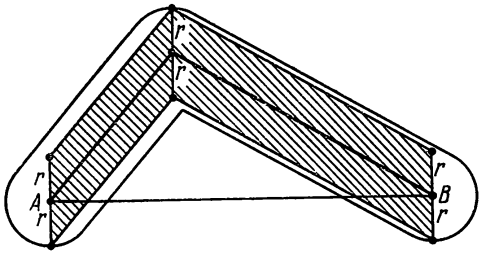


Рис. 30.

Доказательство этого соотношения для случая двухзвенной ломаной ясно из рис. 30, а далее идет очевидная индукция. Пусть теперь Λ — произвольная спрямляемая простая дуга и σ — произвольное положительное число, меньшее чем r. Выберем такую ломаную L с концами A и B, что $d(L, \Lambda) < \sigma$. Тогда мы имеем: $O(L, r-\sigma) \subset O((\Lambda, \sigma), r-\sigma) \subset O(\Lambda, r)$, и потому $m(O(\Lambda, r)) \geqslant m(O(L, r-\sigma)) \geqslant 2(r-\sigma)\rho(A, B)$ (см. (17)). Так как это неравенство справедливо для любого положительного числа $\sigma < r$, то

$$m(O(\Lambda, r)) \geqslant 2r\rho(A, B). \quad (18)$$

Пусть теперь $\Gamma = A_0A_1 \ldots A_k$ — такая вписанная «ломаная» дуги Λ, что $l(\Gamma) > l(\Lambda) - \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем на дуге Λ такие точки $B_1, B_2, \ldots, B_k$, что точки $A_0, B_1, A_1, B_2, A_2, \ldots, B_k, A_k$ последовательно расположены на этой дуге и, кроме того, $\rho(A_i, B_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $\rho(A_{i-1}, B_i) \geqslant \rho(A_{i-1}, A_i) - \rho(A_i, B_i) > \rho(A_{i-1}, A_i) - \frac{\varepsilon}{2k}$, и потому

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(A_{i-1}, B_i) > \sum_{i=1}^{k} \left[\rho(A_{i-1}, A_i) - \frac{\varepsilon}{2k}\right] = l(\Gamma) - \frac{\varepsilon}{2} > l(\Lambda) - \varepsilon. \quad (19)$$

Обозначим часть дуги Λ, заключенную между точками A_{i-1} и B_i, через M_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как простые дуги $M_1, M_2, \ldots, M_k$ попарно не имеют общих точек, то существует такое число $\delta > 0$, что при $r < \delta$ множества

$$O(M_1, r), O(M_2, r), \ldots, O(M_k, r) \quad (20)$$

попарно не пересекаются (см. п. 2.2). Так как, кроме того, каждое из множеств (20) содержится в $O(\Lambda, r)$, то (рис. 31) при $r < \delta$ мы имеем:

$$m(O(\Lambda, r)) \geqslant m(O(M_1, r)) + m(O(M_2, r)) + \ldots + m(O(M_k, r)). \quad (21)$$

Кроме того, учитывая, что концами дуги M_i являются точки A_{i-1} и B_i, мы получаем, в силу (18), $m(O(M_i, r)) \geqslant 2r\rho(A_{i-1}, B_i)$, и потому, согласно (19), $m(O(M_1, r)) + m(O(M_2, r)) + \ldots + m(O(M_k, r)) > 2r(l(\Lambda) - \varepsilon)$.

Таким образом, при $r < \delta$ мы имеем (см. (21)): $m(O(\Lambda, r)) > 2r(l(\Lambda) - \varepsilon)$, откуда и вытекает первое из неравенств (16).

Сформулированная теорема полностью доказана.

Приведем теперь определение длины по Хаусдорфу.

Пусть M — произвольное ограниченное множество на плоскости и r — положительное число. Выберем каким-либо образом конечное число кругов, каждый из которых имеет радиус $\leqslant r$ и сумма которых содержит все множество M (рис. 32). Обозначим через Σ сумму диаметров всех этих кругов. Мы можем, конечно, по-разному выбирать круги радиуса $\leqslant r$, сумма которых содержит все множество M, и каждый раз будем получать некоторое значение Σ (сумма диаметров кругов). Обозначим через σ_r точную нижнюю грань всех получаемых таким образом величин Σ (при неизменном r). Легко понять, что если $r' < r$, то $\sigma_{r'} \geqslant \sigma_r$. Таким образом, величина σ_r определена при любом $r > 0$ и возрастает, если число r убывает. Поэтому могут представиться две возможности: либо величина σ_r неограниченно возрастает при $r \to 0$, либо же она ограничена, и тогда существует предел $\lim\limits_{r \to 0} \sigma_r$ (разумеется, при вычислении этого предела число r принимает только положительные значения). В первом случае множество M считают *неспрямляемым по Хаусдорфу*; во втором случае множество M *спрямляемо* по Хаусдорфу и число $l_{\text{Хаусд}}(M) = \lim\limits_{r \to 0} \sigma_r$ называется длиной этого множества в смысле Хаусдорфа.

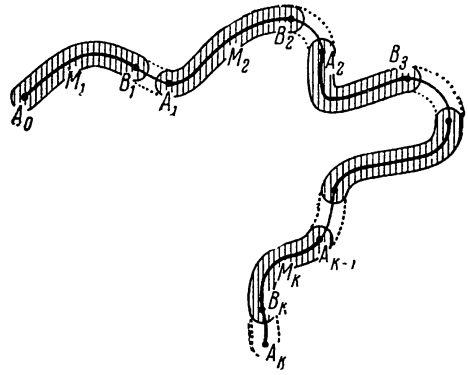


Рис. 31.

Для всякой спрямляемой простой дуги Λ *выполняется соотношение* $l_{\text{Хаусд}}(\Lambda) = l(\Lambda)$.

Доказательство сравнительно несложно, но мы его приводить не будем. Отметим еще (также без доказательства), что *если плоская фигура имеет положительную площадь, то она не спрямляема ни по Минковскому, ни по Хаусдорфу.*

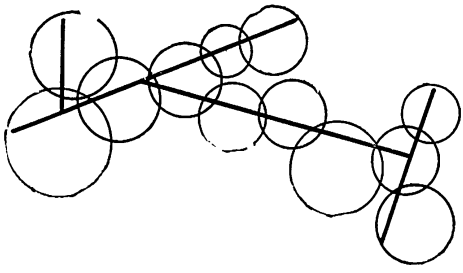


Рис. 32.

Определения Минковского и Хаусдорфа являются конструктивными (а не аксиоматическими) определениями длины. На классе всех спрямляемых (в смысле § 3) простых дуг эти определения эквивалентны конструктивному определению длины, приведенному в п. 4.2 (верхняя грань длин вписанных ломаных). Поэтому для доказательства теоремы существования в п. 4.2 можно было с равным успехом воспользоваться любым из этих трех конструктивных определений; например, можно было проверить, что длина по Минковскому обладает (на классе спрямляемых простых дуг — в смысле § 3) свойствами (α)—(ε). Однако определения длины по Минковскому и Хаусдорфу имеют то преимущество, что они

значительно увеличивают класс множеств, которые считаются «спрямляемыми». Определение Минковского ценно также и тем, что оно устанавливает интересную связь между понятием длины и понятием площади.

Отметим в заключение, что, несмотря на сравнительную простоту определения и большую общность, длина в смысле Минковского (или Хаусдорфа), рассматриваемая на всем классе спрямляемых множеств, вряд ли может считаться «геометрической» длиной. Дело в том, что взятое в такой общности понятие длины не удовлетворяет указанным в § 1 свойствам (β) и (ε), без чего, разумеется, трудно считать функцию $l_{\text{Минк}}$ (или $l_{\text{Хаусд}}$) «длиной». Так, например, если M_1 — множество всех рациональных точек единичного отрезка $\Delta=[0, 1]$, а M_2 — множество всех его иррациональных точек, то $l_{\text{Минк}}(M_1)=l_{\text{Минк}}(M_2)=l_{\text{Минк}}(\Delta)=1$, $l_{\text{Хаусд}}(M_1)=l_{\text{Хаусд}}(M_2)=l_{\text{Хаусд}}(\Delta)=1$, хотя множества M_1 и M_2 не пересекаются и дают в сумме Δ, так что можно было бы ожидать выполнения условия (β). Впрочем, можно было бы построить класс множеств, более общих, чем спрямляемые простые дуги, но менее общих, чем все спрямляемые (скажем, по Минковскому) множества, причем так, что в этом классе сохранятся свойства (α)—(ε) (с надлежащими уточнениями). Однако рассмотрение этого вопроса далеко выходит за рамки настоящей статьи.

§ 5. О понятии площади поверхности

5.1. Основные свойства площади поверхности. *Площадь поверхности* определяется, в общих чертах, по той же схеме, что и длина кривой. Однако здесь имеются некоторые (упоминаемые ниже) обстоятельства, значительно усложняющие все построение и делающие его неэлементарным. Ввиду этого мы опишем определение площади поверхности лишь очень схематично. Заметим кстати, что даже в университетских курсах математического анализа вопросы, связанные с общим определением площади поверхности, сколько-нибудь полно не разбираются.

Свойства, на которых основывается определение площади поверхности, повторяют свойства (α)—(ε) в определении длины. Рассмотрим сначала первые четыре из этих свойств:

(α) *Площадь $s(L)$ произвольной поверхности L является неотрицательным числом.*

(β) *Площадь поверхности, составленной из конечного числа неперекрывающихся кусков, равна сумме площадей составляющих кусков.*

(γ) *Равные поверхности имеют равные площади.*

(δ) *Площадь единичного квадрата равна единице.*

Из статьи «Площадь и объем» читатель уже знает, что свойства (α)—(δ) однозначно определяют площади квадрируемых (плоских) фигур и, в частности, площади плоских многоугольных фигур. Так как всякая *многогранная поверхность* (см. статью «Многоугольники и многогранники» в кн. IV ЭЭМ) составляется из конечного числа неперекрывающихся плоских многоугольников, то свойство (β) однозначно определяет и площадь любой многогранной

поверхности. Таким образом, свойства (α)—(δ) однозначно определяют функцию s (площадь) на классе всех многогранных поверхностей.

Естественно возникает вопрос, будет ли эта функция s обладать свойством, аналогичным свойству (ε), сформулированному на стр. 98. Для того чтобы ответ на этот вопрос был утвердительным, нужно иметь правильную формулировку свойства (ε) для случая площади поверхности. Первое, что приходит в голову — сформулировать свойство (ε) следующим образом:

Пусть L — некоторая поверхность и ε — положительное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что для всякой поверхности L', удовлетворяющей условию $d(L, L') < \delta$, выполнено соотношение $s(L') > s(L) - \varepsilon$. Однако в таком виде это свойство неверно. В самом деле, пусть L — единичный квадрат, а L' — узкая «змейка», достаточно густо заполняющая этот квадрат (рис. 33). Ясно, что при любом $\delta > 0$ можно построить такую змейку L', для которой $d(L, L') < \delta$, а площадь змейки $s(L')$ как угодно мала.

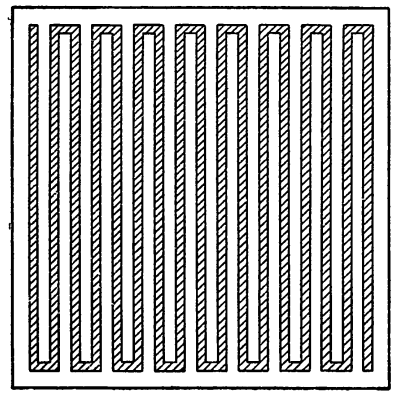


Рис. 33.

Для того чтобы правильно сформулировать свойство (ε), мы введем в рассмотрение поверхности, которые будем называть простыми кусками. Понятие простого куска является двумерным обобщением понятия простой дуги.

5.2. Простые куски. Пусть P — некоторый прямоугольник и f — *отображение* этого прямоугольника в пространство, т. е. правило, сопоставляющее каждой точке T прямоугольника P некоторую точку $f(T)$ в пространстве. Если отображение f взаимно однозначно и непрерывно [1]), то образ прямоугольника P при отображении f

---

[1]) Напомним, что отображение f называется *взаимно однозначным*, если всякие две *различные* точки T_1, T_2 прямоугольника P переходят при отображении f в *различные* точки $f(T_1)$, $f(T_2)$ пространства. Напомним, далее, в каком случае отображение f называется непрерывным. Введем в прямоугольнике P координаты u, v (рис. 35), а в пространстве — прямоугольные координаты x, y, z. Далее, для точки T прямоугольника P, имеющей координаты u, v, мы обозначим координаты точки $f(T)$ в пространстве через $x_f(u, v)$, $y_f(u, v)$, $z_f(u, v)$ Отображение f называется *непрерывным*, если каждая из функций x_f, y_f, z_f переменных u, v является непрерывной (ср. стр. 37). Если каждая из этих функций имеет непрерывные первые производные, причем векторы $\left(\frac{\partial x_f}{\partial u}, \frac{\partial y_f}{\partial u}, \frac{\partial z_f}{\partial u}\right)$ и $\left(\frac{\partial x_f}{\partial v}, \frac{\partial y_f}{\partial v}, \frac{\partial z_f}{\partial v}\right)$ линейно независимы при любых u, v, то отображение f называется *гладким*, так же как и рассматриваемый простой кусок.

называется *простым куском* (рис. 34). Иначе говоря, множество L, расположенное в пространстве, называется простым куском, если на него можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить некоторый прямоугольник. Если простой кусок является многогранной поверхностью, то мы будем называть его *многогранным простым куском*.

Пусть L — некоторый простой кусок и f — непрерывное взаимно однозначное отображение некоторого прямоугольника P на множество L. Обозначим через S *контур* прямоугольника P (см. рис. 35),

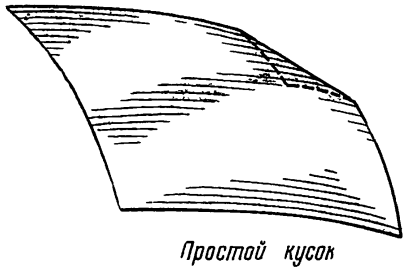


Рис. 34.

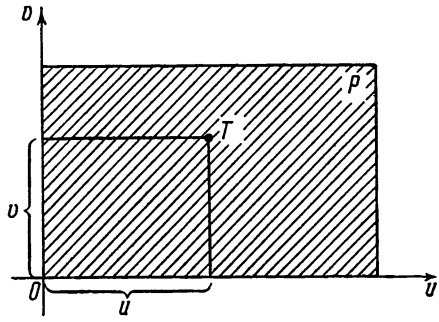


Рис. 35.

т. е. простую замкнутую линию, образованную сторонами этого прямоугольника. Образ $f(S)$ линии S при отображении f называется *краем* простого куска L. Понятие края простого куска является геометрически очень наглядным и кажется весьма простым по своей природе. Однако данное выше определение страдает некорректностью, аналогичной той, которая была отмечена на стр. 101. В самом деле, не изменится ли «край» простого куска L, если отображение заменить другим аналогичным отображением? Как и понятие концевых точек простой дуги, понятие края простого куска в действительности не зависит от выбора непрерывного взаимно однозначного отображения f. Однако если в случае простой дуги доказательство этого факта использует лишь простые свойства непрерывных функций и сравнительно элементарно (см. п. **2.3**), то для случая простого куска такое доказательство неэлементарно: в нем неизбежно используются некоторые сведения из *топологии*[1]).

В дальнейшем мы удовлетворимся наглядной «очевидностью» понятия края простого куска и будем свободно обращаться с этим понятием. Край простого куска L мы будем обозначать символом

[1]) См. статью «Основные топологические понятия» в этой книге ЭЭМ.

кр. L. Отметим, что в силу своего определения край простого куска является простой замкнутой линией. Край многогранного простого куска является простой замкнутой ломаной.

Точки простого куска, не лежащие на его крае, мы будем называть *внутренними точками* этого простого куска. Два простых куска L и L' мы будем называть *неперекрывающимися*, если они не имеют общих внутренних точек. (О «неперекрывающихся кусках» речь идет в свойстве (β) п. **5.1.**)

Пусть теперь K и K' — две простые замкнутые линии в пространстве. Будем говорить, что эти линии являются δ-*близкими*, если существует непрерывное взаимно однозначное отображение φ линии K на K', при котором $\rho(A, \varphi(A)) < \delta$ для любой точки $A \in K$. Заметим, что если линии K и K' являются δ-близкими, то $d(K, K') < \delta$, но не наоборот (см. рис. 36, на котором изображены не δ-близкие линии K и K').

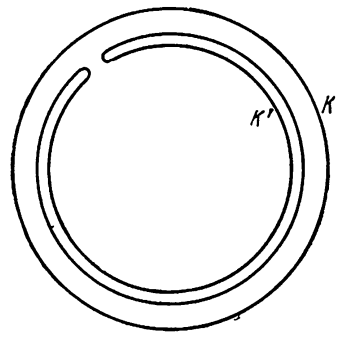


Рис. 36.

5.3. Полунепрерывность площади. Теперь мы можем дать правильную формулировку пятого свойства площади поверхности, которое, как и в случае длины, будем называть полунепрерывностью снизу:

(ε). *Пусть L — некоторый простой кусок и ε — положительное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что для всякого простого куска $L' \subset O(L, \delta)$, для которого линии* кр. L и кр. L' *являются δ-близкими, выполнено соотношение* $s(L') > s(L) - \varepsilon$.

Заметим, что точным аналогом сформулированного здесь свойства (ε) было бы в случае длины кривой следующее свойство:

Пусть L — некоторая простая дуга и ε — положительное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что для всякой простой дуги $L' \subset O(L, \delta)$, концы которой отстоят от концов линии L менее чем на δ (т. е. для всякой простой дуги L', находящейся от L в δ-близости нулевого порядка, см. стр. 124), *выполнено соотношение $l(L') > l(L) - \varepsilon$.*

Но это свойство эквивалентно (для простых дуг) свойству (ε), сформулированному в п. **1.6** (см. предложение (и) в п. **2.1**).

Поскольку площадь определена пока только для многогранных простых кусков, мы можем сейчас задаться вопросом о справедливости свойства (ε) лишь для многогранных простых кусков. Можно доказать, что, действительно, свойство (ε) для многогранных простых кусков справедливо. Однако доказательство этого факта неэлементарно и существенно использует некоторые

теоремы топологии [1]). Поэтому мы отмечаем факт справедливости свойства (ε) без доказательства. Итак,

на классе всех многогранных простых кусков существует одна и только одна функция s (площадь), обладающая свойствами (α)—(δ); *эта функция обладает также и свойством* (ε).

5.4. Определение квадрируемых простых кусков. Будем говорить, что простой кусок Λ является *квадрируемым*, если выполнено следующее условие:

существует такое положительное число M, что при любом $\delta > 0$ найдется многогранный простой кусок $L \subset O(\Lambda, \delta)$, для которого линии кр. Λ *и* кр. L *являются δ-близкими и $s(L) \leqslant M$.*

5.5. Вписанные «многогранники». Пусть Λ—произвольный простой кусок и f—непрерывное взаимно однозначное отображение прямоугольника P на множество Λ. Выберем некоторое правильное разбиение (см. стр. 17) прямоугольника P на треугольники. Пусть Δ—какой-либо треугольник этого разбиения и A, B, C—его вершины. Мы обозначим через Δ_f треугольник с вершинами $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ (этот треугольник выродится в отрезок, если точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ лежат на одной прямой). Совокупность всех треугольников Δ_f (взятых для всех треугольников Δ рассматриваемого разбиения прямоугольника P) мы будем называть вписанным «многогранником» поверхности Λ. Слово «многогранник» мы ставим в кавычки, потому что поверхность, образованная всеми треугольниками Δ_f, может иметь самопересечения, самоналожения и т. д. Сумму площадей всех треугольников Δ_f мы будем называть *площадью* рассматриваемого вписанного «многогранника».

Мы находимся теперь в положении, аналогичном тому, в котором мы находились в начале п. **3.3** при построении понятия длины. Поэтому кажется естественным сформулировать и доказать следующую теорему:

Простой кусок Λ в том и только в том случае является квадрируемым, если существует такое положительное число M', что площадь любого вписанного в Λ «многогранника» не превосходит M'.

Однако эта «теорема» неверна! В этом также заключается одно из принципиальных различий между понятиями длины и площади. Пример, показывающий, что сформулированная выше «теорема» неверна, известен под названием *гармошки Шварца* (по имени математика, предложившего этот пример). Мы опишем его

---

[1]) По существу, весь § 2 настоящей статьи посвящен изложению некоторых простейших фактов топологии. Но эти факты сравнительно просты, и их доказательство удалось провести, пользуясь лишь хорошо известными свойствами непрерывных функций. При аксиоматическом определении понятия площади поверхности такое упрощение невозможно.

следующим образом. Рассмотрим цилиндр V радиуса R и высоты h. Плоскостью, проходящей через ось этого цилиндра, рассечем его на две половины и обозначим через Λ часть его боковой поверхности, расположенную по одну сторону от этой плоскости (рис. 37). Множество Λ представляет собой простой кусок, причем, как легко доказать, квадрируемый. Обозначим теперь через P прямоугольник, получающийся при развертывании куска Λ на плоскость (этот прямоугольник имеет основание πR и высоту h), а через f—обратное «накладывание» прямоугольника P на простой кусок Λ. Отображение f, очевидно, непрерывно. Разобьем теперь прямоугольник P прямыми, параллельными основанию, на n полос ширины h/n. Далее, разделив основание прямоугольника на m равных частей (длины $\pi R/m$), мы построим правильное разбиение прямоугольника P, показанное на рис. 38. (Все треугольники этого разбиения, кроме тех, которые примыкают к боковым сторонам, являются равнобедренными.) Имея это разбиение, мы можем построить соответствующий вписанный «многогранник» поверхности Λ (этот «многогранник» не будет иметь самопересечений). Для оценки площади этого «многогранника» рассмотрим какой-либо равнобедренный треугольник разбиения. Пусть AB—основание этого треугольника, а C—вершина. Середину основания обозначим через D. Тогда точки $f(A)$, $f(D)$, $f(B)$ лежат на одной окружности цилиндра V и определяют на ней две дуги, равные $\frac{1}{4m}$-й части окружности. Точка $f(C)$ лежит на той же образующей, что и $f(D)$, на расстоянии h/n от точки $f(D)$ (рис. 39). Следовательно, обозначив через M середину отрезка между точками $f(A)$ и $f(B)$, мы найдем: $\rho(f(A), f(B)) = 2R \sin \frac{\pi}{2m}$, $\rho(f(C), M) > \rho(f(D), M) = R\left(1 - \cos \frac{\pi}{2m}\right)$, и потому, обозначая через σ площадь треугольника с вершинами $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, мы получим: $\sigma > R^2 \sin \frac{\pi}{2m}\left(1 - \cos \frac{\pi}{2m}\right)$.

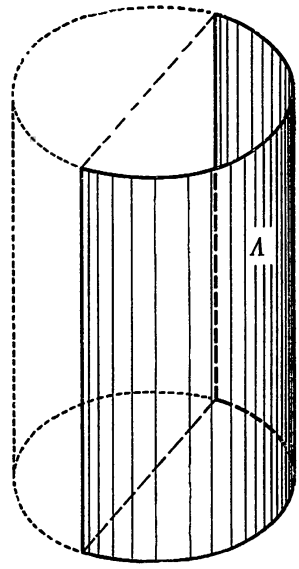


Рис. 37.

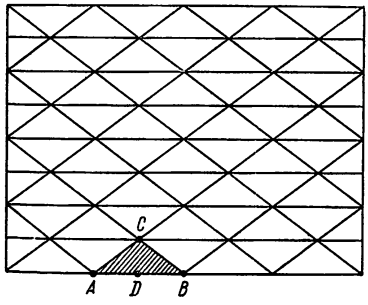


Рис. 38.

Каждая полоса ширины h/n содержит $2m-1$ треугольников, равных треугольнику ABC (и еще два «боковых» треугольника, которыми мы пренебрегаем), а всего таких полос имеется n. Поэтому в рассматриваемом вписанном «многограннике» имеется $n(2m+1)$ треугольников, равных треугольнику с вершинами $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, и потому площадь s вписанного «многогранника» удовлетворяет неравенству $s > n(2m+1)R^2 \sin\frac{\pi}{2m}\left(1-\cos\frac{\pi}{2m}\right)$. Так как в правой части неравенства все множители отличны от нуля, то, взяв любое m, мы можем затем найти настолько большое n, чтобы площадь вписанного «многогранника» была столь велика, как нам хочется. Заметим, что, взяв числа m и n достаточно большими, мы можем сделать все грани вписанного «многогранника» как угодно малыми. Следовательно, *существуют вписанные в* Λ *«многогранники», имеющие сколь угодно малые грани и сколь угодно большую площадь* (хотя простой кусок Λ квадрируем).

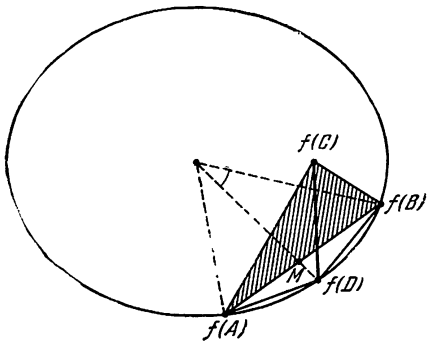


Рис. 39.

Таким образом, сформулированная в начале пункта «теорема» неверна.

5.6. Аксиоматическое определение площади поверхности. *Площадью* мы называем функцию s, заданную на классе всех квадрируемых простых кусков и удовлетворяющую условиям (α)—(ε). Можно доказать (примерно так же, как в § 4, но с некоторыми усложнениями), что *на классе всех квадрируемых простых кусков существует одна и только одна функция s со свойствами* (α)—(δ) (теорема существования и единственности).

Отметим, что для доказательства теоремы существования нужно фактически построить некоторую функцию s и доказать, что она обладает свойствами (α)—(ε), т. е. нужно дать конструктивное определение площади. При этом, в силу причин, изложенных в предыдущем пункте, мы не можем (по аналогии со сказанным в п. **4.2**) воспользоваться точной верхней гранью площадей вписанных «многогранников», так как этой верхней грани может просто не существовать. Однако мы можем воспользоваться другим конструктивным определением длины, намеченным в замечании к п. **4.3**. Обобщая это определение на случай площади поверхности, мы приходим к следующему определению:

Площадью квадрируемого простого куска Λ называется точная нижняя грань чисел M, входящих в определение квадрируемости (см. п. **5.4**).

Проверка (не слишком легкая!) показывает, что определенная таким образом площадь действительно удовлетворяет условиям $(\alpha)-(\varepsilon)$.

5.7. Квадрируемость гладких простых кусков и определение площади поверхности с помощью интеграла. Рассмотрим *элементарный* гладкий простой кусок, т. е. простой кусок Λ, однозначно проектирующийся на некоторую область D плоскости x, y (с кусочно гладкой границей) и записываемый в координатах уравнением $z=f(x, y)$, где f — функция, имеющая непрерывные (и, следовательно, ограниченные) первые производные (рис. 40).

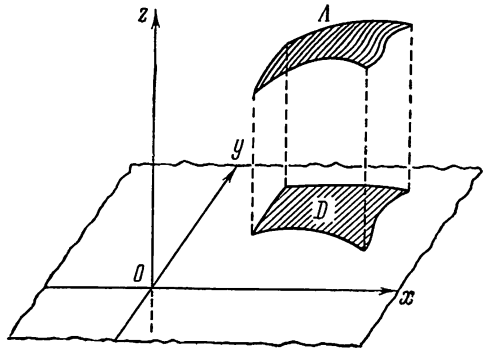


Рис. 40

Мы докажем, что *элементарный гладкий простой кусок является квадрируемым.*

В самом деле, разобьем плоскость x, y прямыми, параллельными осям координат, на равные квадраты со стороной h и в каждом из них проведем диагональ, параллельную биссектрисе второго координатного угла. Мы получим правильное разбиение всей плоскости x, y и, в частности, области D на треугольники (рис. 41). Беря на поверхности Λ точки, расположенные над вершинами этого разбиения, мы сможем построить «вписанный многогранник». Ясно, что эта многогранная поверхность не будет иметь самопересечений, т. е. будет простым куском (возможные сложности вблизи границы области D легко устраняются). Ясно далее, что если h достаточно мало, то вписанный многогранник будет находиться в $O(\Lambda, \delta)$, а его край будет δ-близок к краю простого куска Λ.

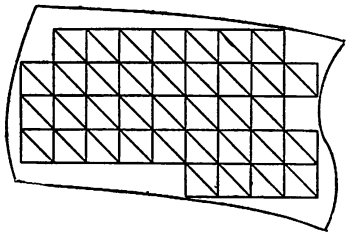


Рис. 41.

Остается оценить площадь этого вписанного многогранника. Пусть A — некоторая вершина разбиения, изображенного на рис. 41. Обозначим через x_0, y_0 координаты точки A и рассмотрим треугольник с вершиной в точке A (рис. 42). Пусть B и C — две другие вершины этого треугольника. Обозначив через A', B', C' точки поверхности Λ, расположенные над точками A, B, C, мы найдем,

что координата z для точек A', B', C', имеет значения: $z_{A'}=f(x_0, y_0)$, $z_{B'}=f(x_0,\ y_0+h)$, $z_{C'}=f(x_0+h,\ y_0)$, и потому

$$z_{B'}-z_{A'}=h\frac{\partial f(x_0,\ \eta)}{\partial y}, \qquad z_{C'}-z_{A'}=h\frac{\partial f(\xi,\ y_0)}{\partial x},$$

где $x_0<\xi<x_0+h$, $y_0<\eta<y_0+h$. Если мы обозначим через M_2 максимальное значение величины $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ в квадрате, содержащем треугольник ABC, а через M_1 — максимальное значение величины $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ в этом квадрате, то найдем $|z_{B'}-z_{A'}|\leqslant hM_1$, $|z_{C'}-z_{A'}|\leqslant hM_2$. Так как вектор $A'B'$ имеет вид $(0,\ h,\ z_{B'}-z_{A'})$, а вектор $A'C'$ имеет вид $(h,\ 0,\ z_{C'}-z_{B'})$, то площадь σ треугольника $A'B'C'$ легко вычисляется (например, с помощью векторного произведения; см. стр. 354 кн. IV ЭЭМ):

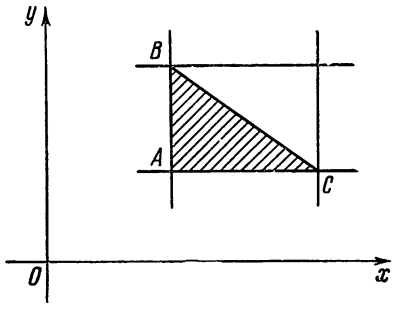


Рис. 42

$$\sigma=\frac{1}{2}h\sqrt{(z_{B'}-z_{A'})^2+(z_{C'}-z_{B'})^2+h^2}\leqslant\frac{1}{2}h^2\sqrt{(M_1^2+M_2^2+1)}.$$

Аналогично для площади треугольника, примыкающего к треугольнику ABC по гипотенузе, мы найдем ту же оценку для площади. Следовательно, площадь той части вписанного многогранника, которая расположена над квадратом, содержащим треугольник ABC, не превосходит величины $h^2\sqrt{1+(M_1)^2+(M_2)^2}$, а площадь всего вписанного многогранника не превосходит суммы

$$\sum h^2\sqrt{1+(M_1)^2+(M_2)^2}, \tag{22}$$

где суммирование ведется по всей области D. Величины M_1 и M_2 ограничены в области D $\left(\text{так как производные } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ непрерывны}\right)$, а сумма $\sum h^2$, взятая по всей области D, примерно равна площади области D, и потому величины (22) ограничены. Тем самым доказано, что в любой близости к поверхности Λ найдется многогранный простой кусок (а именно, вписанный многогранник) ограниченной площади, и потому поверхность Λ квадрируема.

Заметим теперь, что сумма (22) является интегральной суммой для интеграла

$$I=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{23}$$

Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно малом h сумма (22) будет меньше, чем $I+\varepsilon$, и потому число $I+\varepsilon$ можно принять за число M, участвующее в определении квадрируемости (см. п. **5.4**). Из этого мы можем заключить, что точная нижняя грань чисел M не превосходит числа I, т. е.

$$s(\Lambda) \leqslant \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{24}$$

Обычно в курсах математического анализа этот (или эквивалентный) вывод принимают за доказательство равенства

$$s(\Lambda) = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{25}$$

Из сказанного выше ясно, что с точки зрения аксиоматического определения площади этот вывод не является полным, так как не содержит доказательства неравенства, обратного неравенству (24). А такое доказательство сложнее, чем приведенное доказательство неравенства (24). Оно основывается на том, что грани построенного выше вписанного многогранника «почти параллельны» касательной плоскости поверхности в близких точках (т. е. этот многогранник находится в достаточно малой «*близости первого порядка*» от Λ, ср. стр. 124), а увеличение углов между гранями и касательными плоскостями может только *увеличить* площадь многогранника, расположенного вблизи поверхности Λ. Аккуратное проведение такого доказательства требует привлечения теорем топологии. Более того, можно доказать, что площадь любого вписанного многогранника будет приближаться к интегралу (25) (т. е. к площади поверхности), если грани становятся все меньше и меньше и, кроме того, наклон каждой грани к касательной плоскости (в близкой точке) также становится все меньше и меньше (т. е. если вписанные многогранники *сильно сходятся* к поверхности Λ, ср. стр. 125). Именно отсутствием такого обстоятельства (уменьшения наклона граней к касательной плоскости) и объясняется «парадокс», связанный с гармошкой Шварца. По сути дела, то же явление (для случая длины кривой) наблюдалось в софизме, приведенном на стр. 99—100 (см. обсуждение на стр. 124).

Можно также представить себе другой путь установления разумности формулы (25): *определить* площадь гладкого простого куска, разбивая его на конечное число элементарных кусков и применяя к каждому из них формулу (25). Тогда площадь будет *определена* с помощью формулы (25) на классе всех гладких простых кусков, но надо будет показать геометрическую истинность такого определения, т. е. установить свойства (α)—(ε) как теоремы.

Можно было бы определять площади более сложных поверхностей, а именно поверхностей, допускающих разбиение на конечное число неперекрывающихся простых кусков. Можно было бы также привести единую формулу, использующую интеграл по поверхности, формулу для вычисления поверхности вращения и т. д. Нам кажется это излишним, так как принципиальная сторона вопроса от этого не проясняется, а формулы при желании можно найти в любом учебнике высшей математики.

5.8. Заключение. Понятие площади поверхности является, как мы видим, наиболее сложным в теории измерения геометрических величин. Выводы формул для площади кривых поверхностей, имеющиеся в учебниках элементарной и высшей математики, являются лишь наглядными пояснениями к этим формулам. И если студент-математик в состоянии задуматься над этими «выводами», то для школьника «вывод» формулы поверхности шара представляет собой бессмысленное явление, поскольку ни понятия о точном определении площади поверхности, ни объяснения принципов, на которых основывается вычисление площади поверхности, он так и не получает. Заметим кстати, что сохранение площади при «распрямлении» боковой поверхности конуса или цилиндра является, конечно, наглядно очевидным фактом, но, строго говоря, требует математически точного обоснования.

Разумеется, все эти чисто математические сложности отнюдь не умаляют практической важности понятия площади поверхности и необходимости его изучения как в высшей, так и в средней школе.

Следует отметить, что определение площади поверхности, содержащееся в пп. **5.4** и **5.6**, а также формулировки свойств (α)—(ε) совершенно элементарны, в то время как доказательства свойств (α)—(ε) и доказательство формул для вычисления площади поверхностей неэлементарны. Есть, впрочем, один важный частный случай, в котором совершенно элементарными приемами можно, исходя из элементарных определений пп. **5.4**, **5.6**, найти площадь — случай *выпуклой поверхности* [1]). Это позволяет, в частности, найти площадь сферы, цилиндра, конуса и их частей, т. е. найти все формулы, изучаемые в средней школе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. С. Дубнов, Измерение отрезков, М., Физматгиз, 1963.
Небольшая книга, обращенная в первую очередь к учителям средних школ. Содержит подробное изложение теории измерения длин отрезков и обсуждение связанных с этой теорией методических вопросов.
[2] Е. М. Ландис, О длине кривой, Сборник «Математическое просвещение», вып. 1, 1957, стр. 33—44.

[1]) См. статью «Выпуклые фигуры и тела» в этой книге ЭЭМ, а также книгу Ж. Адамара [4], стр. 512—515.

Эта статья содержит оригинальный вариант теории длины кривой, отличный от приведенного здесь.

[3] А. А. Зыков, Об определении длины дуги, Известия Сибирского отделения АН СССР, т. 12, 1959, стр. 3—10.

Научная статья, примыкающая по своему содержанию к работе [2].

[4] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, перев. с франц., ч. 2, М., Учпедгиз, 1958.

Прибавление G «О понятиях длины, площади и объема для любых линий и поверхностей» к этому превосходному учебнику содержит элементарное изложение затронутого в настоящей статье круга вопросов.

[5] Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах, М., Физматгиз, 1961.

Популярная брошюра видного математика и педагога, содержащая среди других примеров обсуждение некоторых вопросов, связанных с понятием длины кривой и площади криволинейной поверхности.

[6] Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, М., «Наука», 1964, т. I, стр. 370—378, т. 2, стр. 304—311.

Университетский курс математического анализа, затрагивающий и вопросы измерения геометрических величин.

См. также книгу А. Лебега, указанную в списке литературы к статье «Площадь и объем» и книгу Г. Хадвигера, указанную в списке литературы к статье «Равносоставленность многоугольников и многогранников».

РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И МНОГОГРАННИКОВ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1 Введение 142
1.1. Аксиомы площади 142
1.2. Площадь прямоугольника (метод исчерпывания) 143
1.3. Методы разбиения и дополнения 146
1.4. Сравнение различных методов вычисления площадей 150
1.5. Вычисление объемов многогранников. Третья проблема Гильберта 153
§ 2. Равносоставленность многоугольников 158
2.1. Теорема Бойяи—Гервина 158
2.2. Теорема Хадвигера—Глюра 162
2.3. Равносоставленность многоугольников и группы движений . . 164
§ 3. Равносоставленность многогранников 165
3.1. Теорема Хадвигера 165
3.2. Теорема Дена 168
3.3. Доказательство теоремы Хадвигера 170
3.4. Независимость аксиом (α)—(δ) для площадей и объемов . . . 176
Литература 180

§ 1. Введение

1.1. Аксиомы площади. Учение о площадях в элементарной геометрии основывается на следующих четырех положениях:

(α) *Площадь $s(X)$ фигуры X является неотрицательным числом.*

(β) *Если фигура X разбита на две части X_1 и X_2, то* $s(X)=s(X_1)+s(X_2)$ (аддитивность площади).

(γ) *Равные фигуры (т. е. фигуры, одна из которых может быть переведена в другую некоторым движением) имеют равные площади* (инвариантность площади относительно движений).

(δ) *Площадь некоторого квадрата, сторона которого является единицей длины, равна единице.*

Вместо положения (α) часто используют следующее эквивалентное ему положение:

(α') *Если фигура X_1 является частью фигуры X, то $s(X_1) \leqslant s(X)$* (монотонность площади).

Положение (α') вытекает из (α) и (β). Действительно, обозначив через X_2 часть фигуры X, не заполненную фигурой X_1, мы получим, в силу (β), $s(X) = s(X_1) + s(X_2)$. Так как, в силу (α), $s(X_2) \geqslant 0$, то отсюда следует, что $s(X) \geqslant s(X_1)$. Обратно, из (α') и (β) вытекает, очевидно, положение (α).

Вместо положения (δ) часто используют следующее эквивалентное ему положение:

(δ') *Площадь любого квадрата, сторона которого является единицей длины, равна единице.*

Положение (δ) требует, чтобы хотя бы один квадрат, сторона которого имеет длину 1, имел площадь 1. Положение (δ) требует, чтобы любой такой квадрат имел площадь 1. Так как все квадраты, имеющие сторону длины 1, равны между собой, то, в силу (γ), положения (δ) и (δ') эквивалентны между собой. Мы выбрали в качестве основного положения (δ), так как оно требует «меньше».

Разумеется, положения (α) — (δ) могут быть использованы только после того, как определено, что такое «фигура» и что значит «разбить» фигуру на две части. Мы не будем в этой статье касаться общего учения о площадях, имеющего дело с произвольными «квадрируемыми фигурами» [1]), а ограничимся рассмотрением лишь «многоугольных фигур», которые являются наиболее простыми с элементарно-геометрической точки зрения. *Многоугольной фигурой* (или просто «*многоугольником*») называется часть плоскости, ограниченная конечным числом отрезков. Из этого определения следует, что к многоугольникам причисляются не только многоугольники «в обычном смысле слова», ограниченные одной замкнутой линией (рис. 1), но также и более сложные фигуры, ограниченные несколькими замкнутыми ломаными линиями (рис. 2, *а*, *б*), в том числе и «несвязные» фигуры, состоящие из нескольких отдельных кусков (рис. 2, *в*). Когда мы будем говорить о разбиении многоугольника на части, мы всегда будем иметь в виду разбиение его прямолинейными отрезками на конечное число многоугольников (рис. 3). Отметим, что любой многоугольник может быть разбит на треугольники (рис. 2, *а*).

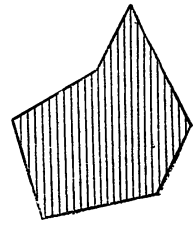


Рис. 1.

1.2. Площадь прямоугольника (метод исчерпывания). Как известно [2]), свойства (α) — (δ) позволяют на классе всех многоугольников однозначно определить понятие площади. Напомним

---

[1]) См. статью «Площадь и объем», стр. 44—54 этой книги ЭЭМ.

[2]) См. статью «Площадь и объем», стр. 21—29.

вкратце, как производится вычисление площадей различных фигур в традиционном школьном курсе. Разделим прежде всего единичный квадрат на n^2 маленьких квадратиков, сторона каждого из которых

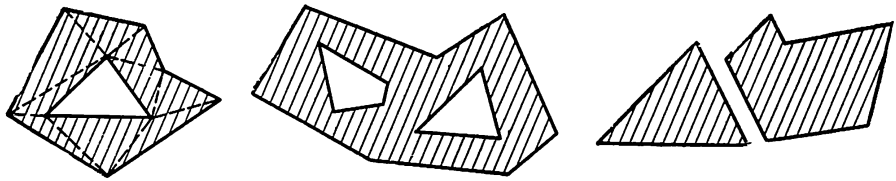


Рис. 2.

имеет длину $1/n$ (рис. 4). Из (γ) следует, что все маленькие квадратики имеют одинаковую площадь, — обозначим ее через s. Так как, далее, из n^2 маленьких квадратиков складывается единичный

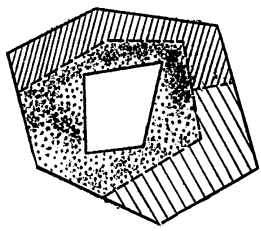


Рис. 3.

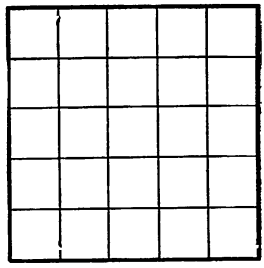


Рис. 4.

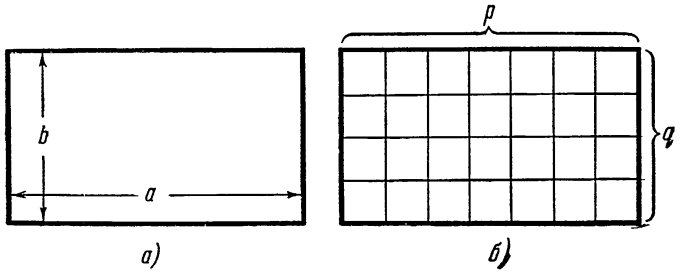


Рис. 5.

квадрат, то из (β) и (δ) следует, что $n^2 s = 1$, т. е. $s = 1/n^2$. Итак, *площадь квадрата со стороной* $1/n$ *равна* $1/n^2$. Рассмотрим теперь какой-нибудь прямоугольник (рис. 5, *а*), длины сторон которого a и b являются рациональными числами. Приведем числа a и b к общему знаменателю:

$$a = p/n, \qquad b = q/n.$$

Тогда рассматриваемый прямоугольник можно разбить на равные квадратики со стороной $1/n$, причем вдоль одной стороны прямоугольника укладывается p таких квадратиков, а вдоль другой стороны — q (рис. 5, *б*). Всего, таким образом, в прямоугольнике укладывается pq квадратиков, а так как площадь каждого квадратика равна $1/n^2$, то из (β) следует, что площадь прямоугольника равна $pq\frac{1}{n^2}=\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}=ab$.

Итак, *площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон* в случае, если длины сторон являются рациональными числами. Следующий шаг теперь состоит в том, чтобы установить эту теорему для прямоугольников с произвольными длинами сторон. Рассуждение, которое для этого используется, можно изложить следующим образом. Рассмотрим прямоугольник $OACB$, длины сторон которого a и b являются произвольными (возможно, иррациональными) числами. Возьмем произвольное рациональное положительное число ε (например, $\varepsilon=1/10$ или $\varepsilon=1/100$, или $\varepsilon=1/1000$) и выберем на прямой OA такие точки M и M', что отрезок OM имеет рациональную длину, отрезок MM' имеет длину ε и точка A расположена на отрезке MM'. Совершенно так же выберем точки N, N' на прямой OB (рис. 6). Наконец, восставим в точках M, M', N, N' перпендикуляры к сторонам OA и OB.

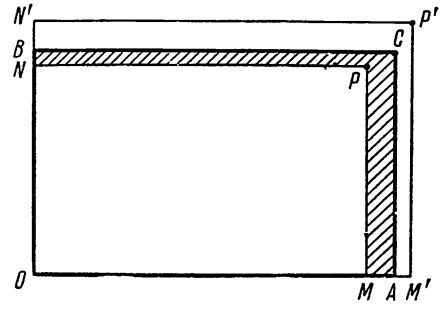


Рис. 6

Площадь получившейся фигуры $MM'P'N'NPM$, которую можно разбить на два прямоугольника, равна $\varepsilon\cdot N'P'+\varepsilon\cdot MP=\varepsilon(N'P'+MP)=\varepsilon(NP+MP+\varepsilon)$. Так как $NP\leqslant a$, $MP\leqslant b$, то площадь фигуры $MM'P'N'NPM$ не превосходит $\varepsilon(a+b+\varepsilon)$.

Обозначим теперь исходный прямоугольник $OACB$ через F. Далее проведем построение, указанное на рис. 6, при $\varepsilon=1/10$ и обозначим прямоугольник $OMPN$ через X_1. Тогда часть фигуры F, не заполненная фигурой X_1 (т. е. заштрихованная на рис. 6 фигура), имеет положительную площадь, не превосходящую [1]) площади фигуры $MM'P'N'NPM$, т. е. не превосходящую $\frac{1}{10}\left(a+b+\frac{1}{10}\right)$. Проведем теперь то же построение при $\varepsilon=\frac{1}{100}$ и получающийся прямоугольник $OMPN$ обозначим через X_2. Тогда

[1]) Здесь мы (в первый и последний раз!) используем положение (α) (или (α')).

часть фигуры F, не заполненная фигурой X_2 (заштрихованная фигура), имеет положительную площадь, не превосходящую $\frac{1}{100}\left(a+b+\frac{1}{100}\right)$. Затем мы можем провести это же построение при $\varepsilon = 1/1000$, обозначив получающийся прямоугольник $OACB$ через X_3, и т. д. В результате мы получаем такую последовательность фигур X_1, X_2, X_3, ..., расположенных в прямоугольнике F, что площадь той части прямоугольника F, которая не заполнена фигурой X_k, стремится к нулю при неограниченном увеличении числа k. Иначе говоря, площадь $s(F)$ прямоугольника F и площадь $s(X_k)$ прямоугольника X_k связаны (в силу (β)) соотношением $s(F) = s(X_k) + s_k$, где величина s_k (площадь заштрихованной фигуры) стремится к нулю при увеличении k. Таким образом, $s(F) = \lim\limits_{k\to\infty} s(X_k)$, т. е. $s(F) = \lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_k\beta_k)$, где α_k и β_k — длины сторон прямоугольника X_k. Но при $k \to \infty$ мы имеем $\alpha_k \to a$, $\beta_k \to b$; следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_k\beta_k) = \lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k \lim\limits_{k\to\infty}\beta_k = ab$, т. е. $s(F) = ab$, что и требовалось доказать.

Метод, который использован в этом доказательстве, — он носит название *метода исчерпывания*, — в одном из своих вариантов может быть сформулирован следующим образом: *если X_1, X_2, X_3, ... — такая последовательность фигур, расположенных в одной и той же фигуре F, что часть фигуры F, не заполненная фигурой X_k, имеет площадь, неограниченно уменьшающуюся при $k \to \infty$, то* $\lim\limits_{k\to\infty} s(X_k) = s(F)$. (Иногда этот метод называют также *методом пределов*.)

1.3. Методы разбиения и дополнения. Обратимся к дальнейшему построению теории площадей в школьном курсе. После того как установлена формула для вычисления площади прямоугольника, дальнейшее вычисление площадей проводится при помощи весьма простого приема, называемого *методом разложения* и основывающегося на свойствах (β) и (γ). Рассмотрим для уяснения этого метода две фигуры, изображенные на рис. 7 (все отрезки, составляющие фигуру креста, равны между собой; сторона квадрата равна отрезку AB). Пунктирные линии, проведенные на рисунке, разбивают эти фигуры на одинаковое число равных частей (равные части обеих фигур отмечены одинаковыми цифрами). Этот факт выражают следующими словами: фигуры, изображенные на рис. 7, *равносоставлены*. Иначе говоря, *две фигуры называются равносоставленными, если, определенным образом разрезав одну из них на конечное число частей, можно* (располагая эти части иначе) *составить из них вторую фигуру*.

Из свойств (β) и (γ) непосредственно следует, что две равносоставленные фигуры *равновелики*, т. е. имеют одинаковую пло-

щадь. На этом и основан простой способ вычисления площадей, называемый методом *разложения* (или *разбиения*). Метод этот (известный еще Евклиду, жившему свыше 2000 лет назад) заключается в следующем: для вычисления площади пытаются разбить

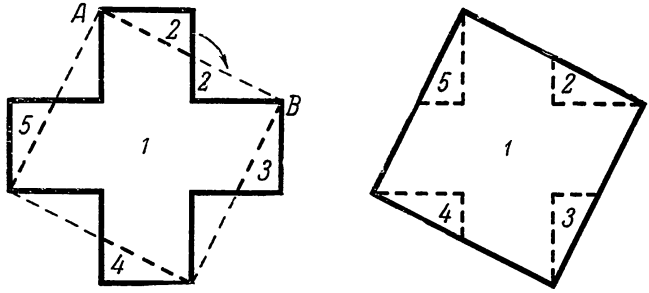


Рис. 7.

фигуру на конечное число частей таким образом, чтобы из этих частей можно было составить более простую фигуру (площадь которой нам уже известна).

Напомним известные из школьного курса геометрии примеры применения этого метода. На рис. 8 дан способ вычисления

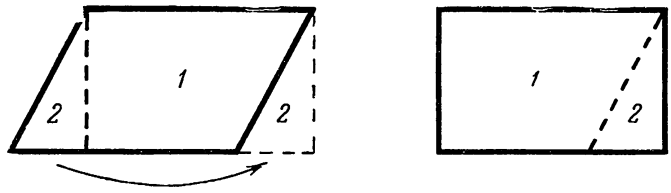
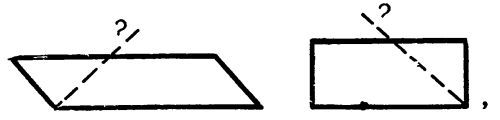


Рис. 8.

площади параллелограмма: параллелограмм и прямоугольник, имеющие одинаковые основания и одну и ту же высоту, равносоставлены и потому равновелики [1]). Таким образом, площадь параллелограмма равна произведению длин его основания и высоты.

---

[1]) Следует отметить, однако, что такой простой прием (отщепление одного треугольника) не всегда приводит к цели. В случае, показанном на изображенном здесь рисунке



приходится разбивать параллелограмм не на две, а на большее число частей, чтобы из этих частей можно было сложить прямоугольник с теми же основанием и высотой (см. ниже доказательство леммы 3 в § 2).

Рис. 9 показывает, как можно вычислить площадь треугольника: треугольник имеет такую же площадь, что и параллелограмм с тем же основанием и вдвое меньшей высотой (так как эти две фигуры равносоставлены). Наконец, на рис. 10 изображен прием вычисления площади трапеции.

После того как определена площадь треугольника, легко может быть найдена площадь любого многоугольника: достаточно разбить его на треугольники. (Разумеется, при этом мы должны быть уверены в том, что, различными способами разбивая многоугольник

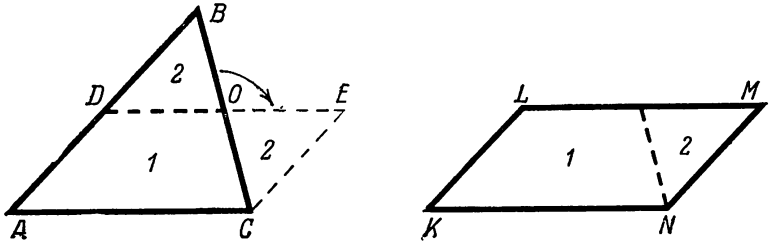


Рис. 9.

на треугольники, мы тем не менее будем всегда получать одно и то же значение площади; этот факт, обычно в школе не упоминаемый, вытекает из *теоремы существования и единственности площади*, см. «Площадь и объем», стр. 24—29.)

Итак, метод разбиения основан на том, что *всякие два равносоставленных многоугольника равновелики*. Естественно поставить

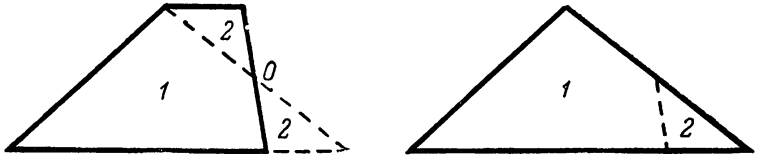


Рис. 10.

обратный вопрос: всякие ли два многоугольника, имеющих одинаковую площадь, равносоставлены? Утвердительный ответ на этот вопрос был дан (почти одновременно) венгерским математиком Фаркашем Бойяи (1832 г.) и немецким офицером и любителем математики Гервином (1833 г.): *два многоугольника, имеющих равные площади, равносоставлены*. Доказательство этой теоремы мы приведем в § 2.

Метод разбиения часто заменяют другим способом вычисления площадей, являющимся в некотором смысле обратным. Этот способ, называемый *методом дополнения*, мы сейчас и рассмотрим. Вместо

того чтобы пытаться разрезать две фигуры на равные части, будем теперь дополнять две фигуры равными частями так, чтобы получившиеся после такого дополнения фигуры были равны. Рассмотрим снова фигуры, изображенные на рис. 7. Они имеют одинаковую площадь (в силу равносоставленности). Но равенство площадей этих фигур можно доказать и по-иному (рис. 11): добавляя

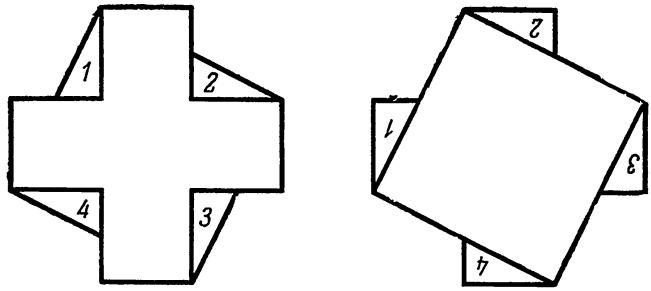


Рис. 11.

и к кресту, и к квадрату по четыре равных треугольника, мы получим одну и ту же фигуру. Отсюда следует, что исходные фигуры (крест и квадрат) равновелики.

Метод дополнения можно с успехом применять для доказательства теорем элементарной геометрии. Например, для доказательства того, что параллелограмм и прямоугольник, имеющие одинаковые основания и высоты, равновелики, достаточно обратиться к рис. 12. Из этого рисунка видно, что и параллелограмм, и прямоугольник могут быть с помощью одного и того же треугольника

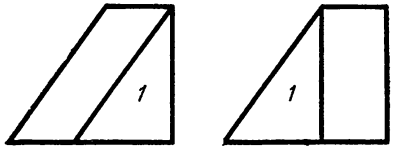


Рис. 12.

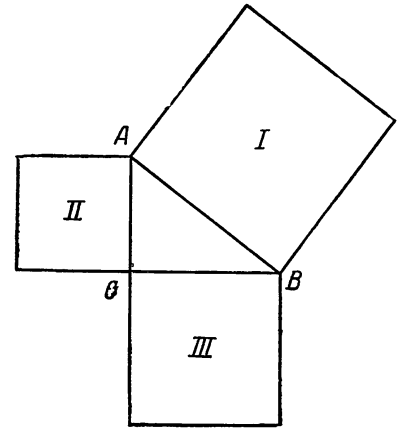


Рис. 13.

дополнены до одной и той же трапеции. Поэтому параллелограмм и прямоугольник равновелики [1]).

[1]) Этот способ вычисления площади параллелограмма предпочтительнее, чем обычно применяемый прием (см. рис. 8). Действительно, способ, изображенный на рис. 12, применим всегда в отличие от приема, изображенного на рис. 8 (см. сноску на стр. 147).

Этим же приемом легко доказать теорему Пифагора. Пусть ABC — прямоугольный треугольник. Для того чтобы доказать, что площадь квадрата I, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов II и III, построенных на катетах (рис. 13), достаточно обратиться к рис. 14. На этом рисунке показано, что как квадрат I, так и вместе взятые квадраты II и III могут быть дополнены четырьмя треугольниками, равными треугольнику ABC, до одной и той же фигуры, а именно, до квадрата, сторона которого равна сумме катетов исходного прямоугольного треугольника. Этим теорема Пифагора доказана. Для

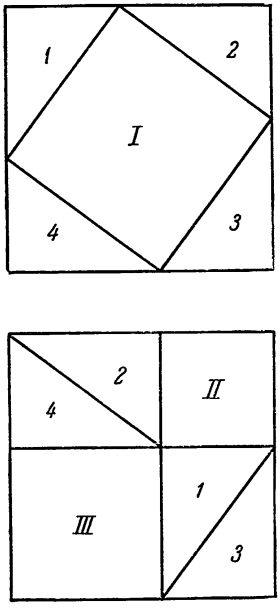


Рис. 14.

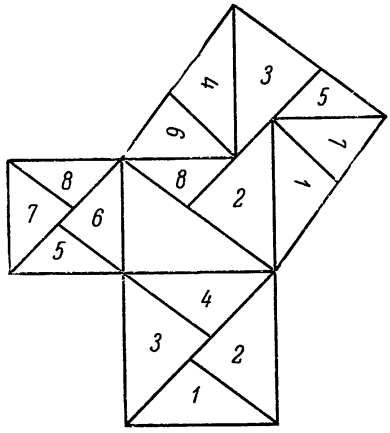


Рис. 15.

сравнения приведем рисунок к доказательству теоремы Пифагора при помощи метода разложения (рис. 15).

Условимся называть два многоугольника *равнодополняемыми*, если, прикладывая к тому и другому одни и те же многоугольники, можно получить две одинаковые фигуры. Ясно, что равнодополняемые фигуры имеют одинаковую площадь. Естественно поставить обратный вопрос: *всякие ли два многоугольника, имеющих одинаковую площадь, равнодополняемы?* Утвердительный ответ на этот вопрос легко получить из теоремы Бойяи — Гервина (см. § 2).

1.4. Сравнение различных методов вычисления площадей. Мы рассмотрели три метода, применяющихся для вычисления площадей фигур: *метод исчерпывания* (метод пределов), *метод разбиения* и *метод дополнения*. При их сравнении бросается в глаза, что метод исчерпывания гораздо более сложен, чем методы разбиения и дополнения: он использует (иногда в завуалированной форме)

идею предельного перехода, в то время как методы разбиения и дополнения весьма просты и геометрически наглядны. По сути дела, метод исчерпывания близок к определению площади с помощью интеграла (см. стр. 51—52 статьи «Площадь и объем») и потому неэлементарен. (Рассуждения, связанные с рассмотрением предельного перехода, бесконечно малых величин и т. п., принято обычно считать «неэлементарными».) Однако, к счастью, метод исчерпывания применяется в теории площадей многоугольников лишь один раз: как мы видели, он нужен лишь при выводе формулы прямоугольника. Если же формула площади прямоугольника уже установлена, то площади любых многоугольников находятся элементарно (с помощью методов разбиения и дополнения) [1]). Тот факт, что неэлементарный метод исчерпывания используется в теории площадей многоугольников лишь один раз, — да и то при вычислении площади прямоугольника, хорошо известной и понятной для прямоугольников с рациональными длинами сторон, — делает малозаметной неэлементарность этого метода. (Тем более, что многие преподаватели стараются скорее «проскочить» общий вывод формулы прямоугольника, «смазав» трудности этого вывода!)

Просматривая изложенные выше рассуждения, легко убедиться, что аксиома (α), указанная в начале статьи, использовалась в них только один раз, а именно при нахождении площади произвольного прямоугольника методом исчерпывания. Все же остальные

---

[1]) Метод исчерпывания вновь становится необходимым при вычислении площадей криволинейных фигур, например площади круга и его частей. В самом деле, часть круга K, не заполненная вписанным многоугольником X_k, невелика и становится все меньше и меньше, если наибольшая из сторон вписанного многоугольника неограниченно уменьшается (рис. 16). Поэтому $s(K) = \lim\limits_{k\to\infty} s(X_k)$, где предел берется в предположении, что при $k \to \infty$ все стороны многоугольника X_k неограниченно уменьшаются. Это условие выполняется, например, если X_k — правильный вписанный k-угольник (или 2^k-угольник). Но площадь правильного многоугольника равна $\frac{1}{2} p_k a_k$, где p_k — его периметр, а a_k — апофема. Следовательно, $s(K) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2} p_k a_k$. При $k \to \infty$ величина p_k приближается к длине окружности $2\pi r$, а величина a_k — к радиусу r. Таким образом, для площади круга K получаем формулу

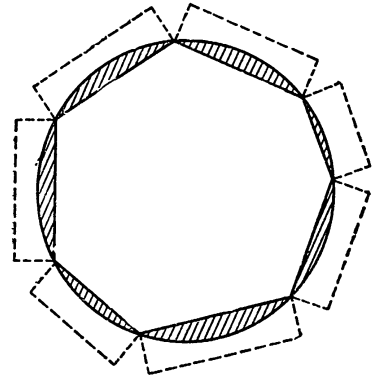


Рис. 16.

$$s(K) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} a_k p_k = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} p_k \lim_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

рассуждения, и в частности применение методов разбиения и дополнения, основаны только на аксиомах (β)—(δ). Например, тот факт, что равносоставленные многоугольники имеют одинаковую площадь, вытекает только из двух аксиом: (β) и (γ). Проведение рассуждений методом исчерпывания невозможно без применения аксиомы (α), так как в методе исчерпывания существенно используется положение (α′), эквивалентное аксиоме (α) (см. стр. 145 и 179).

Таким образом, сложность и неэлементарность метода исчерпывания обусловлены именно использованием аксиомы (α). В связи с этим всякое рассуждение, использующее аксиому (α) и в этом смысле эквивалентное методу исчерпывания, мы будем в теории площадей считать неэлементарным. Элементарными же будем считать те рассуждения и методы, которые основаны лишь на аксиомах (β)—(δ). В частности, методы разбиения и дополнения элементарны. Такое исключительное положение аксиомы (α) в теории площадей объясняется тем, что в ней постулируется некоторое *неравенство* для площадей, в то время как остальные аксиомы формулируются в виде *равенств*. Использование же неравенств для вычисления площадей, для решения вопроса о том, чему равна площадь той или иной фигуры (т. е. использование неравенств для установления некоторого равенства), так или иначе связано с предельным переходом, с некоторыми оценками и т. п. и потому неэлементарно.

Например, использование метода исчерпывания при вычислении площади прямоугольника можно было бы заменить следующим «оценочным» рассуждением, существенно основанным на применении аксиомы (α) или эквивалентного ей положения (α′). Обозначим длины отрезков OM и ON на рис. 6 через α и β. Тогда мы имеем: $s_{OMPN} \leqslant s_{OACB} \leqslant s_{OM'P'N'}$, или

$$\alpha\beta \leqslant s_{OACB} \leqslant (\alpha+\varepsilon)(\beta+\varepsilon). \qquad (*)$$

Но мы имеем $a-\varepsilon \leqslant \alpha$, $\alpha+\varepsilon \leqslant a+\varepsilon$ (ибо $0 \leqslant a-\alpha \leqslant \varepsilon$, см. рис. 6) и аналогично $b-\varepsilon \leqslant \beta$, $\beta+\varepsilon \leqslant b+\varepsilon$. Следовательно, неравенства (*) могут быть теперь усилены следующим образом: $(a-\varepsilon)(b-\varepsilon) \leqslant s_{OACB} \leqslant (a+\varepsilon)(b+\varepsilon)$. Раскрывая скобки и вычитая из всех частей неравенств произведение ab, получаем: $-\varepsilon(a+b-\varepsilon) \leqslant s_{OACB} - ab \leqslant \varepsilon(a+b+\varepsilon)$. Эти неравенства показывают, что *число* $s_{OACB}-ab$ *не может быть отличным от нуля* (ибо в качестве ε можно взять как угодно малое рациональное положительное число); таким образом $s_{OACB} = ab$.

Это «оценочное» рассуждение формально не содержит никакого предельного перехода, но по существу столь же неэлементарно, как и метод исчерпывания. Ведь заключительная часть этого рассуждения предполагает, в сущности, ясное понимание того факта, что никакое отличное от нуля число не является бесконечно малой

величиной, т. е. так или иначе связано с рассмотрением переменной величины, с рассмотрением числа ε, которое может быть «произвольно малым», и т. п.

Естественно возникает вопрос: можно ли вывести формулу площади прямоугольника элементарно (т. е. с помощью какого-либо рассуждения, не использующего аксиомы (α))? Оказывается, что этого сделать нельзя, т. е. при вычислении площади произвольного прямоугольника ограничиться только использованием аксиом (β)—(δ) невозможно. Мы докажем этот факт на стр. 179.

1.5. Вычисление объемов многогранников. Третья проблема Гильберта. Обратимся теперь к геометрии в пространстве, а именно к вопросу о вычислении объемов многогранников.

(Под *многогранником* мы понимаем часть пространства, ограниченную конечным числом многоугольников; любой многогранник может быть разбит на конечное число *тетраэдров*, т. е. треугольных пирамид.) Вычисление объемов базируется на аналогичных положениях:

(α) *Объем $v(X)$ тела X является неотрицательным числом.*

(β) *Если тело X разбито на две части X_1 и X_2, то $v(X)=v(X_1)+v(X_2)$.*

(γ) *Равные тела имеют равные объемы.*

(δ) *Объем куба, ребро которого является единицей длины, равен единице.*

Как и в случае площади, эти положения (α)—(δ) позволяют на классе многогранников однозначно определить понятие объема [1]). Вначале построение теории объемов в точности повторяет построение теории площадей. Именно, устанавливается, что объем куба с ребром $1/n$ равен $1/n^3$; далее показывается, что объем прямоугольного параллелепипеда с рациональными длинами ребер равен произведению трех его «измерений» (т. е. произведению длин трех ребер, выходящих из одной вершины); затем эта теорема распространяется (с применением метода исчерпывания) на прямоугольные параллелепипеды с произвольными длинами ребер. Все это совершенно аналогично построениям теории площадей.

Далее возникает естественный вопрос: можно ли, имея в своем распоряжении формулу объема прямоугольного параллелепипеда, определить объем любого многогранника с помощью только метода разбиения (или дополнения), без использования неэлементарного метода исчерпывания? (Именно так обстояло дело в случае площадей плоских фигур.) Как известно, учебная литература всегда использует либо метод исчерпывания («чертова лестница», см. ниже, рис. 20), либо какой-нибудь эквивалентный ему метод (например, принцип Кавальери или какое-либо иное завуалированное интегрирование). По существу ли это?

---

[1]) См. статью «Площадь и объем», стр. 72—75.

При вычислении объемов пространственных фигур в некоторых случаях применяется метод разложения (или дополнения). Например, для доказательства теоремы о том, что *объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения*

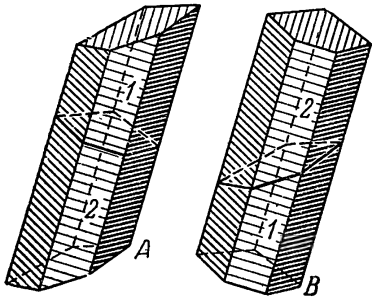


Рис. 17.

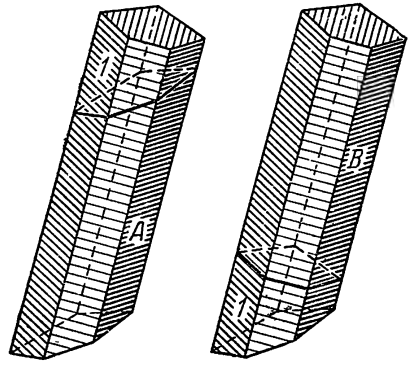


Рис. 18.

на длину бокового ребра, применяют метод разложения (рис. 17) *или дополнения* (рис. 18). Иначе говоря, всякая наклонная призма равносоставлена (и равнодополняема) с прямой призмой, у которой

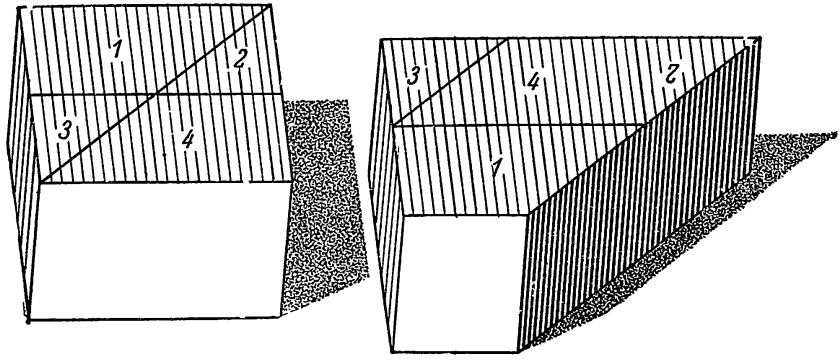


Рис. 19.

длина бокового ребра такая же, как и у наклонной призмы, а основанием является перпендикулярное сечение наклонной призмы. Далее, если основания двух прямых призм имеют одинаковую площадь, а высоты этих призм равны, то эти две призмы равносоставлены (ибо по теореме Бойяи — Гервина их основания равносоставлены, рис. 19). В частности, всякая прямая призма равносоставлена

с прямоугольным параллелепипедом, имеющим ту же площадь основания и ту же высоту, откуда и вытекает теорема об объеме наклонной призмы.

Таким образом, для вычисления объема любой призмы (прямой или наклонной) можно с успехом пользоваться методом разложения (и методом дополнения).

Однако при вычислении объема пирамиды не пользуются ни методом разложения, ни методом дополнения. На помощь привлекается *метод пределов*: рассматривают довольно сложные ступенчатые тела (рис. 20) и затем переходят к пределу при неограниченно возрастающем числе ступенек («чертова лестница»). В чем здесь дело?

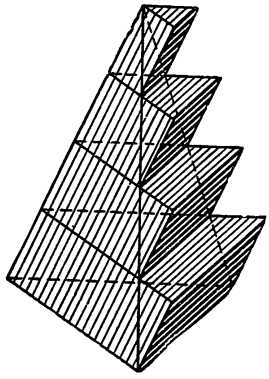


Рис. 20.

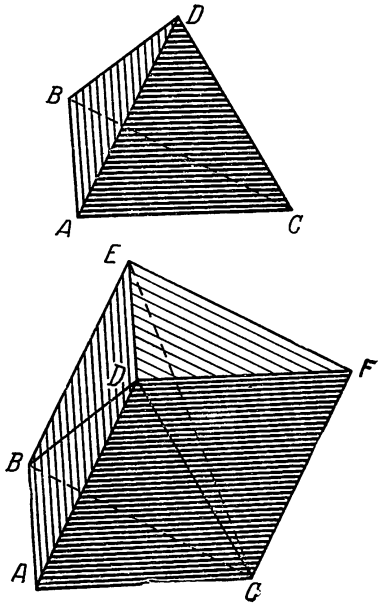


Рис. 21.

Может быть, это объясняется лишь тем, что до сих пор математикам «не посчастливилось» найти простой вывод формулы объема пирамиды методом разложения или дополнения? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним вкратце, как обычно вычисляется объем пирамиды. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида. Построим треугольную призму (наклонную) $ABCDEF$ с основанием ABC и боковым ребром AD (рис. 21). Эту призму можно разбить на три треугольные пирамиды $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$ (рис. 22), которые мы для краткости обозначим через M_1, M_2, M_3. Легко устанавливается, что каждые две из пирамид M_1, M_2, M_3 имеют равные основания и равные высоты. Таким образом, «остается» доказать, что *две пирамиды, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики.*

Именно это предложение и доказывается с помощью метода пределов. Можно ли доказать это предложение без применения

метода пределов (или метода исчерпывания), на основе только методов разбиения или дополнения? Иными словами, *любые ли два тетраэдра с равными основаниями и равными высотами равносоставлены или дополняемы равными частями до равносоставленных многогранников*? Эта проблема известна под названием третьей проблемы Гильберта: в числе других важных проблем математики, она была высказана известным математиком Д. Гильбертом в 1900 году.

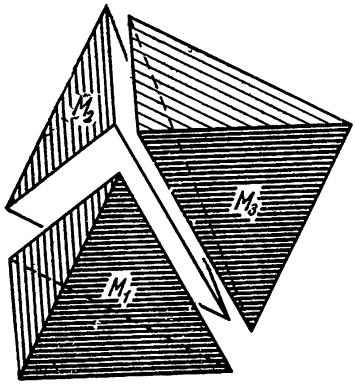


Рис. 22.

Разумеется, можно было бы поставить эту проблему и в иной форме, сравнивая не два тетраэдра, а тетраэдр и прямоугольный параллелепипед (для которого формула объема уже известна). Так мы приходим к следующей формулировке по существу той же проблемы: *всякий ли тетраэдр равносоставлен с некоторым прямоугольным параллелепипедом* (того же объема)? Как установил еще в 1896 году английский математик Хилл, тетраэдры, равносоставленные с прямоугольным параллелепипедом, существуют. Пример такого тетраэдра приведен на рис. 23, *а*; здесь *AB*, *BC* и *CD* — взаимно перпендикулярные ребра, имеющие одинаковую длину *a*. На рис. 23, *б* показано разбиение этого тетраэдра на четыре многогранника; на этом чертеже отрезки *BM* и *MN* имеют длину $\frac{a}{3}$. На рис. 23, *в* показано, как следует перегруппировать эти четыре многогранника, чтобы из них сложить прямую треугольную призму (рис. 23, *г*). Таким образом, тетраэдр *ABCD* равносоставлен с прямой треугольной призмой, а потому и с прямоугольным параллелепипедом. Если бы это оказалось так для любого тетраэдра, то принципиально можно было бы построить теорию объемов многогранников, ни разу (после установления формулы объема параллелепипеда) не использующую метода пределов или метода исчерпывания.

Однако на обе поставленные проблемы приходится дать отрицательный ответ. Оказывается, что методы разложения и дополнения вообще бессильны для установления формулы объема пирамиды. Для вывода этой формулы необходимо применение более сложного метода (метода исчерпывания, метода пределов или иного эквивалентного метода). Это было установлено в 1901 году М. Деном, который показал, что существуют многогранники, имеющие равные объемы, но не равносоставленные. В частности, куб и

правильный тетраэдр одинакового объема не равносоставлены (и не дополняются равными частями до равносоставленных многогранников). Существуют также не равносоставленные тетраэдры с равными основаниями и высотами. Тем самым обосновывается необходимость привлечения неэлементарных методов в теории объемов.

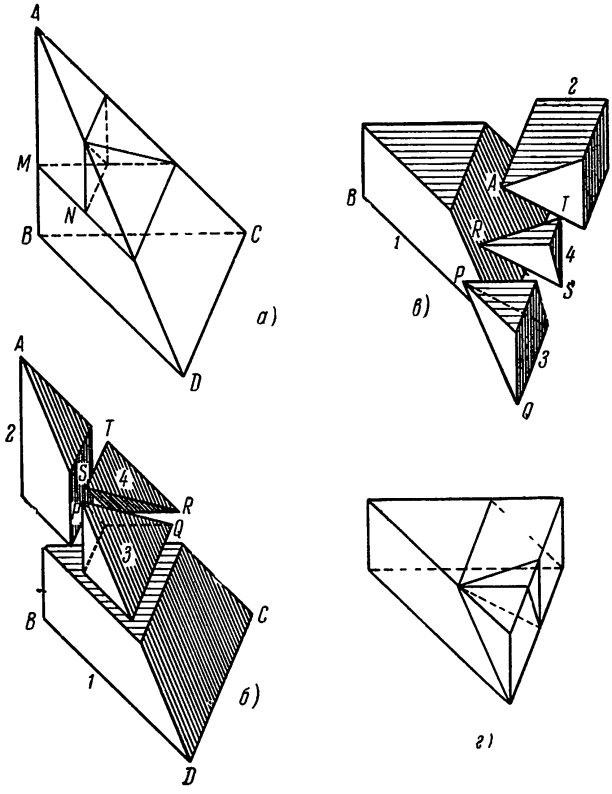


Рис. 23.

Доказательства самого Дена, очень сложные и, надо сказать, довольно путаные, были существенно усовершенствованы В. Ф. Каганом. В последние годы ряд интересных новых результатов в теории равносоставленности был получен швейцарскими геометрами (Г. Хадвигер и др.). Их результаты позволили значительно упростить доказательство теоремы Дена. В § 3 читатель найдет доказательство результатов Дена, представляющее собой сильно переработанное доказательство Хадвигера. По поводу дальнейших относящихся сюда результатов (некоторые из них кратко упомянуты в конце §§ 2 и 3) мы отсылаем читателя к указанной в конце статьи книжке В. Г. Болтянского [1].

§ 2. Равносоставленность многоугольников

2.1. Теорема Бойяи — Гервина. В этом параграфе мы докажем теорему Бойяи — Гервина, упомянутую во введении, а также укажем некоторые новые результаты, относящиеся к этому же кругу идей.

Докажем сначала несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Если фигура A равносоставлена с фигурой B, а фигура B равносоставлена с фигурой C, то фигуры A и C также равносоставлены.*

Действительно, проведем на фигуре B линии, разбивающие ее на такие части, из которых можно составить фигуру A (сплошные

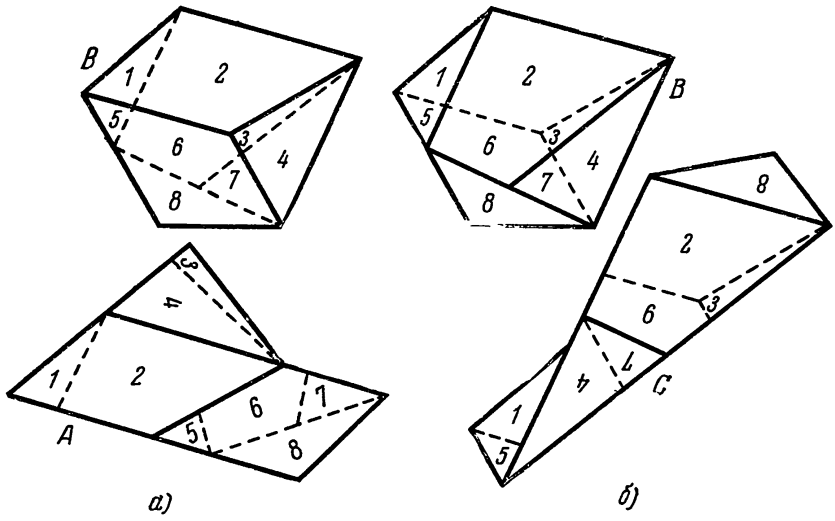


Рис. 24.

линии на рис. 24, *а*); проведем, кроме того, линии, разбивающие фигуру B на части, из которых можно составить фигуру C (сплошные линии на рис. 24, *б*). Те и другие линии вместе разбивают фигуру B на более мелкие части, причем ясно, что из этих более мелких частей можно составить и фигуру A, и фигуру C. Таким образом, фигуры A и C равносоставлены.

Лемма 2. *Всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

В самом деле, пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC (рис. 25), CD — опущенная на нее высота. Тогда точка D находится между A и B (иначе один из углов $\angle A$ или $\angle B$ был бы тупым и сторона AB не была бы наибольшей; см. рис. 26). Через середину высоты CD проведем прямую, параллельную AB, и опустим на эту прямую перпендикуляры AE и BF. Тогда мы получим прямоуголь-

ник *AEFB*, который равносоставлен с треугольником *ABC*. Действительно, треугольники, помеченные на рис. 25 цифрой *1* (так же как и треугольники, помеченные цифрой *2*), равны между собой. Каждая же из фигур *ABC*, *AEFB* состоит из заштрихованной на рис. 25 трапеции и двух треугольников *1*, *2*.

Лемма 3. *Два параллелограмма, имеющих общее основание и одинаковую площадь, равносоставлены.*

Пусть *ABCD* и *ABEF* — два параллелограмма, имеющих общее основание *AB* и одинаковую площадь. Тогда высоты этих параллелограммов одинаковы, т. е. отрезки *DC* и *FE* расположены на

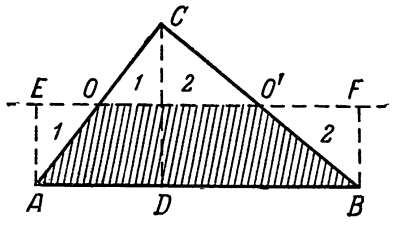


Рис. 25.

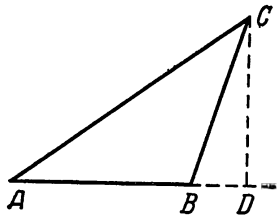


Рис. 26.

одной прямой. На прямой *AB* отложим последовательно ряд отрезков, равных отрезку *AB*, и через каждую точку деления проведем прямые, параллельные отрезкам *AD* и *AF*. Тогда полоса между

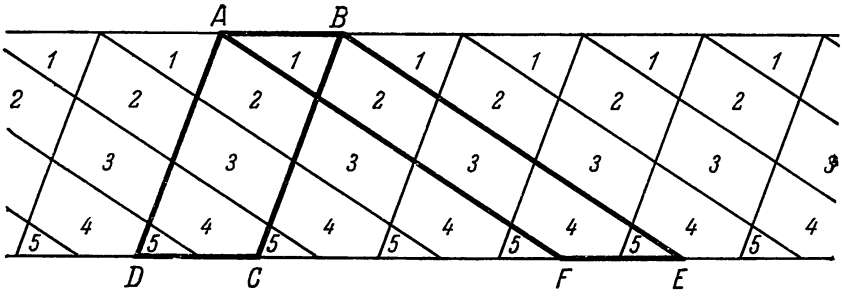


Рис. 27.

параллельными прямыми *AB* и *DE* разобьется на ряд многоугольников (рис. 27). Каждый из этих многоугольников при сдвиге на отрезок, равный *AB*, совмещается с другим равным ему многоугольником. (Докажите!) Равные многоугольники на рис. 27 отмечены одинаковыми цифрами. Остается заметить, что каждый из параллелограммов *ABCD*, *ABEF* содержит одну часть, помеченную

цифрой *1*, одну часть, помеченную цифрой *2*, цифрой *3* и т. д. Таким образом, эти параллелограммы равносоставлены [1]).

Лемма 4. *Два прямоугольника, имеющих равную площадь, равносоставлены.*

Пусть *ABCD* и *EFGH* — два прямоугольника одинаковой площади. Из четырех отрезков *AB*, *BC*, *EF*, *FG* выберем наибольший,— пусть это будет, например, отрезок *AB*. Продолжим теперь отрезок *HG* за точку *H* и на этой прямой радиусом, равным *AB*, сделаем засечку из точки *E* (так как $AB \geqslant EH$, то окружность радиуса *AB* с центром в точке *E* будет с прямой *HG* иметь общую

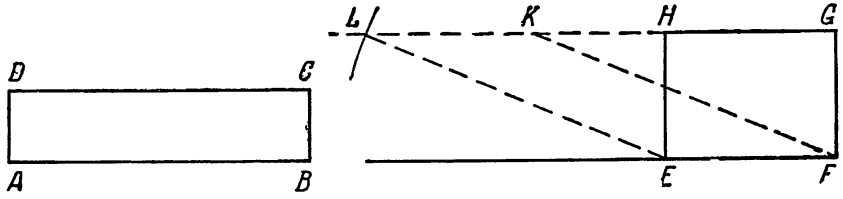
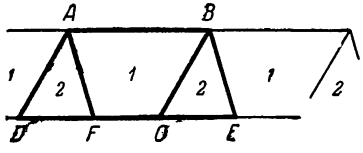


Рис. 28.

точку). Обозначая полученную точку через *L*, будем иметь $AB=EL$ и, отложив отрезок $LK=EF$, мы построим параллелограмм *EFKL* (рис. 28). Этот параллелограмм равновелик прямоугольнику *EFGH* (и прямоугольнику *ABCD*). Из леммы 3 следует, что параллелограммы *EFGH* и *EFKL*, имеющие общую сторону *EF*, равносоставлены. Но параллелограммы *ABCD* и *EFKL* также имеют одинаковую сторону $AB=EL$. Поэтому (в силу леммы 3) они равносоставлены. Наконец, так как параллелограмм *EFKL* равносоставлен с каждым из прямоугольников *ABCD* и *EFGH*, то (лемма 1) эти прямоугольники равносоставлены.

Лемма 5. *Всякий многоугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

Всякий многоугольник может быть разбит на конечное число треугольников. Обозначим их цифрами *1*, *2*, *3*, ... (рис. 29). Возьмем, далее, произвольный отрезок *AB* и в его концах восставим перпендикуляры *AC* и *BD* (рис. 30). Проведем отрезок A_1B_1, параллельный *AB*, таким образом, чтобы пло-



[1]) Если параллелограммы *ABCD*, *ABEF*, изображенные на рис. 27, таковы, что стороны *AF* и *BC* не пересекаются, то рис. 27 примет показанный здесь вид, т. е. достаточно отщепить от параллелограмма *ABCD* один треугольник, чтобы из получившихся двух частей можно было составить параллелограмм *ABEF* (ср. сноску на стр. 147).

щадь прямоугольника ABB_1A_1 была равна площади треугольника *1*. Тогда треугольник *1* и прямоугольник ABB_1A_1 (помеченный цифрой I) равносоставлены. Действительно, треугольник *1* равносоставлен с некоторым прямоугольником (лемма 2), который в свою очередь равносоставлен с прямоугольником *I*, имеющим ту же площадь (лемма 4); поэтому (лемма 1) треугольник *1* и прямоугольник *I* равносоставлены. Далее, построим отрезок A_2B_2, параллельный AB, таким образом, что прямоугольник $A_1B_1B_2A_2$, помеченный цифрой *II*, равновелик треугольнику *2*. Тогда треугольник *2* и прямоугольник *II* равносоставлены.

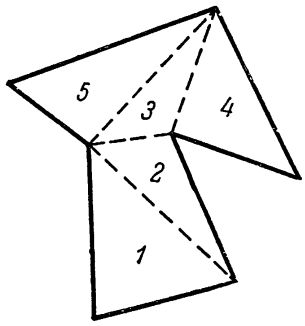


Рис. 29.

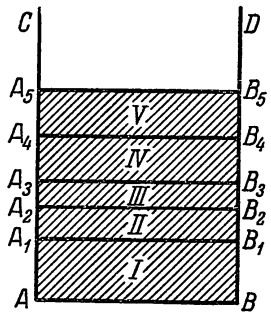


Рис. 30.

Затем мы построим прямоугольник *III*, равносоставленный с треугольником *3*, и т. д. Построенные прямоугольники *I*, *II*, *III*, ... составляют вместе один прямоугольник (заштрихованный на рис. 30), который по построению равносоставлен с исходным многоугольником.

Теперь уже нетрудно доказать упомянутую на стр. 148 теорему.

Теорема Бойяи—Гервина. *Два многоугольника, имеющих равные площади, равносоставлены.*

Доказательство. Согласно лемме 5, каждый из многоугольников равносоставлен с некоторым прямоугольником. Полученные два прямоугольника имеют одинаковую площадь и, следовательно, равносоставлены (лемма 4). Таким образом (лемма 1), два исходных многоугольника равносоставлены.

В качестве простого следствия теоремы Бойяи—Гервина мы докажем следующее предложение:

Теорема: *Два многоугольника, имеющих равные площади, равнодополняемы.*

Доказательство. Пусть A и B — два многоугольника, имеющих одинаковую площадь. Возьмем два одинаковых квадрата настолько больших размеров, чтобы внутри них можно было расположить фигуры A и B. Вырезав из одного квадрата фигуру A, а из другого — фигуру B, имеющую такую же площадь, мы получим

две равновеликие фигуры C и D (заштрихованные на рис. 31). Из равенства площадей фигур C и D вытекает их равносоставленность (в силу теоремы Бойяи — Гервина). Таким образом, фигуры C и D можно разрезать на попарно равные части, а это и означает равнодополняемость многоугольников A и B.

2.2. Теорема Хадвигера — Глюра. Доказанные выше теоремы показывают, что понятия равновеликости, равносоставленности и

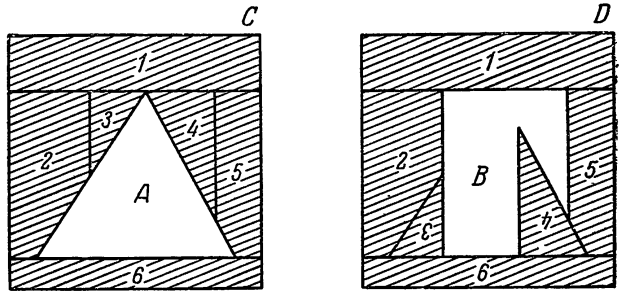


Рис. 31.

равнодополняемости для многоугольников равносильны. Это открывает ряд возможностей для дальнейшего исследования. В частности, возникает интересный вопрос: нельзя ли наложить какие-то дополнительные условия на число или расположение тех частей, из которых составляются равновеликие многоугольники? Замечательный результат такого рода был получен в 1951 году швейцарскими математиками Г. Хадвигером и П. Глюром. Они установили, что в теореме Бойяи — Гервина можно еще дополнительно потребовать, чтобы части, на которые разрезан один из двух равновеликих многоугольников, и равные им части второго многоугольника *имели соответственно параллельные стороны*. На первый взгляд этот результат кажется неправдоподобным: трудно поверить, что два равных треугольника, повернутых друг относительно друга на произвольный угол (рис. 32), всегда можно разбить на равные части с соответственно параллельными сторонами. Тем не менее такое разбиение существует и не только для треугольников, но и для произвольных равновеликих многоугольников.

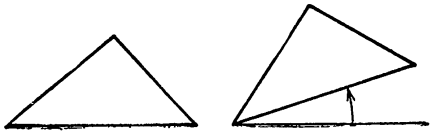


Рис. 32.

Для того чтобы пояснить содержание этой теоремы и получить более точную ее формулировку, мы обратимся снова к доказательству теоремы Бойяи — Гервина, изложенному выше. При доказатель-

стве леммы 3 (рис. 27) мы разбили параллелограмм $ABCD$ на несколько частей (помеченных цифрами *1*, *2*, *3*, ...), из которых оказалось возможным составить параллелограмм $ABEF$. Из рис. 27 видно, что для составления параллелограмма $ABEF$ достаточно воспользоваться *параллельными переносами*[1]) частей. В частности, равносоставленность двух параллелограммов, изображенных на рис. 8, устанавливается с помощью параллельного переноса.

Для установления равносоставленности фигур, изображенных на рис. 9 или 10, уже недостаточно одних параллельных переносов, однако легко показать равносоставленность этих фигур, пользуясь, кроме параллельных переносов, еще *центральными симметриями*[2]). Действительно, заменив (с помощью центральной симметрии относительно точки O) треугольник BOD треугольником COE (рис. 9), мы получим параллелограмм $ADEC$, который затем с помощью параллельного переноса можно совместить с параллелограммом $KLMN$. Аналогично доказывается равносоставленность фигур, изображенных на рис. 10. При доказательстве леммы 2 мы также пользовались центральной симметрией (рис. 25).

Возникает естественный вопрос: нельзя ли доказать равносоставленность двух любых равновеликих многоугольников, не пользуясь поворотом составных частей, т. е. применяя только центральные симметрии и параллельные переносы? Как доказали Хадвигер и Глюр, ответ на этот вопрос положителен. Более точно, будем говорить, что два многоугольника *S-равносоставлены*, если их равносоставленность можно установить с помощью *одних только параллельных переносов и центральных симметрий*. Иначе говоря, два многоугольника S-равносоставлены, если один из них можно разбить на конечное число частей M_1, M_2, M_3, ..., а другой — на такое же число частей M_1', M_2', M_3', ..., причем многоугольники M_1 и M_1' получаются друг из друга с помощью параллельного переноса или центральной симметрии; то же справедливо для M_2 и M_2', для M_3 и M_3' и т. д. Оказывается, что справедлива следующая

Теорема Хадвигера — Глюра. *Любые два многоугольника, имеющие равные площади, являются S-равносоставленными.*

Из теоремы Хадвигера — Глюра и вытекает, что *равновеликие многоугольники всегда можно разбить на многоугольные части с соответственно параллельными сторонами*; достаточно заметить, что если два многоугольника получаются друг из друга с помощью параллельного переноса или центральной симметрии, то их стороны соответственно параллельны.

---

[1]) Определение параллельного переноса см. на стр. 54 кн. IV ЭЭМ.
[2]) Определение центральной симметрии см. на стр. 54 кн. IV ЭЭМ.

Заметим, что доказательство теоремы Хадвигера—Глюра может быть проведено совершенно так же, как и доказательство теоремы Бойяи—Гервина. Мы уже видели выше, что при доказательстве лемм 2 и 3 можно обойтись только параллельными переносами и центральными симметриями. Напротив, в доказательстве леммы 4 используется поворот фигуры на некоторый угол. Однако, заменяя это доказательство другим, можно установить лемму 4, также пользуясь только параллельными переносами и центральными симметриями. Так же обстоит дело и с остальными леммами, что и дает доказательство теоремы Хадвигера—Глюра. Детали доказательств читатель может найти в названной выше книге В. Г. Болтянского.

2.3. Равносоставленность многоугольников и группы движений. Дальнейшие относящиеся сюда результаты связаны с понятием *группы движений*. Заметим прежде всего, что *совокупность всех параллельных переносов и центральных симметрий является группой движений*; эту группу мы обозначим через S. Действительно, если каждое из движений d и d' является параллельным переносом или центральной симметрией, то их произведение dd', а также обратное движение d^{-1} являются параллельными переносами или центральными симметриями. *Совокупность всех движений плоскости также*, очевидно, *является группой движений*. Эту группу мы обозначим через D.

Пусть теперь G — некоторая группа движений, а A и A' — два многоугольника. Предположим, что фигуру A нам удалось разбить на такие части $M_1, M_2, \ldots, M_k$, а фигуру A' — на такие части $M_1', M_2', \ldots, M_k'$, что эти части получаются друг из друга с помощью движений, принадлежащих группе G (т. е. в группе G имеется движение g_1, переводящее многоугольник M_1 в M_1', имеется движение g_2, переводящее M_2 в M_2', и т. д.). В этом случае многоугольники A и A' называются *G-равносоставленными*. Например, если в качестве группы G рассматривается группа S, то мы получаем понятие S-равносоставленности, рассмотренное выше; если рассматривается группа D, то мы получаем обычное понятие равносоставленности (D-равносоставленность). Всякие два многоугольника одинаковой площади D-равносоставлены (теорема Бойяи—Гервина) и даже S-равносоставлены (теорема Хадвигера—Глюра). Вообще же понятие G-равносоставленности можно рассматривать для любой группы движений G. Например, имеет место предложение, аналогичное лемме 1: *если A и C — два многоугольника, каждый из которых G-равносоставлен с многоугольником B, то A и C также G-равносоставлены.* (При доказательстве этой леммы существенным является то, что G есть группа движений, а не произвольная совокупность движений.)

Сформулируем теперь следующую теорему (доказанную В. Г. Болтянским в указанной выше книге):

Теорема. *Группа S является наименьшей группой движений, позволяющей установить равносоставленность любых равновеликих многоугольников. Иначе говоря, если G есть такая группа движений, что любые два равновеликих многоугольника G-равносоставлены, то группа G содержит всю группу S (т. е. содержит все параллельные переносы и все центральные симметрии).*

Интересно еще понятие T-равносоставленности, основанное на рассмотрении группы T всех параллельных переносов. Иначе говоря, многоугольники T-равносоставлены, если их равносоставленность

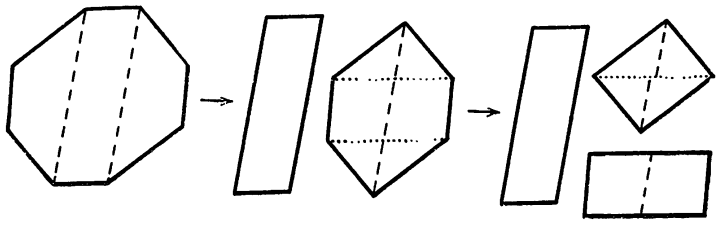


Рис. 33.

может быть установлена с помощью *одних только параллельных переносов*. Отметим следующее предложение: *выпуклый многоугольник в том и только в том случае T-равносоставлен с квадратом той же площади, если этот многоугольник центрально-симметричен*. Рис. 33 иллюстрирует достаточность сформулированного условия: центрально-симметричный многоугольник можно (разбив на части и применяя параллельные переносы) превратить в несколько параллелограммов, а затем — в квадрат.

§ 3. Равносоставленность многогранников

Основной целью этого параграфа является доказательство теоремы Дена о неравносоставленности куба и правильного тетраэдра. В доказательстве используются остроумные идеи, принадлежащие Г. Хадвигеру.

3.1. Теорема Хадвигера. Мы начнем с некоторых алгебраических рассмотрений. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — какие-либо действительные числа. Будем говорить, что эти числа *зависимы*, если можно найти такие, не все обращающиеся в нуль, целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, что имеет место соотношение

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k = 0. \qquad (1)$$

Соотношение (1) будем называть *зависимостью*. Подчеркнем еще раз, что все числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ предполагаются целыми (положительными, отрицательными или равными нулю), причем среди них обязательно должны быть числа, отличные от нуля.

Между одними и теми же числами могут существовать различные зависимости. Возьмем, например, числа $1, \sqrt{2}-1, 3\sqrt{2}+1, 2\sqrt{2}$. Легко проверить, что между этими числами имеются следующие зависимости:

$$2\cdot 1+1(\sqrt{2}-1)+(-1)(3\sqrt{2}+1)+1\cdot 2\sqrt{2}=0,$$
$$4\cdot 1+3(\sqrt{2}-1)+(-1)(3\sqrt{2}+1)+0\cdot 2\sqrt{2}=0,$$
$$0\cdot 1+(-1)(\sqrt{2}-1)+(-1)(3\sqrt{2}+1)+2\cdot 2\sqrt{2}=0.$$

Заметим, что два несоизмеримых числа α_1 и α_2 (т. е. два отличных от нуля числа, отношение которых иррационально) не могут быть зависимыми. Действительно, из существования зависимости $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2=0$ вытекло бы, что частное $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ равно отношению $-\frac{n_2}{n_1}$ двух целых чисел, т. е. рационально.

Предположим теперь, что каждому из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ поставлено в соответствие еще одно число:

числу α_1 поставлено в соответствие число $f(\alpha_1)$,
» α_2 » » » » $f(\alpha_2)$,
. . . . . .
» α_k » » » » $f(\alpha_k)$.

Будем говорить, что числа $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$ образуют *аддитивную функцию*[1]), соответствующую числам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, если они обладают следующим свойством: для каждой зависимости $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\ldots+n_k\alpha_k=0$, существующей между числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, точно такая же зависимость имеется и между числами $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$, т. е. $n_1f(\alpha_1)+n_2f(\alpha_2)+\ldots+n_kf(\alpha_k)=0$.

В остальном же числа $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$ могут быть какими угодно.

---

[1]) С современной точки зрения имеем функцию, если каждому элементу некоторого множества поставлен в соответствие (по некоторому правилу) определенный элемент другого множества. Так, ставя в соответствие каждому действительному числу x число $\sin x$, мы получаем функцию (синус); ставя в соответствие каждому целому положительному числу наибольший его простой делитель, мы получаем функцию; ставя в соответствие числам $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ некоторые другие числа $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_k)$, мы также имеем функцию.

Возьмем для примера числа $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{5}$. Так как эти числа несоизмеримы, то между ними никакой зависимости не существует. Поэтому не требуется никакой зависимости и между числами $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_2)$, т. е. для получения аддитивной функции можно выбирать числа $f(1)$ и $f(\sqrt{5})$ совершенно произвольно. Если же взятые числа окажутся зависимыми, то значения аддитивной функции также должны быть связаны зависимостями.

Пусть, наконец,

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k \tag{2}$$

— все внутренние двугранные углы некоторого многогранника A, выраженные в радианах, а $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — длины ребер, соответствующих этим двугранным углам (рис. 34). Если выбрана некоторая аддитивная функция

$$f(\alpha_1), \ f(\alpha_2), \ \ldots, \ f(\alpha_k) \tag{3}$$

для чисел (2), то сумму

$$l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \ldots + l_k f(\alpha_k) \tag{4}$$

мы обозначим через $f(A)$ и будем называть ее *инвариантом* многогранника A. Инвариант $f(A)$ зависит не только от выбора самого многогранника A, но также и от выбора аддитивной функции (3). Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

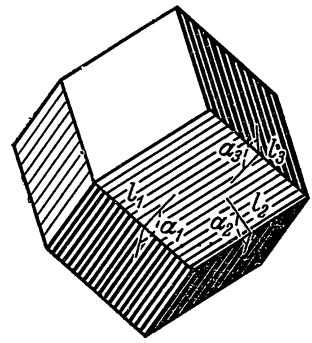


Рис. 34.

Теорема Хадвигера. *Даны два многогранника A и B, имеющих одинаковый объем. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ все внутренние двугранные углы многогранника A, выраженные в радианной мере, а через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ — все внутренние двугранные углы многогранника B. К числам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ присоединим еще число π. Если для полученной системы чисел*

$$\pi, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_p, \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_q \tag{5}$$

можно подобрать такую аддитивную функцию

$$f(\pi), \ f(\alpha_1), \ f(\alpha_2), \ \ldots, \ f(\alpha_p), \ f(\beta_1), \ f(\beta_2), \ \ldots, \ f(\beta_q), \tag{6}$$

что выполнено соотношение

$$f(\pi) = 0, \tag{7}$$

а соответствующие инварианты многогранников A и B неодинаковы:

$$f(A) \neq f(B), \tag{8}$$

то многогранники A и B не равносоставлены.

Доказательство теоремы Хадвигера мы рассмотрим ниже (стр. 170), а сейчас покажем, как из нее вытекает теорема Дена о неравносоставленности куба и правильной пирамиды.

3.2. Теорема Дена. Докажем прежде всего следующую лемму, с помощью которой легко установить (на основании теоремы Хадвигера) справедливость теоремы Дена.

Лемма 6. *Число* $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$ *неизмеримо с* π, *т. е. не существует никакой зависимости*

$$n_1\varphi + n_2\pi = 0 \tag{9}$$

с целыми, отличными от нуля коэффициентами n_1, n_2.

Доказательство проведем методом «от противного». Допустим, что имеет место соотношение (9), в котором $n_1 \neq 0$. Мы можем считать, что $n_1 > 0$ (иначе можно было бы в соотношении (9) изменить знаки на обратные). Так как $n_1\varphi = -n_2\pi$ есть целочисленное кратное угла π, то $\cos n_1\varphi$ равен или $+1$, или -1, т. е. является целым числом. Это утверждение мы и приведем к противоречию. Именно, мы покажем, при каком целом $k > 0$ число $\cos k\varphi$ не является целым.

На основании теоремы сложения, известной из курса тригонометрии, мы можем написать:

$$\cos(k+1)\varphi = \cos(k\varphi + \varphi) = \cos k\varphi \cos\varphi - \sin k\varphi \sin\varphi,$$
$$\cos(k-1)\varphi = \cos(k\varphi - \varphi) = \cos k\varphi \cos\varphi + \sin k\varphi \sin\varphi.$$

Складывая эти два равенства, получаем: $\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos k\varphi \cos\varphi$, или

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{3}\cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi \tag{10}$$

(так как $\cos\varphi = 1/3$).

Покажем (с помощью метода полной математической индукции), что число $\cos k\varphi$ выражается дробью, знаменатель которой равен 3^k, а числитель не делится на 3; отсюда и будет следовать, что число $\cos k\varphi$ при $k > 0$ не является целым. Для $k = 1$ и $k = 2$ это утверждение непосредственно проверяется $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$. Предположим, что для всех чисел $1, 2, \ldots, k$ наше утверждение доказано, и докажем его для числа $k+1$. Согласно предположению индукции, имеем: $\cos k\varphi = \frac{a}{3^k}$, $\cos(k-1)\varphi = \frac{b}{3^{k-1}}$, где a и b — целые числа, не делящиеся на 3.

Отсюда на основании равенства (10) получаем: $\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{3^k} - \frac{b}{3^{k-1}} = \frac{2a-9b}{3^{k+1}}$. Так как число a и число 2 не делятся на 3, то числитель $2a-9b$ также не делится на 3. Индукция проведена.

Теорема Дена. *Куб и правильный тетраэдр, имеющие одинаковый объем, не равносоставлены.*

Доказательство. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ опустим из точки D высоту DE (рис. 35). Точка E является центром равностороннего треугольника ABC, так что отрезок AF, проходящий через точку E, есть медиана. Поэтому F — середина ребра BC, а отрезок DF является медианой треугольника BCD. Отрезок EF составляет третью часть медианы AF или медианы DF, т. е. $EF:DE = 1:3$. Иначе говоря, обозначив через φ угол F прямоугольного треугольника DEF (т. е. двугранный угол тетраэдра $ABCD$), мы найдем:

$$\cos\varphi = 1/3. \qquad (11)$$

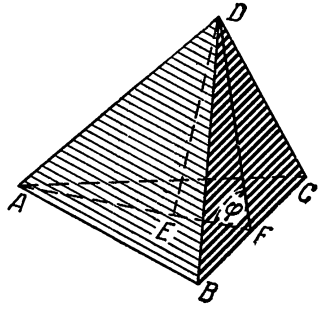


Рис. 35.

Теперь применим теорему Хадвигера. Каждый двугранный угол куба A равен $\frac{\pi}{2}$; двугранный угол правильного тетраэдра B мы обозначили через φ. Поэтому числа (5), о которых идет речь в теореме Хадвигера, здесь будут следующими:

$$\pi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \varphi. \qquad (12)$$

Найдем, какие зависимости существуют между этими числами. Пусть имеется зависимость

$$n_1\pi + n_2\frac{\pi}{2} + n_3\varphi = 0, \qquad (13)$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа. Тогда $(2n_1+n_2)\pi + 2n_3\varphi = 0$, т. е. мы получаем зависимость между числами π и φ. Но такой зависимости с ненулевыми коэффициентами не существует, так как, в силу леммы 6, угол φ несоизмерим с π (см. (11)). Поэтому $2n_1+n_2=0$, $n_3=0$ и соотношение (13) принимает вид

$$n_1\pi + (-2n_1)\frac{\pi}{2} = 0. \qquad (14)$$

Других зависимостей между числами (12) нет.

Положим:

$$f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad f(\varphi) = 1. \qquad (15)$$

Это дает аддитивную функцию, определенную для чисел (12). Действительно, для любой зависимости между числами (12), т. е. для соотношения (14), мы имеем аналогичную зависимость между числами (15): $n_1 f(\pi) + (-2n_1) f(\pi/2) = 0$.

Итак, мы получили аддитивную функцию, заданную для чисел (12) и удовлетворяющую соотношению (7). Остается установить соотношение (8), и неравносоставленность куба и пирамиды будет доказана.

Куб A имеет 12 ребер. Обозначим длину его ребра через l. Тогда инвариант $f(A)$ имеет для куба A значение $f(A) = 12lf(\pi/2) = 0$ (см. (15)). Длину ребра правильной пирамиды B обозначим через m. Тогда инвариант $f(B)$ пирамиды B примет вид $f(B) = 6mf(\varphi) = 6m \neq 0$ (см. (15)). Таким образом, $f(A) \neq f(B)$, и потому куб A и пирамида B не являются равносоставленными. Теорема Дена доказана.

3.3. Доказательство теоремы Хадвигера. Остается доказать теорему Хадвигера. К ее доказательству мы и переходим. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 7. *Пусть*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \tag{16}$$

и

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l \tag{17}$$

— действительные числа, а

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k) \tag{18}$$

— аддитивная функция для чисел (16). *Тогда можно подобрать такие числа*

$$f(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_l), \tag{19}$$

что числа (18) *и* (19) *образуют аддитивную функцию для чисел* (16) *и* (17) *вместе взятых. Иначе говоря, аддитивную функцию для чисел* (16) *можно дополнить до аддитивной функции для чисел* (16), (17).

Достаточно рассмотреть случай, когда к числам (16) добавляется только одно число γ (так как числа (17) можно добавлять не все сразу, а одно за другим). Итак, задана аддитивная функция (18) для чисел (16) и, кроме того, дано число γ. Мы должны подобрать такое число $f(\gamma)$, что система чисел

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k), f(\gamma) \tag{20}$$

будет представлять собой аддитивную функцию для чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \gamma. \tag{21}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Между числами (21) не существует никакой зависимости $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k + n\gamma = 0$, в которой коэффициент n при числе γ был бы отличен от нуля. Иначе говоря, число γ ни в одну зависимость не входит. В этом случае число $f(\gamma)$ никакими условиями не связано, т. е. за $f(\gamma)$ можно принять любое действительное число.

Случай 2. Между числами (21) имеется зависимость, в которую входит число γ:

$$n_1'\alpha_1 + n_2'\alpha_2 + \ldots + n_k'\alpha_k + n'\gamma = 0, \qquad n' \neq 0. \tag{22}$$

В этом случае мы определим число $f(\gamma)$ из соотношения

$$n_1' f(\alpha_1) + n_2' f(\alpha_2) + \ldots + n_k' f(\alpha_k) + n' f(\gamma) = 0, \tag{23}$$

т. е. положим:

$$f(\gamma) = -\frac{n_1'}{n'} f(\alpha_1) - \frac{n_2'}{n'} f(\alpha_2) - \ldots - \frac{n_k'}{n'} f(\alpha_k).$$

Покажем, что таким путем мы получаем аддитивную функцию для чисел (21). Пусть

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k + n\gamma = 0 \tag{24}$$

— какая либо зависимость между числами (21) (отличная от зависимости (22) или совпадающая с ней). Мы должны показать, что такая же зависимость имеется и между числами (20), т. е. что имеет место соотношение

$$n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n_k f(\alpha_k) + n f(\gamma) = 0. \tag{25}$$

Покажем это. Умножим соотношение (24) на n' и вычтем из него соотношение (22), умноженное на n: $(n'n_1 - nn_1')\alpha_1 + (n'n_2 - nn_2')\alpha_2 + \ldots + (n'n_k - nn_k')\alpha_k = 0$. Мы получаем зависимость между числами (16), и так как (18) есть аддитивная функция для этих чисел, то имеет место соотношение $(n'n_1 - nn_1') f(\alpha_1) + (n'n_2 - nn_2') f(\alpha_2) + \ldots + (n'n_k - nn_k') f(\alpha_k) = 0$. Прибавив к этому соотношению равенство (23), умноженное на n, найдем: $n'n_1 f(\alpha_1) + n'n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n'n_k f(\alpha_k) + n'n f(\gamma) = 0$. Наконец, сокращая это равенство на число $n' \neq 0$, мы и получим (25). Таким образом, числа (20) дают нам аддитивную функцию.

Лемма 8. *Пусть A — многогранник, произвольным образом разбитый на конечное число меньших многогранников $M_1, M_2, \ldots, \ldots, M_k$. Обозначим через*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \tag{26}$$

все двугранные углы многогранника A, а через

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \tag{27}$$

— все двугранные углы всех многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$. *Присоединим к числам* (26) *и* (27) *еще число* π *и предположим, что для полученной системы чисел*

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \tag{28}$$

задана аддитивная функция $f(\pi), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_p), f(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_r)$, *удовлетворяющая условию*

$$f(\pi) = 0. \tag{29}$$

Тогда инварианты $f(A), f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_k)$ *рассматриваемых многогранников связаны соотношением*

$$f(A) = f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_k). \tag{30}$$

Для доказательства рассмотрим все отрезки, являющиеся ребрами многогранников $A, M_1, M_2, \ldots, M_k$. Отметим на этих отрезках все точки, являющиеся вершинами многогранников $A, M_1,$

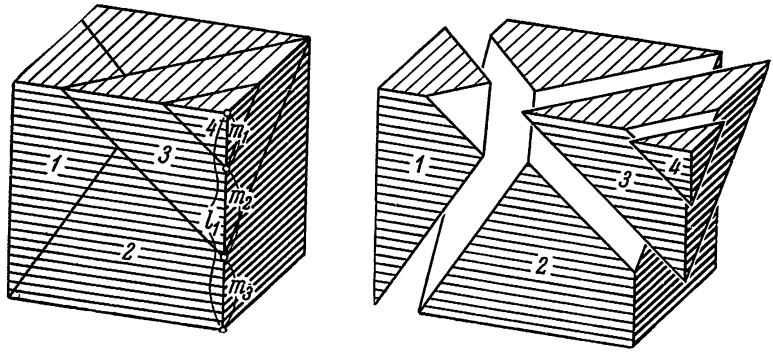


Рис. 36.

$M_2, \ldots, M_k$, а также все точки, в которых пересекаются ребра между собой. Тогда мы получим конечное число более мелких отрезков. Эти более мелкие отрезки будем (следуя В. Ф. Кагану) называть *звеньями*. На рис. 36 изображено разбиение куба на многогранники; ребро куба, обозначенное на этом рисунке через l_1, состоит из трех звеньев m_1, m_2, m_3. Вообще, каждое ребро каждого из многогранников $A, M_1, M_2, \ldots, M_k$ состоит из одного или нескольких звеньев. Каждое звено многогранника A (т. е. звено, лежащее на одном из ребер многогранника A) является также звеном одного или нескольких многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Возьмем какое-либо звено многогранника A, и пусть m — его длина, а α — соответствующий двугранный угол многогранника A. Тогда α есть одно из чисел (26), и потому определено число $f(\alpha)$. Произведение $mf(\alpha)$ назовем *весом* рассматриваемого звена в много-

граннике A. Точно так же определяются веса звеньев в многогранниках M_1, M_2, ..., M_k. Заметим, что одно и то же звено может иметь разный вес в различных примыкающих к этому звену многогранниках: ведь эти примыкающие многогранники могут иметь различные углы при этом звене.

Возьмем теперь все звенья многогранника A, найдем их веса в многограннике A и составим сумму всех этих весов. Нетрудно видеть, что эта сумма равна инварианту $f(A)$ многогранника A. Действительно, рассмотрим ребро l_1 многогранника A, и пусть оно состоит, например, из трех звеньев, имеющих длины m_1, m_2, m_3 (см. рис. 36). Тогда каждому звену m_1, m_2, m_3 соответствует в многограннике A один и тот же двугранный угол α_1, а именно двугранный угол при ребре l_1. Поэтому сумма весов звеньев m_1, m_2, m_3 равна $m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + m_3 f(\alpha_1) = (m_1 + m_2 + m_3) f(\alpha_1) = l_1 f(\alpha_1)$. Точно так же сумма весов всех звеньев, из которых состоит ребро l_2 многогранника A, равна $l_2 f(\alpha_2)$ и т. д. Поэтому сумма весов всех звеньев многогранника A равна инварианту $f(A)$ многогранника A.

Совершенно так же, инвариант каждого из многогранников M_1, M_2, ..., M_k равен сумме весов всех его звеньев (конечно, вес каждого звена вычисляется в рассматриваемом многограннике).

Теперь уже нетрудно установить справедливость соотношения (30). Для вычисления суммы, стоящей в правой части этого соотношения, нужно взять сумму весов всех звеньев по всем многогранникам M_1, M_2, ..., M_k. Найдем, с каким коэффициентом будет входить в эту сумму некоторое звено m. Обозначим все двугранные углы многогранников M_1, M_2, ..., M_k, примыкающие к звену m, через γ_i, γ_j, ..., γ_s (эти величины содержатся среди чисел (27)). Тогда вес рассматриваемого звена в многограннике с двугранным углом γ_i равен $mf(\gamma_i)$; вес его в многограннике с двугранным углом γ_j равен $mf(\gamma_j)$ и т. д. Таким образом, сумма весов звена m по всем тем многогранникам M_1, M_2, ..., M_k, которые примыкают к этому звену, равна

$$mf(\gamma_i) + mf(\gamma_j) + \ldots + mf(\gamma_s). \tag{31}$$

Все звенья можно разбить на три группы.

1) Звенья, которые целиком (кроме, может быть, концов) расположены *внутри* многогранника A. Если m есть такое звено и если *каждый* из многогранников M_1, M_2, ..., M_k, *примыкающих* к отрезку m, имеет этот отрезок своим звеном, то двугранные углы примыкающих к звену m многогранников образуют в сумме полный угол (рис. 37, *а*; на этом рисунке, так же как и на рис. 37, *б*, 38, 39, *а*, 39, *б*, изображено сечение многогранника A и многогранников, примыкающих к отрезку m, плоскостью, перпендикулярной к звену m; само звено m изображено на этих

рисунках одной точкой R). Таким образом, в этом случае $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=2\pi$, или $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s-2\pi=0$. Это есть зависимость между числами (28), и потому имеем: $f(\gamma_i)+f(\gamma_j)+\ldots+f(\gamma_s)-2f(\pi)=0$. Согласно (29), мы получаем отсюда $f(\gamma_i)+f(\gamma_j)+\ldots+f(\gamma_s)=0$, и выражение (31) обращается в нуль.

Если же m есть звено, расположенное внутри многогранника A, но один из многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$, примыкающих к отрезку m, *не имеет его своим звеном* (т. е. отрезок m расположен

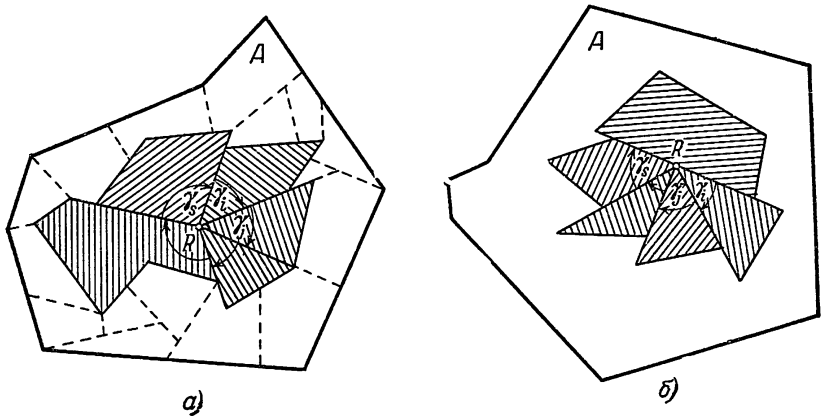


Рис. 37.

внутри грани одного из многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$), то двугранные углы остальных примыкающих к отрезку m многогранников составляют в сумме развернутый угол (рис. 37, *б*), т. е. $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\pi$. Отсюда, как и выше, вытекает, что выражение (31) обращается в нуль.

Таким образом, звенья, расположенные в н у т р и многогранника A, можно при вычислении правой части равенства (30) не учитывать (для них сумма весов равна нулю) [1]).

2) Звенья, расположенные на гранях многогранника A, но не на его ребрах. В этом случае $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\pi$ (рис. 38) и выражение (31), так же как и в предыдущем случае, обращается в нуль.

3) Остается рассмотреть звенья, лежащие на ребрах многогранника A. В этом случае сумма $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s$ равна или двугран-

---

[1]) Если д в а многогранника, примыкающих к отрезку m, не имеют его своим звеном, т. е. если отрезок m лежит внутри граней двух примыкающих друг к другу многогранников, то только эти два многогранника и примыкают к отрезку m, так что этот отрезок не лежит ни на одном ребре многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$ и потому не является звеном.

ному углу α соответствующего ребра: $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\alpha$ (рис. 39, *а*), или углу $\alpha-\pi$ (т. е. $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\alpha-\pi$; это может случиться, если угол α — тупой, см. рис. 39, *б*). В обоих случаях имеем: $f(\gamma_i)+f(\gamma_j)+\ldots+f(\gamma_s)=f(\alpha)$, и выражение (31) оказывается равным $mf(\alpha)$, т. е. весу рассматриваемого звена в многограннике A. Итак, сумма, стоящая в правой части соотношения (30), равна сумме весов всех звеньев многогранника A, т. е. равна инварианту $f(A)$.

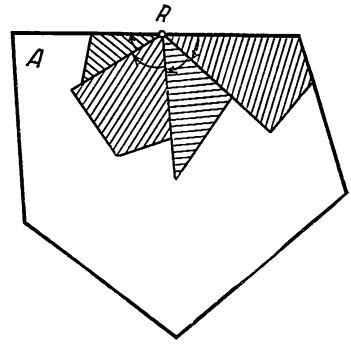


Рис. 38.

Доказательство теоремы Хадвигера. Допустим, что многогранники A и B равносоставлены, и пусть M_1, M_2, ..., M_n — такие многогранники, из которых можно составить как A, так и B. Все внутренние двугранные углы всех многогранников M_1, M_2, ..., M_n обозначим через γ_1, γ_2, ..., γ_r. Согласно лемме 7, аддитивную функцию (6), заданную для чисел (5), можно дополнить числами $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$, ..., $f(\gamma_r)$ так, что мы получим аддитивную функцию для чисел π, α_1, α_2, ..., α_p, β_1, β_2, ...,

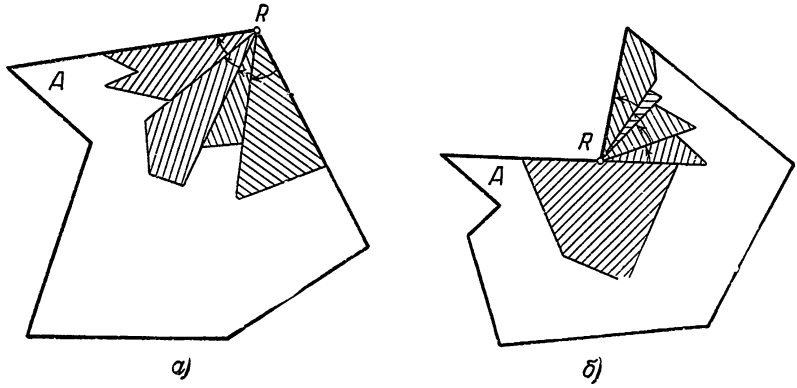


Рис. 39.

β_q, γ_1, γ_2, ..., γ_r. (Эта аддитивная функция по-прежнему удовлетворяет условию (7)). Так как многогранник A составляется из многогранников M_1, M_2, ..., M_n, то (лемма 8) инвариант $f(A)$ имеет значение $f(A)=f(M_1)+f(M_2)+\ldots+f(M_n)$. Но многогранник B также составляется из M_1, M_2, ..., M_n, и потому $f(B)=f(M_1)+f(M_2)+\ldots+f(M_n)$. Таким образом, $f(A)=f(B)$, что противоречит соотношению (8). Итак, мы видим, что предположение

о равносоставленности многогранников A и B приводит к противоречию.

Тем самым теорема Хадвигера и вместе с ней теорема Дена полностью доказаны.

3.4. Независимость аксиом (α)—(δ) для площадей и объемов. Методы, использованные при доказательстве теорем Дена и Хадвигера, тесно связаны с вопросом о независимости[1]) для площадей (или объемов). Рассмотрим вопрос о независимости этих аксиом для площадей многоугольников. Для установления независимости каждой из аксиом (α)—(δ) от остальных нужно для каждой из аксиом построить такую «модель площади», которая этой аксиоме не удовлетворяет, но удовлетворяет всем остальным аксиомам.

Проще всего построить такую модель для аксиомы (δ): положив $s^*(M) = 4s(M)$ для любого многоугольника M (где s означает обычную площадь, удовлетворяющую аксиомам (α)—(δ)), мы получаем модель s^*, очевидно, удовлетворяющую всем аксиомам, кроме (δ). (Эта модель, очевидно, равносильна введению новой единицы площади, — для s^* единицей площади является квадрат со стороной $\frac{1}{2}$.)

Без труда строится и модель, показывающая независимость аксиомы (β): положив $s^{**}(M) = 1$ для любого многоугольника, мы получаем модель s^{**}, удовлетворяющую всем аксиомам, кроме (β).

Сравнительно просто строится и модель, показывающая независимость аксиомы (γ). Проведем на плоскости некоторую прямую l, которую будем называть «горизонтальной». Прямая l разбивает плоскость на две полуплоскости, одну из которых условимся называть «верхней», а другую — «нижней». Пусть теперь M — произвольный многоугольник, заданный на плоскости. Прямая l разбивает его на две части: часть $M_в$, расположенную в «верхней» полуплоскости, и часть $M_н$, расположенную в «нижней» полуплоскости (рис. 40). Мы положим: $s^{***}(M) = s(M_в) + 2s(M_н)$, где s означает обычную площадь. Если многоугольник M целиком расположен в «верхней» полуплоскости, т. е. $M = M_в$, то $s^{***}(M) = s(M)$, а если он расположен в «нижней» полуплоскости, то $s^{***}(M) = 2s(M)$. Без труда

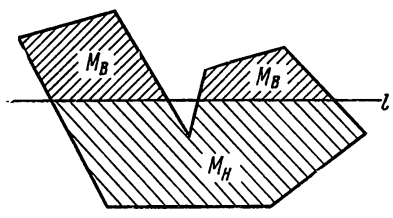


Рис. 40.

[1]) О понятии независимости аксиом и используемом ниже понятии модели см. статью «Аксиомы и основные понятия геометрии» в кн. IV ЭЭМ.

проверяется, что построенная модель s^{***} удовлетворяет всем аксиомам, кроме (γ) (аксиоме (δ) удовлетворяет любой квадрат со стороной 1, лежащий целиком в «верхней» полуплоскости).

Остается рассмотреть вопрос о независимости аксиомы (α). Доказательства этой независимости мы не можем в этой статье привести полностью, так как это доказательство существенно неэлементарно. Однако основную идею такого доказательства (тесно связанную с методами, примененными при доказательстве теорем Хадвигера и Дена) мы изложим.

Обозначим через M_1 какой-либо квадрат со стороной, равной 1, а через M_2 — некоторый прямоугольник, имеющий иррациональную площадь, например прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{5}$. Так как числа

$$s(M_1)=1 \quad \text{и} \quad s(M_2)=\sqrt{5} \tag{32}$$

несоизмеримы, то (ср. стр. 167), положив

$$f(s(M_1))=1, \qquad f(s(M_2))=-1, \tag{33}$$

мы получаем аддитивную функцию для чисел (32). Пусть теперь M_3 — произвольный многоугольник. По лемме 7 можно подобрать такое число $f(s(M_3))$, чтобы числа $f(s(M_1))$, $f(s(M_2))$, $f(s(M_3))$ составили аддитивную функцию для чисел $s(M_1)$, $s(M_2)$, $s(M_3)$. Выбрав теперь еще один (какой угодно) многоугольник M_4, мы сможем (опять по лемме 7) выбрать число $f(s(M_4))$, образовав аддитивную функцию $f(s(M_1))$, $f(s(M_2))$, $f(s(M_3))$, $f(s(M_4))$ для чисел $s(M_1)$, $s(M_2)$, $s(M_3)$, $s(M_4)$. Продолжая выбирать многоугольники M_i и находить числа $f(s(M_i))$, мы получим некоторую последовательность многоугольников M_1, M_2, M_3, ... и две последовательности чисел

$$s(M_1),\ s(M_2),\ s(M_3),\ \ldots; \tag{34}$$

$$f(s(M_1)),\ f(s(M_2)),\ f(s(M_3)),\ \ldots \tag{35}$$

Эти последовательности обладают тем свойством, что для любого конечного набора чисел, выбранных из верхней последовательности, соответствующие числа нижней последовательности образуют аддитивную функцию. В этом случае мы будем говорить, что *последовательность* (35) *является аддитивной функцией для последовательности* (34).

Многоугольниками M_1, M_2, ..., M_n, ... не исчерпываются все многоугольники плоскости. Выберем какой-нибудь многоугольник, не вошедший в эту последовательность, и обозначим его через M_ω. Теперь подберем число $f(s(M_\omega))$ таким образом, чтобы последовательность $f(s(M_1))$, $f(s(M_2))$, ..., $f(s(M_n))$, ..., $f(s(M_\omega))$ была аддитивной функцией для последовательности $s(M_1)$, $s(M_2)$, ..., $s(M_n)$, ..., $s(M_\omega)$, т. е. чтобы (для любых номеров i_1, ..., i_k) числа $f(s(M_{i_1}))$, $f(s(M_{i_2}))$, ..., $f(s(M_{i_k}))$, $f(s(M_\omega))$ составляли аддитивную функцию для чисел $s(M_{i_1})$, $s(M_{i_2})$, ..., $s(M_{i_k})$, $s(M_\omega)$. Возможность такого выбора числа $f(s(M_\omega))$ вытекает из леммы 7 (правда, в лемме 7 речь шла о конечном множестве чисел, а в последовательностях (34), (35) их бесконечно много; однако, как нетрудно проверить, лемма 7 и ее доказательство остаются справедливыми и в этих условиях). Теперь выберем еще многоугольник $M_{\omega+1}$ и такое число $f(s(M_{\omega+1}))$, чтобы последовательность $f(s(M_1))$, $f(s(M_2))$, ..., $f(s(M_\omega))$, $f(s(M_{\omega+1}))$ была аддитивной функцией для последовательности $s(M_1)$, $s(M_2)$, ..., $s(M_\omega)$, $s(M_{\omega+1})$. Затем мы выберем $M_{\omega+2}$ и $f(s(M_{\omega+2}))$, т. д. В результате мы получим две последовательности: $s(M_1)$, $s(M_2)$, ..., $s(M_\omega)$, $s(M_{\omega+1})$, $s(M_{\omega+2})$, ...; $f(s(M_1))$, $f(s(M_2))$, ..., $f(s(M_\omega))$, $f(s(M_{\omega+1}))$, $f(s(M_{\omega+2}))$, ..., вторая из которых является аддитивной функцией для первой.

Многоугольниками $M_1, M_2, \ldots, M_\omega, M_{\omega+1}, M_{\omega+2}, \ldots$ снова не исчерпываются все многоугольники плоскости. Возьмем какой-либо не вошедший в эту последовательность многоугольник и обозначим его через $M_{\omega 2}$. Далее выберем число $f(s(M_{\omega 2}))$ так, чтобы числа $f(s(M_1)), f(s(M_2)), \ldots$ $\ldots, f(s(M_\omega)), f(s(M_{\omega+1})), \ldots, f(s(M_{\omega 2}))$ образовали аддитивную функцию для последовательности $s(M_1), s(M_2), \ldots, s(M_\omega), s(M_{\omega+1}), \ldots$ $\ldots, s(M_{\omega 2})$.

Таким образом мы можем продолжать все дальше и дальше. После построения многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_\omega, M_{\omega+1}, M_{\omega+2}, \ldots, M_{\omega 2}, M_{\omega 2+1}, M_{\omega 2+2}, \ldots, M_{\omega 3}, M_{\omega 3+1}, M_{\omega 3+2}, \ldots, M_{\omega 4}, M_{\omega 4+1}, \ldots, M_{\omega 5}, \ldots$ $\ldots, M_{\omega 6}, \ldots$ мы выберем какой-либо не встретившийся в этой последовательности многоугольник и обозначим его через M_{ω^2}, затем $M_{\omega^2+1}, M_{\omega^2+2}, \ldots, M_{\omega^2+\omega}, M_{\omega^2+\omega+1}, \ldots \ldots \ldots$

Так мы будем «нумеровать» многоугольники все далее и далее. Можно ли таким путем перенумеровать *все* многоугольники плоскости? Допустим, что нам это удастся сделать. Тогда мы расположим все многоугольники плоскости в последовательность

$$M_1, M_2, \ldots, M_\omega, \ldots M_{\omega^2}, \ldots, M_{\omega^3}, \ldots \ldots M_{\omega^2}, \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

и для каждого многоугольника M будет определено соответствующее число $f(s(M))$, причем последовательность

$$f(s(M_1)), f(s(M_2)), \ldots, f(s(M_\omega)), \ldots \ldots, f(s(M_{\omega^2}), \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

будет аддитивной функцией для последовательности чисел

$$s(M_1), s(M_2), \ldots, s(M_\omega), \ldots \ldots s(M_{\omega^2}), \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Положим теперь $s^{****}(M)=f(s(M))$ для любого многоугольника M. Нетрудно понять, что s^{****} есть модель площади, удовлетворяющая аксиомам (β)—(δ). Действительно, если многоугольник M разбит на два многоугольника M', M'', то

$$s(M)=s(M')+s(M'') \quad (39)$$

в силу (β); так как последовательность (37) является аддитивной функцией для последовательности (38), то из зависимости (39) вытекает зависимость $f(s(M))=f(s(M'))+f(s(M''))$ (ведь многоугольники M, M', M'' где-то встречаются в последовательности (36)), т. е. $s^{****}(M)=s^{****}(M')+$ $+s^{****}(M'')$. Таким образом, функция s^{****} удовлетворяет аксиоме (β). Аналогично, если многоугольник M равен многоугольнику N, то $s(M)=s(N)$ (в силу (γ)); поэтому $f(s(M))=f(s(N))$, т. е. функция s^{****} удовлетворяет аксиоме (γ). Удовлетворяет она и аксиоме (δ) (см. (33)). Аксиома же (α) не выполняется, так как $s^{****}(M_2)<0$ (см. (33)).

Итак, если бы удалось «перенумеровать» все многоугольники плоскости, то независимость аксиомы (α) была бы доказана. Остается заметить, что в математике д о к а з ы в а е т с я возможность «перенумеровать» элементы л ю б о г о множества символами

$$1, 2, \ldots \omega, \quad \omega+1, \ldots \omega 2, \ldots \omega 3, \ldots \ldots \omega^2, \omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots \ldots$$

Эти символы называются *трансфинитными числами*, а метод доказательства, заключающийся в переходе от уже рассмотренных трансфинитных чисел к большим, называется *трансфинитной индукцией*. Точное определение трансфинитных чисел и трансфинитной индукции (и на основе этого завершение доказательства независимости аксиомы (α)) н е э л е м е н т а р н о и не может быть приведено в данной статье. Для читателя, знакомого с трансфинитными числами, завершение изложенного доказательства не представляет никакого труда.

Наконец, сделаем несколько заключительных замечаний в связи с приведенным доказательством.

а) Соотношение $s^{****}(M_2) = -1$ (см. (33)) показывает, что *формула площади прямоугольника не может быть выведена только из аксиом* (β)—(δ) (без «неэлементарной» аксиомы (α)), ибо величина s^{****} удовлетворяет аксиомам (β)—(δ), и потому всякое рассуждение на основе аксиом (β)—(δ) должно быть одинаково справедливо как для площади s, так и для величины s^{****}.

б) Совершенно аналогичное доказательство может быть проведено для объемов многогранников в пространстве. В частности, *формула объема прямоугольного параллелепипеда не может быть выведена из аксиом* (β)—(δ).

в) Весьма интересно следующее видоизменение изложенного доказательства. Обозначим через M_1 куб с ребром 1, а через M_2 — правильный тетраэдр того же объема. Далее расположим *все* многогранники пространства в трансфинитную последовательность:

$$M_1, M_2, \ldots, M_\omega, M_{\omega+1}, \ldots, M_{\omega 2}, \ldots M_{\omega 3}, \ldots \ldots M_{\omega^2}, \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

Теперь с помощью формулы (15) определим аддитивную функцию для чисел (12). Соответствующий инвариант удовлетворяет соотношениям

$$f(M_1)=0, \qquad f(M_2) \neq 0 \quad (41)$$

(см. стр. 170). Теперь присоединим к величинам (12) еще все двугранные углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ многогранника M_3 и числа (15) дополним до аддитивной функции для чисел π, $\pi/2$, φ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ (с помощью леммы 7). Это дает возможность найти инвариант $f(M_3)$. Затем мы добавим еще все двугранные углы многогранника M_4, и т. д. В результате трансфинитной индукции по последовательности (40) мы определим значение инварианта $f(M)$ для любого многогранника M. Из леммы 8 вытекает, что величина $f(M)$ удовлетворяет аксиоме (β):

Если многогранник M разбит на две части M' и M'', то

$$f(M)=f(M')+f(M''). \quad (42)$$

Удовлетворяет инвариант $f(M)$ и аксиоме (γ):

$$\text{Если } M=N, \text{ то } f(M)=f(N). \quad (43)$$

Положим теперь для любого многогранника M: $v^*(M)=v(M)+f(M)$, где v означает обычный объем (удовлетворяющий аксиомам (α)—(δ)). Тогда величина $v^*(M)$ удовлетворяет аксиомам (β)—(δ) (см. (41), (42), (43)). В то же время

$$v^*(M_2) \neq v(M_2) \quad (44)$$

(см. (41)). Далее из соотношения $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (см. (15)) вытекает, что если M — прямоугольный параллелепипед, то $f(M)=0$, и потому $v^*(M)=v(M)$. Итак, *величина v^* удовлетворяет аксиомам* (β)—(δ), *а для прямоугольных параллелепипедов совпадает с обычным объемом.* В то же время для правильного тетраэдра M_2 имеет место соотношение (44). Следовательно, справедлива следующая теорема:

Пользуясь аксиомами (β)—(δ) *и формулой объема прямоугольного параллелепипеда, невозможно вычислить объем правильного тетраэдра.*

Эта теорема (из которой, очевидно, вновь следует теорема Дена) показывает, что метод разбиения, метод дополнения и вообще любой другой «элементарный» метод (т. е. основанный на аксиомах (β)—(δ)) бессильны вывести формулу объема тетраэдра, и потому для этой цели необходимо привлечение метода исчерпывания, метода пределов или какого-либо иного «неэлементарного» метода (использующего аксиому (α)).

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Болтянский, Равновеликие и равносоставленные фигуры, М., Физматгиз, 1956.

Популярная брошюра, широко освещающая круг вопросов, затронутых в настоящей статье.

[2] В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников, в книге того же автора «Очерки по геометрии», М., изд. Московского университета, 1963, стр. 156—194.

В этой превосходной статье излагается доказательство теоремы Дена, содержащей необходимое условие о равносоставленности многогранников. В первой части статьи доказывается также теорема Бойяи—Гервина о равносоставленности равновеликих многоугольников.

[3] В. Г. Болтянский, Новые работы о равносоставленности многоугольников и многогранников, в разделе «Новости математической науки» сборника «Математическое просвещение», вып. 2, 1957, стр. 263—265.

Обзор работ Г. Хадвигера, Ж.-П. Зидлера, П. Глюра.

[4] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., Гостехиздат, 1954.

Сборник задач повышенной трудности по стереометрии, сопровождаемых подробными решениями. Книга завершается циклом задач «Разрезание и складывание фигур», включающим также тему «равновеликость и равносоставленность».

[5] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957 (Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изометрии; русский перевод готовится к печати изд. «Наука»).

Серьезная монография видного швейцарского геометра, в значительной степени основанная на оригинальных работах самого Хадвигера и его школы. В книге весьма широко освещен круг вопросов, связанных с темой настоящей статьи.

См. также статью И. М. Яглома [5], указанную в списке литературы к статье «Площадь и объем».

ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ И ТЕЛА

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Определение и основные свойства 182
1.1. Определение. Примеры 182
1.2. Граница выпуклой фигуры 185
1.3. Опорные прямые и плоскости 187
§ 2. Простейшие метрические характеристики выпуклых фигур 195
2.1. Диаметр выпуклой фигуры 195
2.2. Ширина выпуклой фигуры. Фигуры постоянной ширины . . . 197
2.3. Описанные и вписанные окружности 200
2.4. Расстояние между выпуклыми фигурами 202
§ 3. Выпуклые многоугольники и многогранники 207
3.1. Пересечение выпуклых фигур 207
3.2. Выпуклые многосторонники и многогранники 209
3.3. Выпуклая оболочка множества 212
3.4. Выпуклые многоугольники и многовершинники 213
3.5. Строение выпуклой оболочки 215
§ 4. Периметр, площадь, объем 219
4.1. Сложение выпуклых фигур 219
4.2. Отклонение 222
4.3. Сходящиеся последовательности выпуклых фигур 223
4.4. Теорема Бляшке 226
4.5. Периметр, площадь, объем 228
4.6. Периметр и площадь суммы выпуклых фигур 237
§ 5. Выпуклые тела в многомерных пространствах 239
5.1. Основные свойства 239
5.2. Выпуклые многогранники 240
5.3. Выпуклые многовершинники 241
5.4. Строение выпуклой оболочки 245
5.5. Объемы 246
§ 6. Некоторые задачи комбинаторной геометрии 247
6.1. Теорема Хелли 247
6.2. Чебышевские приближения 251
6.3. Теорема Минковского 256
6.4. Теорема Блихфельда 261
6.5. Задачи о разбиении выпуклых фигур на части 263
Литература 267

§ 1. Определение и основные свойства

1.1. Определение. Примеры. Чаще всего в геометрии рассматривают *связные* фигуры, т. е. такие, что каждые две точки фигуры можно соединить линией, целиком принадлежащей этой фигуре. При этом соединяющая линия может оказаться довольно сложной (рис. 1). Естественно выделить класс фигур, для которых в качестве линии, соединяющей две ее точки A, B, всегда можно выбрать самую простую линию — прямолинейный отрезок AB. Такие фигуры называются выпуклыми.

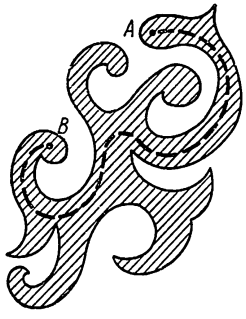


Рис. 1.

Определение. *Фигура F называется выпуклой, если вместе с каждыми двумя точками A, B она целиком содержит и весь отрезок AB.*

Примеры выпуклых фигур показаны на рис. 2; на рис. 3 изображены некоторые невыпуклые фигуры. Фигуры, изображенные на рис. 2, являются ограниченными (т. е. каждая из них может быть целиком заключена в круг некоторого радиуса). Существуют также и неограниченные выпуклые фигуры, например: полоса, полуплоскость, угол (меньший 180°) и др. (рис. 4). Ясно, что вся плоскость также представляет собой выпуклую фигуру.

Кроме плоских можно рассматривать также пространственные выпуклые фигуры (их обычно называют выпуклыми *телами*, см. стр. 191). Примерами могут служить тетраэдр, параллелепипед, шар, шаровой слой, конус, цилиндр, эллипсоид (рис. 5).

Важными примерами пространственных выпуклых тел являются так называемые *выпуклые конусы*. Выпуклое пространственное тело называется выпуклым конусом с вершиной O, если вместе с каждой отличной от O точкой A оно содержит и весь луч OA. Например, если F — какая-либо выпуклая фигура, расположенная в плоскости Π, а O — точка, не лежащая в этой плоскости, то, проводя из точки O всевозможные лучи, пересекающие фигуру F (рис. 6), мы получим выпуклый конус (конус с вершиной O и «направляющим множеством» F). В случае, когда F — круг с центром Q и прямая OQ перпендикулярна к плоскости Π, мы получаем (бесконечный) прямой круговой конус (рис. 7). Если F — полоса, то выпуклый конус K представляет собой двугранный угол (рис. 8); если же F совпадает со всей плоскостью Π, то K — полупространство. Наконец, если F — выпуклый многоугольник, то K представляет собой выпуклый многогранный угол (рис. 9). Можно доказать, что изображенный на рис. 6 способ получения выпуклых конусов является общим, т. е. любой (отличный от всего пространства) выпуклый конус K может быть получен таким образом.

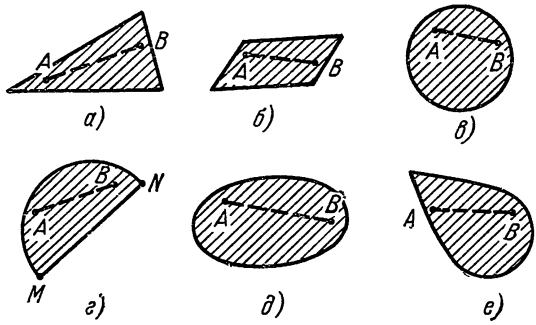


Рис. 2.

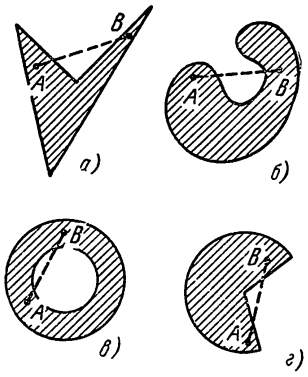


Рис. 3.

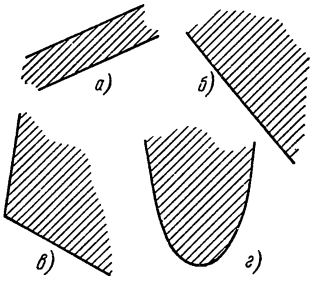


Рис. 4.

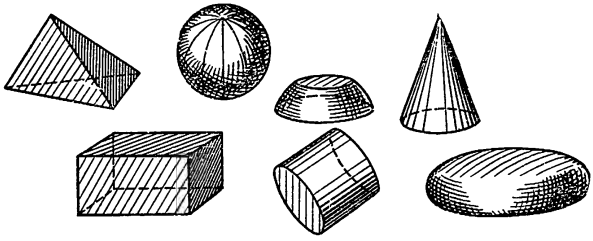


Рис. 5.

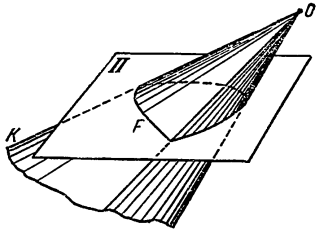


Рис. 6.

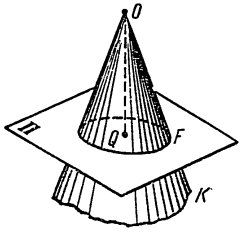


Рис. 7.

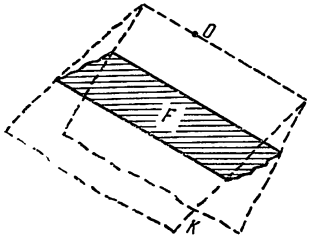


Рис. 8.

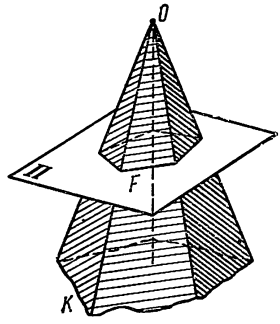


Рис. 9.

Можно также рассматривать выпуклые фигуры, расположенные на прямой линии. Ими являются *отрезок*, *луч* и *вся прямая*. Существенно, что других выпуклых фигур на прямой не существует: *всякая ограниченная выпуклая фигура, расположенная на прямой, является отрезком, а неограниченная — лучом или всей прямой.*

Это утверждение без труда доказывается с помощью теоремы о непрерывности Дедекинда (см., например, ЭЭМ, кн. IV, стр. 38—40). Обратно, из выделенного курсивом утверждения можно вывести предложение Дедекинда. Таким образом, сформулированное выше утверждение о выпуклых фигурах на прямой линии может быть принято в качестве аксиомы непрерывности, эквивалентной аксиоме Дедекинда (возможно даже, что в таком виде аксиома непрерывности обладает большей наглядностью и убедительностью).

В дальнейшем, говоря о «фигурах», мы будем считать (если не оговорено противное), что речь может идти как о плоских фигурах, так и о пространственных телах или о фигурах, расположенных на прямой линии.

Свойство, положенное выше в основу определения выпуклых фигур (существование в фигуре прямолинейного отрезка, соединяющего любые две ее точки), с первого взгляда может показаться несущественным и даже надуманным. В действительности же выделяемый этим определением класс *выпуклых фигур* является весьма интересным и важным для геометрии. Дело в том, что «произвольные» геометрические фигуры могут быть устроены необычайно сложно. Например, определить, находится ли точка A «внутри» или

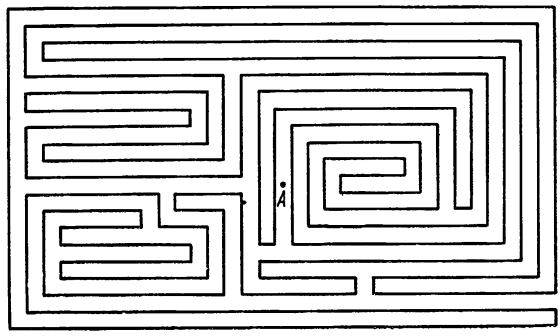


Рис. 10.

«вне» замкнутого многоугольника, изображенного на рис. 10, совсем непросто! Если же рассматривать фигуры, не являющиеся многоугольниками, то можно столкнуться и с гораздо большими сложностями. Существует, например, плоская фигура, ограниченная не пересекающей себя замкнутой линией и в то же время не имеющая

ни площади, ни периметра[1]); можно также указать на плоскости «линию», не имеющую точек разветвления и в то же время разрезающую плоскость на три или большее число фигур[2]). Для выпуклых фигур такие чудовищные явления не могут иметь места: внутренняя область выпуклой фигуры сравнительно просто устроена, любая ограниченная плоская выпуклая фигура обладает определенными площадью и периметром, а пространственное выпуклое тело — объемом и площадью поверхности (ср. стр. 228 и след.) и т. д.

Таким образом, выпуклые фигуры составляют класс сравнительно просто устроенных, — а следовательно, допускающих изучение геометрическими методами, — фигур на плоскости и в пространстве. С другой стороны, класс выпуклых фигур является достаточно обширным. Так, все фигуры и тела, рассматриваемые в элементарной геометрии, либо являются выпуклыми, либо представляют собой несложные комбинации выпуклых фигур и тел: всякий невыпуклый многоугольник (рис. 3, *а*) можно разрезать на выпуклые части (треугольники); круговое кольцо (рис. 3, *в*) является «разностью» (см. стр. 14) двух кругов разного диаметра и т. п.[3]).

Теория выпуклых фигур — сравнительно молодая ветвь геометрии. Основоположниками ее можно считать замечательного швейцарского геометра Якоба Штейнера (1796—1863) и известного немецкого ученого Германа Минковского (1864—1909), внесшего в математику много новых ярких идей. Развитие этой теории интенсивно продолжается и в настоящее время; в особенности следует упомянуть ленинградскую школу геометров, руководимую А. Д. Александровым, американскую школу, возглавляемую Г. Буземаном, швейцарскую школу Г. Хадвигера и венгерскую школу Л. Фейеша-Тота.

1.2. Граница выпуклой фигуры. Пусть F — плоская выпуклая фигура. По отношению к ней все точки плоскости разделяются на три категории: внутренние, внешние и граничные. Внутренними считаются те точки, которые со всех сторон окружены

---

[1]) Ср. стр. 44 этой книги ЭЭМ, а также стр. 18—20 второй части статьи В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича, указанной на стр. 555.

[2]) См. стр. 24—25 второй части той же статьи В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича.

[3]) Авторы склонны даже считать, что подлинно геометрический интерес представляют лишь фигуры и тела, либо сводящиеся к комбинациям выпуклых фигур и тел, либо же ограниченные кусочно гладкими контурами и поверхностями («классические области», ср. стр. 40, 76). Более экзотические «фигуры» (множества на плоскости, не имеющие площади; линии, являющиеся совместной границей трех и большего числа областей, и т п.) находятся вне рамок геометрии и изучаются методами других математических дисциплин: топологии, теории функций действительного переменного и т. д.

точками фигуры F. Таким образом, если A — внутренняя точка фигуры F, то круг некоторого (хотя бы очень маленького) радиуса с центром в точке A целиком принадлежит фигуре F (рис. 11). К граничной же точке фигуры F как угодно близко подходят и точки, принадлежащие фигуре F, и точки, ей не принадлежащие (точка B на рис. 11). Наконец, внешними считаются точки, которые сами не принадлежат фигуре и со всех сторон окружены точками, не принадлежащими фигуре F (точка C на рис. 11).

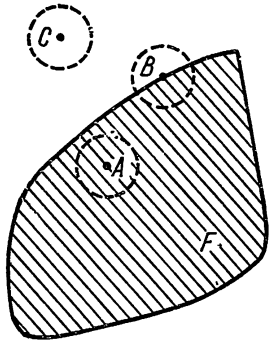


Рис. 11.

Все граничные точки, вместе взятые, образуют некоторую линию Γ, называемую *границей* выпуклой фигуры F. Если фигура F ограничена, то ее граница представляет собой замкнутую линию (ср. рис. 2).

Совершенно так же определяются внутренние, внешние и граничные точки относительно выпуклого тела F в пространстве. Границей выпуклого ограниченного тела является некоторая замкнутая поверхность.

Вопрос о том, считать ли граничные точки выпуклой фигуры F принадлежащими самой этой фигуре, с точки зрения геометрии является в значительной степени условным. Например, под кругом с центром O и радиусом r иногда понимают множество всех точек, отстоящих от O на расстоянии, меньшем r («открытый круг»), а иногда — множество всех точек, отстоящих от O на расстоянии, не превосходящем r («замкнутый круг»). Можно было бы даже часть граничных точек причислять к кругу, а остальные — не причислять. Для определенности мы условимся в дальнейшем считать все граничные точки принадлежащими выпуклой фигуре (или телу) F.

Заметим, что *если A и B — две внутренние точки выпуклой фигуры F, то все точки отрезка AB тоже являются внутренними точками этой фигуры.* Для доказательства достаточно выбрать настолько малое расстояние r, что круги K_A и K_B радиусов r с центрами в точках A и B целиком содержатся в фигуре F (рис. 12, *а*). Проведя общие внешние касательные к этим кругам, мы получим «полоску с закругленными концами» (заштрихованную на рис. 12, *б*), которую обозначим через P. Любая точка M полоски P принадлежит фигуре F (ибо M лежит на отрезке, соединяющем точку круга K_A с некоторой точкой круга K_B). Наконец, круг радиуса r с центром в любой точке C отрезка AB целиком расположен в полоске P, а значит, и в фигуре F, т. е. C — внутренняя точка.

Далее, *если A — внутренняя, а B — граничная точка фигуры F, то все точки отрезка AB, кроме B, являются внутренними точ-*

ками фигуры F (рис. 13). Наконец, *если обе точки* A, B *фигуры* F *являются граничными, то либо все точки отрезка* AB *являются граничными* (рис. 14), *либо* же на отрезке AB найдется внутренняя

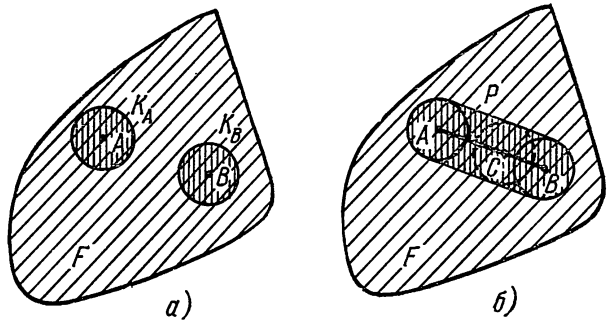


Рис. 12.

точка C, и тогда *все точки отрезка* AB, *кроме концов* A *и* B, *являются внутренними* (рис. 15).

1.3. Опорные прямые и плоскости. Пусть A — некоторая граничная точка плоской выпуклой фигуры F. Проведем из точки A всевозможные лучи, проходящие через отличные от A точки фигуры F.

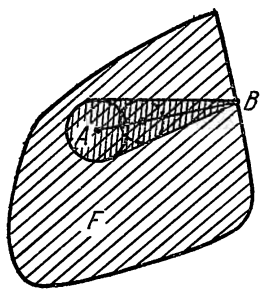


Рис. 13.

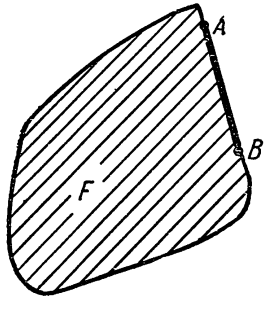


Рис. 14.

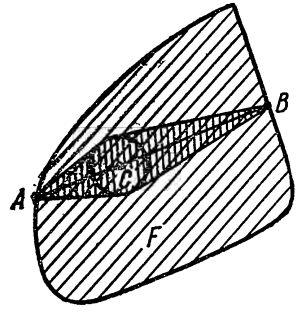


Рис. 15.

Эти лучи заполнят либо некоторую полуплоскость (рис. 16), либо некоторый угол, меньший 180° (рис. 17). В первом случае прямая l, ограничивающая полуплоскость, обладает тем свойством, что вся фигура F расположена по одну сторону от этой прямой, причем прямая имеет хотя бы одну общую точку с границей фигуры F (точку A). Всякая прямая, обладающая этими свойствами, называется *опорной прямой* фигуры F. Всякая отличная от l прямая, проходящая через точку A, рассекает фигуру F на две части и потому не является опорной. Таким образом, через точку A проходит только одна опорная прямая l фигуры F.

Во втором случае (рис. 17) фигура F расположена внутри угла MAN, меньшего 180°. Всякая прямая, проходящая через точку A и лежащая внутри угла MAN_1, смежного с углом MAN, будет являться опорной прямой фигуры F. Опорными будут являться и прямые AM и AN. Всякая же прямая, проходящая через точку A и лежащая внутри угла MAN, не будет опорной: она будет рассекать фигуру F на две части. Таким образом, в этом случае через точку A проходит бесконечно много опорных прямых фигуры F.

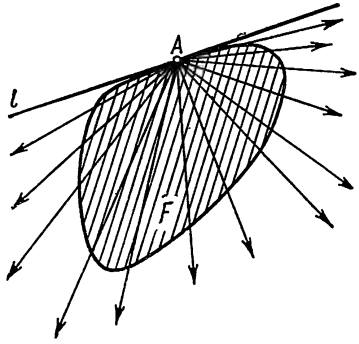


Рис. 16.

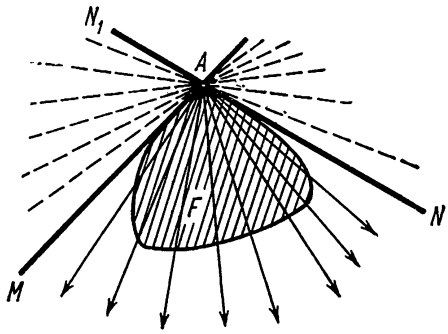


Рис. 17.

Граничная точка фигуры F, через которую проходит единственная опорная прямая l фигуры F, называется *обыкновенной точкой* границы фигуры F (рис. 16). Прямая l в этом случае называется *касательной*. Граничная точка фигуры F, через которую проходит бесконечно много опорных прямых, называется *особой точкой* (рис. 17).

Пусть A — произвольная граничная точка выпуклой фигуры F. Лучи AM и AN, отделяющие прямые, проходящие через A и пересекающие F, от прямых, не пересекающих F, называются *полукасательными*, а угол MAN между полукасательными (не превосходящий 180°) называется *углом* фигуры F в граничной точке A. Таким образом, в обыкновенной граничной точке полукасательные составляют продолжение одна другой, а угол равен 180°; в особой же точке угол выпуклой фигуры меньше 180°. Если угол выпуклой фигуры F в точке A равен α, то дополнительный угол $180° - \alpha$ называется внешним углом фигуры F в точке A. В обыкновенной точке внешний угол равен нулю, а в особой точке он отличен от нуля ($\angle MAN_1$ на рис. 17).

Круг является примером выпуклой фигуры, все граничные точки которой являются обыкновенными. Выпуклый многоугольник (рис. 18) служит примером выпуклой фигуры, имеющей конечное число особых точек: вершины многоугольника являются особыми точками, а точки, лежащие на сторонах, — обыкновенными.

Как известно, сумма внешних углов во всех особых точках выпуклого многоугольника равна 360°.

Сегмент, дуга которого стягивает центральный угол α, имеет две особые точки, причем сумма внешних углов в этих точках равна $360°-\alpha$ (рис. 19). В частности, у полукруга сумма внешних углов равна 180°.

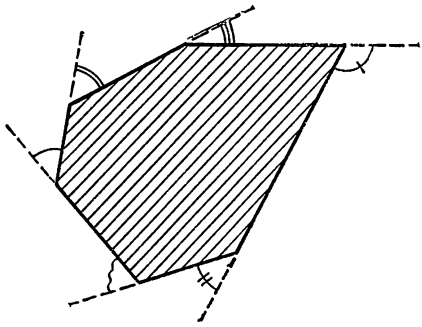


Рис 18.

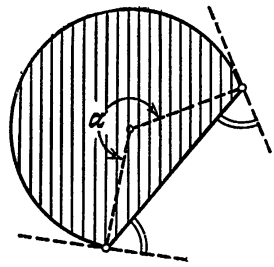


Рис. 19.

Рассмотренные примеры показывают, что сумма внешних углов во всех особых точках выпуклой фигуры может принимать любые значения от 0 до 360°. Значений же, больших 360°, эта сумма принимать не может. Именно, имеет место следующая

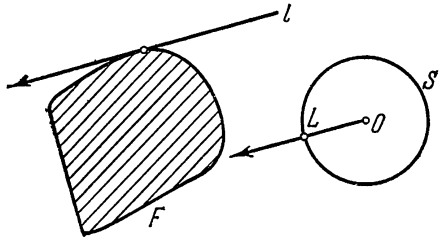


Рис. 20.

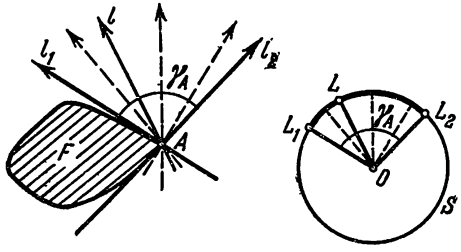


Рис. 21.

Теорема. *Всякая плоская выпуклая фигура F имеет не более чем счетное множество особых точек. Сумма внешних углов во всех ее особых точках не превосходит* 360°. (В случае бесконечного множества особых точек эта «сумма» представляет собой бесконечный ряд.)

Доказательство. Условимся на каждой опорной прямой l задавать такое направление, чтобы при движении по опорной прямой в этом направлении фигура F оставалась слева от нас. Выберем, далее, на плоскости произвольную окружность S с центром O. Пусть L—такая точка окружности S, что луч OL параллелен прямой l и имеет то же направление (рис. 20); в таком случае точку L мы будем называть *индикатором* опорной прямой l. Пусть A—особая точка фигуры F с внешним углом γ_A. Рассматривая всевозможные опорные прямые фигуры F, проходящие через точку A,

мы обнаружим, что индикаторы этих опорных прямых заполняют на окружности S некоторую дугу σ_A, стягивающую центральный угол γ_A (рис. 21).

Нетрудно видеть, что если A и B—две особые точки фигуры F, то отвечающие им дуги σ_A и σ_B окружности S не имеют общих внутренних точек. В самом деле, пусть L—внутренняя точка дуги σ_A (рис. 22). Тогда соответствующая точке L опорная прямая l фигуры F имеет с F только одну общую точку A (ибо даже с углом, образованным полукасательными

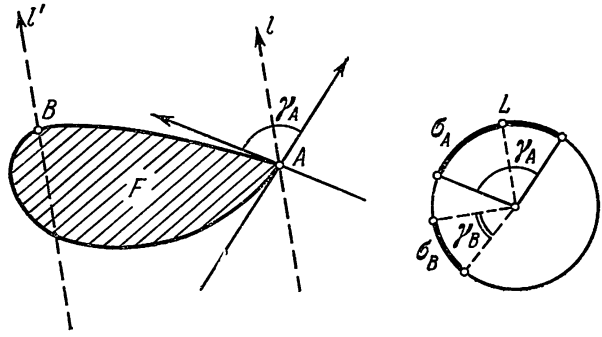


Рис. 22.

в точке A, прямая l имеет только одну общую точку). Следовательно, точка B расположена слева от l, и потому проходящая через B прямая l', параллельная l и одинаково направленная с l, не будет опорной (точка A расположена справа от l'). Но это означает, что точка L не принадлежит дуге σ_B.

Из того, что дуги σ_A, σ_B, ..., соответствующие особым точкам A, B,... фигуры F, попарно не имеют общих внутренних точек, непосредственно вытекает, что сумма $\gamma_A+\gamma_B+\ldots$ всех внешних углов не превосходит 360°. Отсюда обычным рассуждением выводится, что имеется не более чем счетное число особых точек (в самом деле, фигура F имеет не более трех особых точек с внешними углами $\geqslant \frac{360°}{3}$, не более четырех особых точек с внешними углами $\geqslant \frac{360°}{4}$ и т. д.). Теорема доказана.

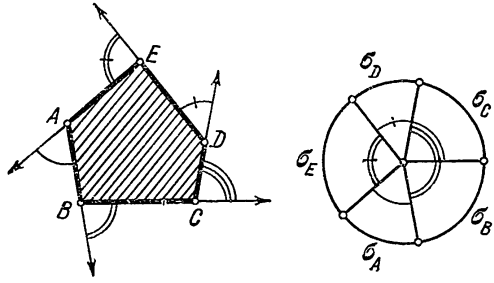


Рис. 23.

Заметим, что в случае выпуклого многоугольника дуги σ_A, σ_B,... полностью покрывают окружность (рис. 23), и, следовательно, $\gamma_A+\gamma_B+\ldots$ $\ldots=360°$. Это свойство можно даже принять за определение выпуклых многоугольников.

Заметим также, что существуют выпуклые фигуры, на границе которых особые точки расположены всюду плотно (т. е. на любой сколь угодно малой дуге граничной кривой находится бесконечно много особых точек).

Объединяя вместе случаи обыкновенной и особой граничной точки выпуклой фигуры F, мы видим, что *через каждую граничную*

точку выпуклой фигуры F проходит хотя бы одна опорная прямая. Напротив, если фигура F невыпукла, то у нее найдется такая граничная точка A, через которую нельзя провести ни одной опорной прямой фигуры F (ср. рис. 24). Иными словами, справедлива следующая

Теорема. *Если через каждую граничную точку плоской фигуры F проходит хотя бы одна опорная прямая, то фигура F выпукла.*

Доказательства этой теоремы мы не приводим.

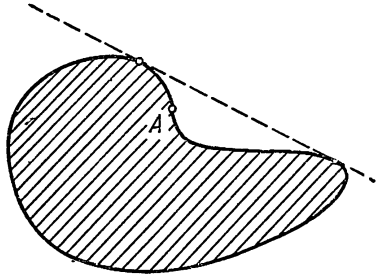


Рис. 24.

Рассмотрим теперь случай пространственного выпуклого тела F. Проведем из граничной точки A тела F всевозможные лучи, проходящие через отличные от A точки тела F. Эти лучи заполняют, как нетрудно доказать, некоторый выпуклый конус K_A, который мы назовем *опорным конусом* тела F в точке A. Если этот конус представляет собой полупространство, то A называется

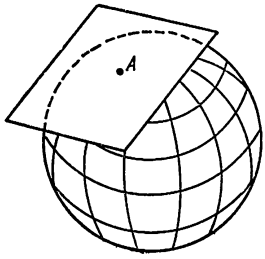


Рис. 25.

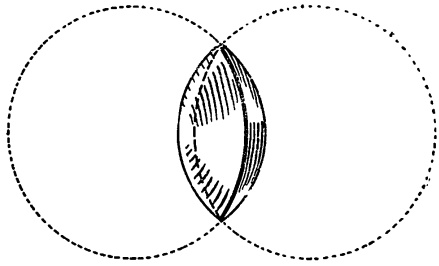


Рис. 26.

обыкновенной граничной точкой тела F. В противном случае точку A будем называть *особой*. Мы будем разлагать два типа особых точек. Если опорный конус K_A представляет собой двугранный угол (ребро которого проходит через точку A), то мы будем называть A *особой точкой типа ребра.* В противном случае будем говорить, что A—*особая точка типа вершины.*

Приведем примеры. У шара все граничные точки — обыкновенные (рис. 25). Линза, получающаяся при пересечении двух шаров (рис. 26), имеет уже не только обыкновенные граничные точки, но и особые точки типа ребра; таких точек бесконечно много, и все они располагаются на одной окружности. Прямой круговой конус с вершиной O и кругом S, лежащим в основании (рис. 27), имеет граничные точки всех трех типов: O есть

особая точка типа вершины, все точки окружности основания являются особыми точками типа ребра, а остальные граничные точки — обыкновенные. Любой выпуклый многогранник (рис. 28) также имеет граничные точки всех трех типов: его вершины являются особыми точками типа вершины; точки, лежащие на ребрах, являются особыми точками типа ребра; точки же, лежащие на гранях, — обыкновенные.

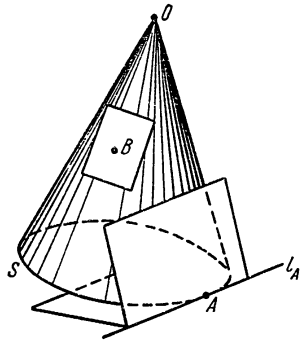


Рис. 27.

Пусть F — произвольное (не обязательно выпуклое) пространственное тело и A — его граничная точка. Проходящая через точку A плоскость Σ называется *опорной плоскостью* тела F, если все тело F лежит по одну сторону от этой плоскости (часть точек тела F может лежать и в самой плоскости Σ). Из сказанного на стр. 182 — 184 нетрудно вывести, что *если K — выпуклый конус с вершиной O, не совпадающий со всем пространством, то через точку O проходит хотя бы одна опорная плоскость конуса K.* В самом деле, пусть F — такая выпуклая фигура, лежащая в некоторой плоскости Π, что конус K совпадает с множеством, которое заполняется всевозможными лучами, исходящими из точки O и пересекающими фигуру F. Ясно тогда,

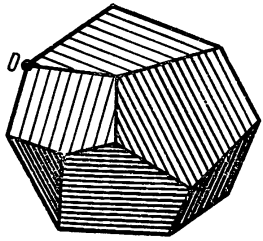


Рис. 28.

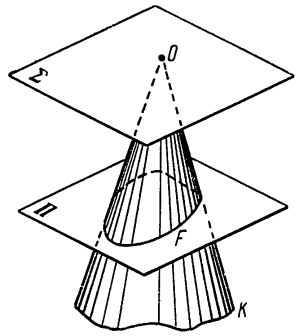


Рис. 29

что плоскость Σ, параллельная Π и проходящая через точку O, является опорной для конуса K (ибо все множество F расположено по одну сторону от плоскости Σ, рис. 29).

Теорема. *Через каждую граничную точку выпуклого тела F проходит хотя бы одна опорная плоскость.*

В самом деле, пусть A — граничная точка тела F и K_A — опорный конус тела F в этой точке. Тело F содержится целиком в конусе K_A, и потому опорная плоскость конуса K_A, проведенная через его

вершину A, является в то же время и опорной плоскостью тела F. Как и в случае плоских выпуклых фигур, свойство, устанавливаемое доказанной теоремой, характерно для выпуклых тел. Иными словами, справедлива следующая обратная теорема:

Если через каждую граничную точку пространственного тела F проходит хотя бы одна опорная плоскость, то тело F выпукло.

Остановимся еще на вопросе о количестве опорных плоскостей, проходящих через заданную граничную точку A выпуклого тела F. Если A — обыкновенная точка, то через нее проходит только одна опорная плоскость тела F; эта плоскость называется *касательной плоскостью* тела F в точке A (рис. 25). Пусть теперь A — особая точка типа ребра и K_A — опорный конус тела F в точке A. Конус K_A представляет собой двугранный угол, ребро которого мы обозначим через l_A (рис. 27). Так как каждая опорная плоскость тела F, проходящая через точку A, является одновременно опорной плоскостью конуса K_A (и обратно), то ясно, что все эти опорные плоскости проходят через прямую l_A и заполняют двугранный угол, смежный с углом K_A. Таким образом, в этом случае существует бесконечно много опорных плоскостей тела F, проходящих через точку A. Бесконечно много опорных плоскостей тела F проходит через точку A и в том случае, если A — особая точка типа вершины (точка O на рис. 27, 28). В этом случае опорные плоскости уже не проходят все через одну прямую. Можно сказать, что в особой точке типа вершины имеется существенно «больше» опорных плоскостей, чем в особой точке типа ребра.

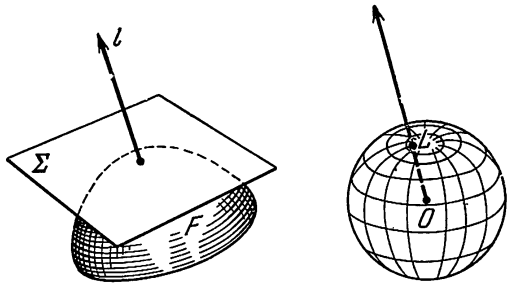


Рис. 30.

Чтобы придать точный смысл последнему утверждению, мы введем понятие индикатора опорной плоскости. Пусть S — некоторая сфера с центром в точке O. Предположим, что нам задана некоторая опорная плоскость Σ выпуклого тела F. Проведем из некоторой точки плоскости Σ такой луч l, перпендикулярный к плоскости Σ, что тело F и луч l расположены по разные стороны от Σ (рис. 30). Точку L сферы S, обладающую тем свойством, что луч OL параллелен l и имеет то же направление, мы и назовем *индикатором* [1]) плоскости Σ.

---

[1]) Таким образом, в отличие от сказанного на стр. 189, мы здесь проводим луч OL перпендикулярный (а не параллельный!) к опорной плоскости Σ. Причина ясна: в то время как прямых, параллельных Σ, можно провести через точку O бесконечно много, перпендикуляр к плоскости Σ, проходящий через O, существует только один.

Если A — обыкновенная граничная точка выпуклого тела F, то через нее проходит единственная опорная плоскость Σ, которой отвечает на сфере S единственный индикатор L.

Если A — особая точка типа ребра (рис. 31), то все опорные плоскости, проходящие через точку A, проходят также через определенную прямую l_A (ребро двугранного угла K_A). Поэтому все лучи l, перпендикулярные к этим плоскостям, будут перпендикулярны к прямой l_A, а соответствующие индикаторы L располагаются на одной большой окружности

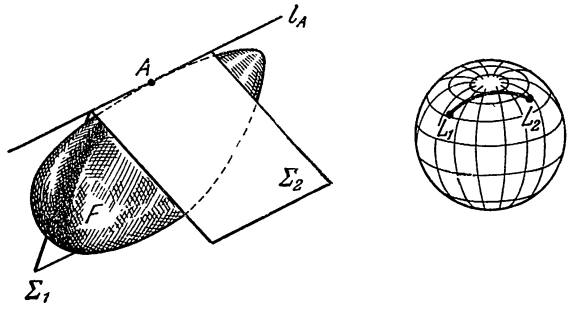


Рис. 31.

сферы S (высекаемой плоскостью, проходящей через O и перпендикулярной к прямой l_A). Таким образом, в этом случае множество индикаторов, отвечающих опорным плоскостям, проходящим через точку A, представляет собой дугу большой окружности на сфере S. Ясно, что если двугранный угол K_A имеет величину α, то указанная дуга $\sigma_A = L_1 L_2$ стягивает центральный угол $L_1 O L_2$, равный $180° - \alpha$.

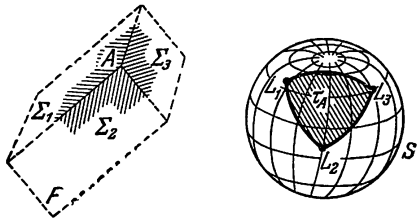


Рис. 32.

Пусть, наконец, A — особая точка типа вершины. В этом случае множество индикаторов, соответствующих всевозможным опорным плоскостям тела F, проходящим через точку A, представляет собой уже не дугу, а целую область τ_A на сфере S Например, если F — выпуклый многогранник и A — его вершина, то множество τ_A будет сферическим многоугольником, ограниченным дугами больших окружностей сферы S (рис. 32). Конус T_A с вершиной O и образующим множеством τ_A мы будем называть *внешним углом* тела F в точке A (можно доказать, что этот конус является выпуклым), а меру телесного угла этого конуса (т. е. площадь области τ_A, если радиус сферы S принять равным единице) будем называть *величиной* внешнего угла T_A. (Величину внешнего угла T_A иногда также называют *кривизной* тела F в точке A.)

Теорема. *Всякое выпуклое тело имеет не более чем счетное число особых точек типа вершины. Сумма величин внешних углов в этих особых точках не превосходит* 4π.

Доказательство этой теоремы очень близко к доказательству теоремы, сформулированной на стр. 189. Прежде всего устанавливается, что если A и B — две различные особые точки типа вершины, то соответствующие области τ_A и τ_B на сфере S не имеют общих внутренних точек

(доказательство этого аналогично доказательству, приведенному на стр. 190). Отсюда вытекает, что сумма площадей областей τ_A, τ_B, ..., отвечающих всевозможным угловым точкам типа вершины, не превосходит площади всей сферы S радиуса 1, т. е. не превосходит 4π. Из этого, наконец, мы заключаем, что множество особых точек типа вершины не более чем счетно.

Заметим, что в случае выпуклого многогранника F сферические многоугольники τ_A, τ_B, ..., соответствующие всем его вершинам, полностью покрывают всю сферу S и, следовательно, $\gamma_A+\gamma_B+\ldots=4\pi$, где γ_A, γ_B — величины внешних углов в вершинах $A, B, \ldots$ многогранника F (теорема о «сумме внешних углов» многогранника)[1]).

§ 2. Простейшие метрические характеристики выпуклых фигур

2.1. Диаметр выпуклой фигуры. Пусть F — некоторая плоская выпуклая фигура. *Диаметром* фигуры F называется наибольшее из расстояний между двумя ее точками. Например, в случае круга диаметр в указанном здесь смысле, очевидно, совпадает с обычным его диаметром (т. е. длиной наибольшей хорды). Далее, пусть фигура F представляет собой полукруг (рис. 2, *г*); M и N — концы ограничивающей его полуокружности. Тогда ясно, что диаметром фигуры F является длина отрезка MN. Вообще, если фигура F представляет собой сегмент круга, ограниченный дугой l и хордой a, то в случае, когда дуга l не превосходит полуокружности,

---

[1]) Из установленного соотношения можно вывести новое доказательство известной теоремы Эйлера для выпуклых многогранников (см. ЭЭМ, кн. IV, стр. 390). Заметим прежде всего, что число сторон сферического многоугольника τ_A равно числу k ребер многогранника F, сходящихся в вершине A, а большие окружности, которым принадлежат эти стороны, лежат в плоскостях, перпендикулярных к ребрам многогранника F. Отсюда вытекает, что углы сферического многоугольника τ_A дополняют до π плоские углы многогранника F, сходящиеся в вершине A. Таким образом, сумма углов сферического многоугольника τ_A равна $k\pi-\sigma_A$, где σ_A — сумма всех плоских углов многогранника F, сходящихся в вершине A. В силу формулы для площади сферического многоугольника (см. ЭЭМ, кн. IV, стр. 539), отсюда вытекает, что площадь γ_A многоугольника τ_A, т. е. величина внешнего угла A многогранника F, равна $\gamma_A=(k\pi-\sigma_A)-(k-2)\pi=2\pi-\sigma_A$. Суммируя внешние углы, отвечающие всем вершинам, получаем:

$$(2\pi-\sigma_A)+(2\pi-\sigma_B)+\ldots=4\pi, \text{ или } 2\pi B-(\sigma_A+\sigma_B+\ldots)=4\pi,$$

где B — число вершин многогранника.

Заметим теперь, что $\sigma_A+\sigma_B+\ldots$ — это сумма всех плоских углов многогранника F. Для каждой отдельной грани α эта сумма равна $\pi(n_\alpha-2)$, где n_α — число сторон грани α. Таким образом,

$$\sigma_A+\sigma_B+\ldots=\pi(n_\alpha-2)+\pi(n_\beta-2)+\ldots=\pi(n_\alpha+n_\beta+\ldots)-2\pi\Gamma,$$

где Γ — число граней многогранника F, а n_α, n_β, ... — числа сторон различных его граней. Но ясно, что $n_\alpha+n_\beta+\ldots=2P$, где P — число ребер многогранника F. Окончательно получаем $2\pi B-(2\pi P-2\pi\Gamma)=4\pi$, т. е. $B-P+\Gamma=2$.

диаметр фигуры F равен a (т. е. длине хорды; рис. 33, *а*); в случае же, когда дуга l больше полуокружности (рис. 33, *б*) диаметр фигуры F совпадает с диаметром всего круга.

Нетрудно доказать, что если F представляет собой многоугольник (рис. 34), то его диаметром является наибольшее из расстояний между вершинами (ср. стр. 286 этой книги ЭЭМ). В частности, диаметр любого треугольника равен его наибольшей стороне.

Заметим, что если диаметр фигуры F равен d, то в фигуре F может существовать много пар точек, расстояние между которыми

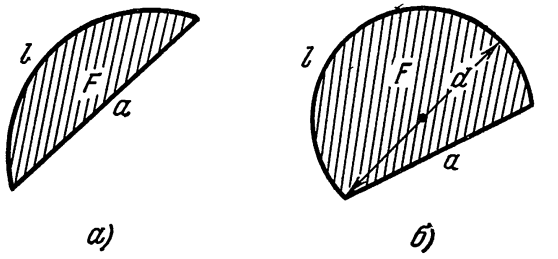


Рис. 33.

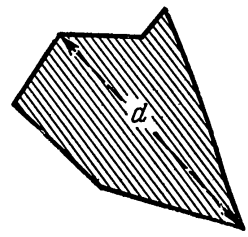


Рис. 34.

равно d. Например, в случае разностороннего треугольника такая пара точек только одна, в случае равнобедренного их может быть две, а в случае правильного треугольника — три (рис. 35). Наконец, в случае круга таких пар точек имеется бесконечно много.

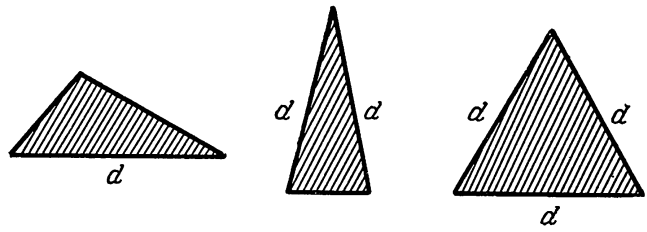


Рис. 35.

Выше мы условились понимать под «выпуклой фигурой» замкнутую выпуклую фигуру, т. е. фигуру, к которой присоединяются все ее граничные точки. Легко понять, что если бы мы не условились присоединять к фигуре все ее граничные точки, то наибольшего из расстояний между двумя ее точками могло и не существовать. Например, если F — открытый круг радиуса r (т. е. круг, к которому не причисляется ни одна граничная точка), то в нем можно найти две точки, расстояние между которыми как угодно близко к $2r$, но не существует двух точек, расстояние между которыми в точности равно $2r$. Таким образом, если бы мы не условились считать выпуклые фигуры замкнутыми, то нам пришлось бы называть диаметром не наибольшее из расстояний между двумя точками фигуры (наибольшего расстояния могло бы не существовать), а точную верхнюю грань расстояний между двумя точками фигуры. Именно для того, чтобы избежать этого услож-

нения (и многих аналогичных), мы и условились считать фигуры замкнутыми.

Доказательство того факта, что в произвольной замкнутой ограниченной фигуре существуют такие две точки, расстояние между которыми — наибольшее, может быть проведено только средствами математического анализа. Например, такое доказательство легко получить, используя свойства непрерывных функций. В самом деле, если M, N — две произвольные точки плоскости и $\rho(M, N)$ — расстояние между ними, то функция $\rho(M, N)$ непрерывна по M и N (что вытекает, например, из формулы $\rho(M, N) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек M и N в прямоугольной системе координат). Но всякая непрерывная функция (в данном случае от двух переменных M, N), аргументы которой меняются в замкнутом ограниченном множестве, обязательно достигает своего наибольшего (и наименьшего) значения. Следовательно, найдутся такие две точки A, B фигуры F, что $\rho(A, B) \geqslant \rho(M, N)$ для любых точек M, N фигуры F. Расстояние $d = \rho(A, B)$ между такими двумя точками и представляет собой диаметр фигуры (см. стр. 195).

Пусть d — диаметр выпуклой ограниченной фигуры F и A, B — такие две ее точки, расстояние между которыми равно d (мы знаем, что такая пара точек, вообще говоря, не единственна). Нетрудно видеть, что *прямые l_A и l_B, проведенные через точки A и B перпендикулярно к отрезку AB, являются опорными прямыми фигуры F* (рис. 36). В самом деле, фигура F целиком заключена в полосе между прямыми l_A и l_B (если бы нашлась точка M фигуры F, лежащая вне этой полосы, то хотя бы одно из расстояний MA, MB было бы больше d, что невозможно). Таким образом, фигура F расположена по одну сторону от прямой l_A и по одну сторону от прямой l_B. (Заметим, что частным случаем этого рассуждения является доказательство известной теоремы о перпендикулярности касательной к окружности и диаметра, проведенного в точку касания.) Из тех же соображений легко заключить, что прямая l_A имеет с фигурой F только одну общую точку A, а прямая l_B — только одну общую точку B.

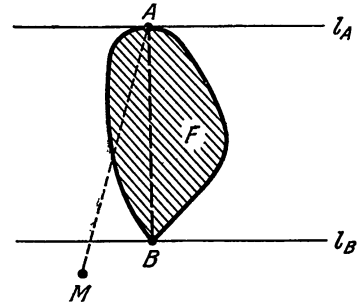


Рис. 36.

Диаметр выпуклого тела в пространстве определяется так же, как и для плоской выпуклой фигуры. Нетрудно видеть, что если A и B — две точки выпуклого тела F, расстояние между которыми равно его диаметру d, то плоскости, проведенные через точки A и B перпендикулярно к отрезку AB, являются опорными плоскостями этого тела.

2.2. Ширина выпуклой фигуры. Фигуры постоянной ширины. Следующее простое свойство опорных прямых является общим как для выпуклых, так и для невыпуклых фигур:

Теорема. *Если F — произвольная ограниченная плоская фигура и l — некоторая прямая, то существуют ровно две опорные прямые фигуры F, параллельные l.*

В самом деле, пусть m_1 и m_2 — две такие прямые, параллельные l, что фигура F расположена в полосе между m_1 и m_2. Сближая прямые m_1 и m_2 и оставляя их параллельными прямой l, мы и получим требуемые опорные прямые (прямые l_1 и l_2 на рис. 37).

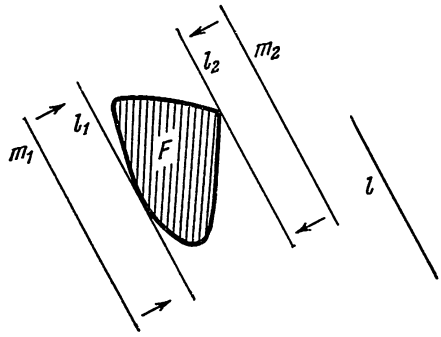


Рис. 37.

Заметим, что если фигура F не является ограниченной, то указанная теорема перестает быть справедливой; можно лишь утверждать, что существует не более двух опорных прямых, параллельных l. Например, для выпуклой неограниченной фигуры, границей которой является парабола (рис. 4, *г*), существует только одна опорная прямая, параллельная l (если прямая l не параллельна оси параболы); полоса (рис. 4, *а*) вообще имеет только две опорные прямые; наконец, если фигура F представляет собой всю плоскость, то она совсем не имеет опорных прямых.

Расстояние между двумя опорными прямыми выпуклой фигуры F, параллельными некоторой прямой l, называется *шириной* фигуры F *в направлении, перпендикулярном к* l.

Ясно, что если A и B — две наиболее удаленные друг от друга точки фигуры F (т. е. $AB = d$ есть диаметр этой фигуры), то ширина фигуры F в направлении AB равна d. Легко видеть, что ширина этой фигуры в любом другом направлении не превосходит d (так, на рис. 38 мы имеем $h \leqslant MN \leqslant d$). Иначе говоря, *диаметр фигуры F можно также определить как наибольшую ширину этой фигуры* (т. е. наибольшее из расстояний между двумя параллельными опорными прямыми фигуры F). Наименьшую ширину Δ фигуры F называют обычно просто *шириной* фигуры F.

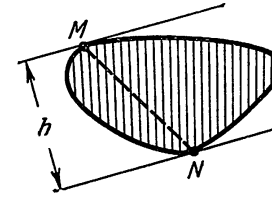


Рис. 38.

Выше мы видели, что если l_1 и l_2 — параллельные опорные прямые, расстояние между которыми наибольшее, то каждая из них имеет только одну общую точку с фигурой и отрезок, соединяющий эти две точки, перпендикулярен к прямым l_1 и l_2. Если же расстояние между параллельными опорными прямыми l_1, l_2 наименьшее, то это положение вещей сохраняется лишь частично. Прямые l_1 и l_2 могут уже содержать бесконечно много точек фигуры

(рис. 39, *а*, *б*). Нетрудно, однако, доказать, что и в этом случае найдутся такие точки C, D, лежащие на прямых l_1, l_2, что отрезок CD перпендикулярен к этим прямым. В частности, если каждая из прямых l_1, l_2 (расстояние между которыми — наименьшее) имеет с F только одну общую точку, то отрезок, соединяющий эти две точки, перпендикулярен к прямым l_1 и l_2 (рис. 39, *в*). Например, диаметром d эллипса является его большая ось, а шириной Δ — малая (рис. 40). Ширина треугольника, очевидно, совпадает с его наименьшей высотой (рис. 41).

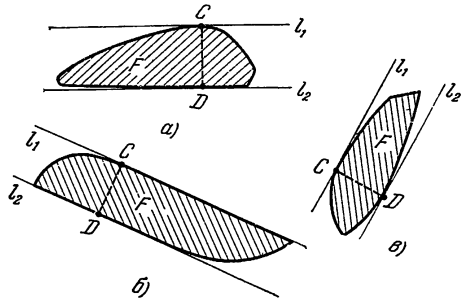


Рис. 39.

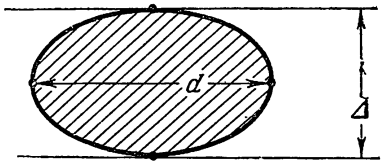


Рис. 40.

Пусть F — ограниченная выпуклая фигура, d — ее диаметр и Δ — ширина. Ясно, что $d \geqslant \Delta$. Пример круга показывает, что существуют выпуклые фигуры, для которых имеет место строгое равенство: $d = \Delta$. Замечательно, что, кроме круга, существует бесконечно много других выпуклых фигур, для которых $d = \Delta$.

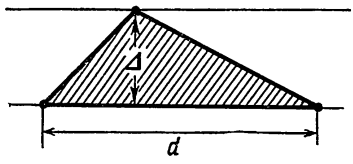


Рис. 41.

Ясно, что для каждой такой фигуры ширина в любом направлении имеет одно и то же значение (ибо наибольшая ширина d и наименьшая ширина Δ совпадают). Поэтому такие фигуры называются *фигурами постоянной ширины.*

Простейший пример фигуры постоянной ширины, отличной от круга, получается, если из каждой вершины равностороннего треугольника со стороной d, как из центра, описать дугу окружности, соединяющую две другие вершины (рис. 42). Эта фигура носит название *треугольника Релло.* Из двух параллельных опорных прямых, проведенных к треугольнику Релло, одна непременно проходит через вершину, а другая касается противолежащей дуги окружности, и потому расстояние между этими опорными прямыми равно d. Другие примеры фигур постоянной ширины, ограниченных дугами окружностей радиуса d, показаны на рис. 43. Можно доказать, что *любую фигуру диаметра d можно заключить внутрь некоторой фигуры постоянной ширины d* (рис. 44).

Если F — произвольное ограниченное пространственное тело и Σ — некоторая плоскость, то существуют ровно две опорные плоскости тела F, параллельные Σ. Расстояние между этими параллельными опорными плоскостями называется *шириной* тела F *в направлении, перпендикулярном к плоскости* Σ. Наименьшая ширина тела F называется просто его *шириной*; наибольшая ширина тела F,

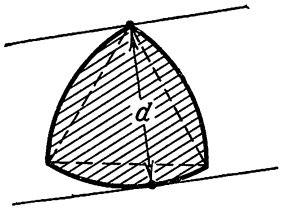


Рис. 42.

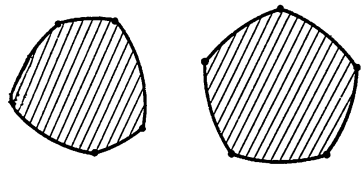


Рис. 43.

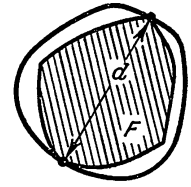


Рис. 44.

как и в случае плоской фигуры, совпадает с его *диаметром*. Выпуклые тела, диаметр которых совпадает с шириной, называются *телами постоянной ширины*.

2.3. Описанные и вписанные окружности. *Описанной окружностью* выпуклой фигуры F называется наименьшая из всех окруж-

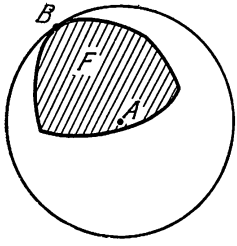


Рис. 45.

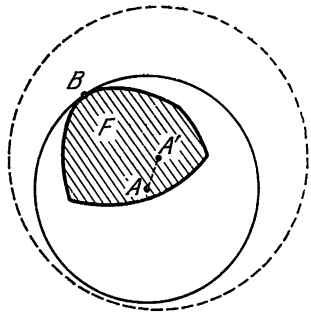


Рис. 46.

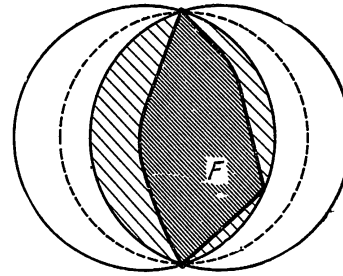


Рис. 47.

ностей, содержащих фигуру F внутри себя. Нетрудно доказать, что такая наименьшая окружность действительно существует. В самом деле, пусть A — произвольная точка выпуклой фигуры F и B — наиболее удаленная от A точка фигуры F (ср. стр. 197). Тогда круг K_A с центром A и радиусом $AB = \rho(A)$ целиком содержит фигуру F (рис. 45). Легко видеть, что функция $\rho(A)$ непрерывна (ибо если точка A' отстоит от A менее чем на h, то круг радиуса $\rho(A) + h$ с центром в точке A' целиком содержит круг K_A, а значит, и фигуру F, т. е. $\rho(A') < \rho(A) + h$, см. рис. 46). Но непрерывная

функция $\rho(A)$, определенная на множестве F, обязательно достигает минимума, т. е. найдется такая точка O, что $\rho(O) \leqslant \rho(A)$ для любой точки A фигуры F. Но это и означает, что круг радиуса $\rho(O)$ с центром в точке O является наименьшим кругом, содержащим фигуру F.

Заметим, что *описанная окружность выпуклой фигуры единственна*. Действительно, если бы существовали д в е описанные окружности фигуры F, то они имели бы один и тот же радиус, а потому (содержащая фигуру F!) «линза», получающаяся в пересечении этих окружностей (рис. 47), могла бы быть заключена в окружность м е н ь ш е г о радиуса (диаметр которой совпадает с хордой линзы).

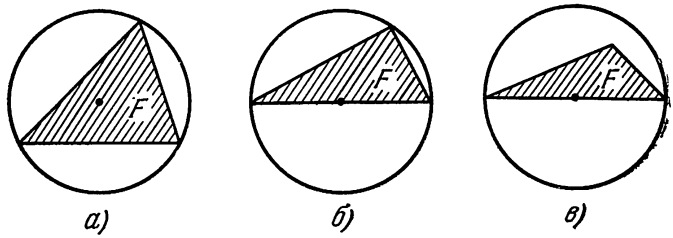


Рис. 48.

Если F — остроугольный или прямоугольный треугольник, то его описанной окружностью является окружность, проходящая через все три его вершины (рис. 48, *а*, *б*). Если же треугольник F — тупоугольный, то наименьшая заключающая его окружность совпадает с окружностью, построенной на большей стороне, как на диаметре (рис. 48, *в*). Таким образом, определенное в этом пункте понятие описанной окружности выпуклой фигуры F не совпадает в случае тупоугольного треугольника с традиционным школьным определением.

Наибольшая окружность, целиком содержащаяся в выпуклой фигуре F, называется *вписанной окружностью* этой фигуры (рис. 49). Существование вписанной окружности выпуклой фигуры F может быть доказано аналогично тому, как это было выше сделано для описанной окружности. Однако, в противоположность описанной окружности, вписанная окружность выпуклой фигуры может быть н е е д и н с т в е н н о й: для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть случай прямоугольника (рис. 50). Заметим, что для треугольника данное здесь определение вписанной окружности совпадает с традиционным.

Интересно, что *для фигур постоянной ширины вписанная и описанная окружности всегда концентричны* (рис. 51). Доказательства этой теоремы мы не приводим.

Описанная и вписанная сферы пространственного выпуклого тела определяются совершенно аналогично.

Диаметр d, ширина Δ, радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности являются наиболее простыми и важными метрическими характеристиками выпуклой фигуры. Две другие

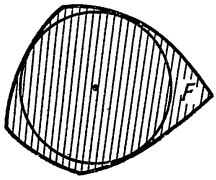


Рис. 49.

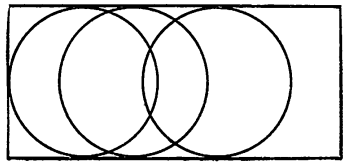


Рис. 50.

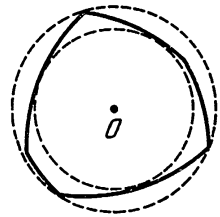


Рис. 51.

важнейшие характеристики — периметр l и площадь s — мы рассмотрим в § 4. Эти метрические характеристики не являются полностью независимыми; задание одной из них накладывает некоторые ограничения на остальные. Так, мы уже отмечали неравенство $d \geqslant \Delta$; очевидно также, что всегда $R \geqslant r$ (причем равенство здесь достигается только для случая круга). Другие зависимости между величинами d, Δ, R, r, l, s читатель найдет в статье «Геометрические задачи на максимум и минимум».

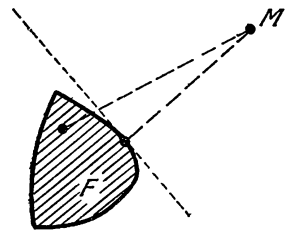


Рис. 52.

Для пространственных выпуклых тел важнейшими характеристиками являются диаметр d, ширина Δ, радиус R описанной сферы, радиус r вписанной сферы, а также площадь поверхности s и объем v, рассматриваемые в § 4.

2.4. Расстояние между выпуклыми фигурами. Пусть F — произвольная фигура и M — не принадлежащая ей точка. *Расстоянием* от точки M до фигуры F называется наименьшая[1]) из длин отрезков, соединяющих точку M с точками фигуры F (рис. 52).

Теорема. *Если F — выпуклая фигура и M — не принадлежащая ей точка, то ближайшая к M точка A фигуры F единственна. Прямая, проходящая через эту точку A и перпендикулярная к отрезку MA, является опорной прямой фигуры F.*

Доказательство. Допустим, что существуют в фигуре F две точки A_1 и A_2, находящиеся на наименьшем (по сравнению

[1]) Существование точки A фигуры F, находящейся на наименьшем расстоянии от точки M, легко выводится из свойств непрерывных функций (ср. мелкий шрифт на стр. 197).

с другими точками фигуры F) расстоянии от M. Тогда $A_1M = A_2M$. Так, фигура F выпукла, то весь отрезок A_1A_2 принадлежит фигуре F; в точности, фигуре F принадлежит середина B отрезка A_1A_2. Но $MB < MA_1 = MA_2$ (рис. 53), что противоречит выбору точек A_1 и A_2. Поэтому точка A единственна.

Проведем через точку A прямую l, перпендикулярную к MA. Докажем, что ни одна точка фигуры F не лежит по ту же сторону

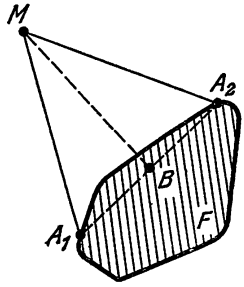


Рис. 53.

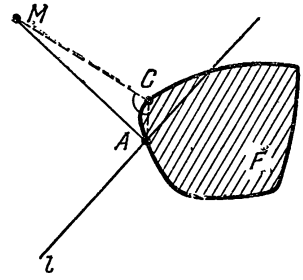


Рис. 54.

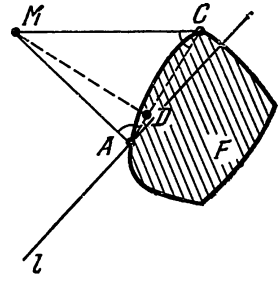


Рис. 55.

от l, что и точка M (это и будет означать, что l — опорная прямая). В самом деле, допустим, что такая точка C существует. Угол MCA не может быть тупым или прямым, так как в противном случае мы имели бы $MC < MA$ (рис. 54), что противоречит выбору точки A. Следовательно, оба угла $\angle MAC$, $\angle MCA$ — острые. Но в этом случае основание D высоты MD треугольника MAC лежит между точками A и C (рис. 55). В силу выпуклости фигуры F, весь отрезок AC и, в частности, точка D принадлежат этой фигуре. Но это также противоречит выбору точки A, ибо $MD < MA$. Теорема доказана.

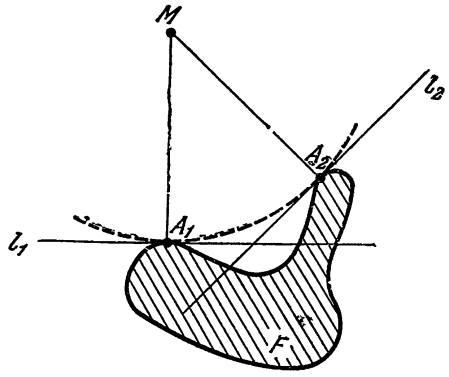


Рис. 56.

Заметим, что для невыпуклой фигуры оба утверждения этой теоремы могут оказаться неверными. На рис. 56 показана невыпуклая фигура F, для которой существуют две ближайшие к M точки A_1, A_2; перпендикуляры l_1, l_2 к отрезкам MA_1, MA_2, проведенные через точки A_1, A_2, не являются опорными прямыми. Интересно отметить, что этот факт является общим: для любой плоской невыпуклой фигуры F найдется такая не принадлежащая ей точка M, для которой в фигуре F найдется не менее двух ближайших.

Иными словами, справедлива следующая теорема, обратная доказанной выше:

Теорема. *Пусть F — такая плоская фигура, что для любой не принадлежащей ей точки M ближайшая к M точка фигуры F единственна. Тогда фигура F выпукла.*

Доказательство. Допустим, что фигура F, обладающая указанным свойством, не является выпуклой, т. е. в ней найдутся такие две точки C и D, что отрезок CD не принадлежит целиком фигуре F (рис. 57). Выберем на отрезке CD какую-либо точку P, не принадлежащую фигуре F, и пусть M, N — ближайшие [1]) к P точки фигуры F, лежащие на прямой CD по разные стороны от P. Середину отрезка MN обозначим через Q, а ближайшую к Q точку фигуры F через A_Q. Так как $QM = QN$, то $QA_Q < QM$ (напоминаем, что ближайшая к Q точка фигуры F единственна), и потому точка A_Q не лежит на прямой CD. В дальнейшем для удобства мы будем называть прямую CD «горизонтальной» и считать, что точка A_Q расположена «под» этой прямой (рис. 57).

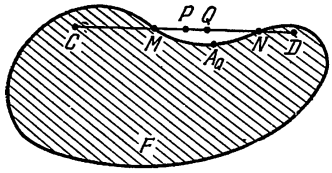


Рис. 57.

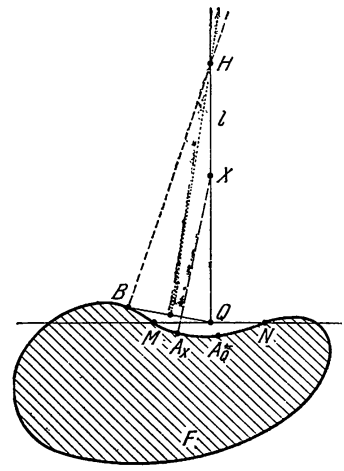


Рис. 58.

Пусть l — исходящий из точки Q луч, лежащий в верхней полуплоскости и перпендикулярный к горизонтальной прямой MN (рис. 58), X — произвольная точка этого луча и A_X — ближайшая к ней точка фигуры F. Так как $XM = XN$, то $XA_X < XM$, и потому точка A_X не принадлежит прямой MN (напомним, что внутренние точки отрезка MN не принадлежат фигуре F). Заметим теперь, что точка A_X непрерывно зависит от точки X. Поэтому, если мы будем непрерывно двигать точку X, начиная от точки Q вверх по лучу l, то точка A_X, первоначально расположенная ниже прямой MN, не сможет «перескочить» через эту прямую. Таким образом, для любой точки X луча l ближайшая точка A_X лежит ниже прямой MN.

Из доказанного следует, что выше прямой MN нет ни одной точки фигуры F. В самом деле, допустим, что точка B фигуры F лежит выше прямой MN, и обозначим через H точку пересечения луча l с перпендикуляром, восстановленным к отрезку BQ в его середине. Тогда $HB = HQ < HA_H$ (ибо точка A_H расположена ниже прямой CD), что, однако, невозможно, поскольку A_H — ближайшая к H точка фигуры F.

---

[1]) Такие точки существуют, так как под «фигурой», мы, как всегда, понимаем замкнутое множество.

Выберем теперь на продолжении луча l за точку Q такую точку R, что отрезок QR не содержит точек фигуры F (достаточно, например, взять такую точку R, что $QR < QA_Q$). Через точку R проведем прямую m, параллельную MN (рис. 59). Далее, обозначим через K точку пересечения луча l с перпендикуляром, восставленным к отрезку MR в его середине. Наконец, обозначим E и F вершины прямоугольника $MNFE$, сторона EF которого проходит через точку K. Тогда для любой точки Y отрезка EK мы имеем $YM \leqslant KM = KR$, и потому ближайшая к Y точка A_Y фигуры F расположена в ы ш е прямой m. То же справедливо и для любой точки Y отрезка KF.

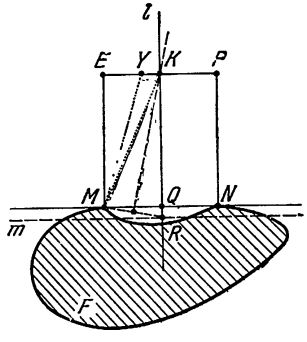


Рис. 59.

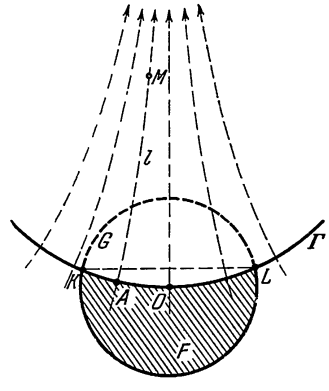


Рис. 60.

Поэтому, когда точка Y непрерывно двигается по отрезку EF от E до F, ближайшая к Y точка A_Y непрерывно перемещается от точки $M = A_E$ до $N = A_F$, оставаясь все время в полосе между прямыми MN и m. Но это невозможно, так как точка A_Y (принадлежащая при любом Y фигуре F) не может «перепрыгнуть» через отрезок QR, свободный от точек фигуры F. Теорема доказана.

Любопытно отметить, что в геометрии Лобачевского (см. стр. 439—452 этого тома ЭЭМ) доказанная теорема места не имеет. В самом деле, пусть Γ — предельная линия, а G — круг, центр O которого расположен на линии Γ (рис. 60). Линия Γ разбивает круг G на две части, большую из которых мы обозначим через F. Фигура F не является выпуклой (например, отрезок, соединяющий точки K, L пересечения окружности с предельной линией Γ, не принадлежит фигуре F). Тем не менее фигура F обладает тем свойством, что для любой не принадлежащей ей точки M ближайшая к M точка фигуры F единственна. Например, если точка M лежит во внутренней области, ограниченной предельной линией Γ, и диаметр l предельной линии, проходящий через M, пересекает Γ во внутренней точке A дуги KL, то A есть единственная ближайшая к M точка линии Γ и, подавно, единственная ближайшая к M точка фигуры F.

Рассмотрим теперь две не пересекающиеся плоские выпуклые фигуры F и G. *Расстоянием* между этими фигурами называется точная нижняя грань расстояний от какой-либо точки фигуры F до какой-либо точки фигуры G. В том случае, если хотя бы одна

из фигур F, G является ограниченной, непременно найдутся такие точки A и B соответственно фигур F и G, что длина отрезка AB равна расстоянию между фигурами F и G (рис. 61), т. е. в этом случае расстояние можно определить как наименьшее из расстояний от какой-либо точки фигуры F до какой-либо точки фигуры G. Если же обе фигуры F, G не ограничены, то кратчайшего расстояния между точками этих фигур может и не существовать (рис. 62).

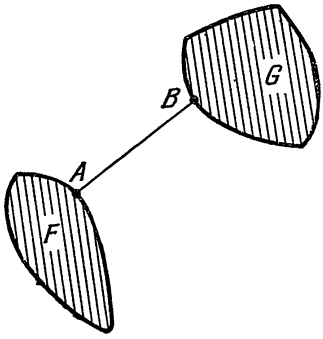


Рис. 61.

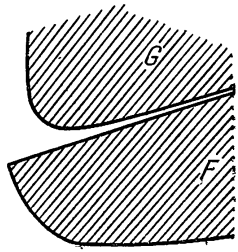


Рис. 62.

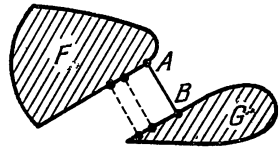


Рис. 63.

Заметим, что пара точек A, B, осуществляющих наименьшее расстояние между фигурами F и G, может оказаться не единственной (рис. 63). Однако в этом случае все отрезки, осуществляющие наименьшее расстояние между фигурами F и G, обязательно будут параллельны между собой. Это утверждение легко может быть выведено из следующей теоремы.

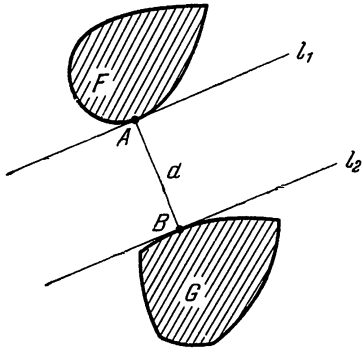


Рис. 64.

Теорема. *Пусть F и G — две непересекающиеся выпуклые фигуры, расстояние между которыми равно d, и A, B — такие точки этих фигур, что $AB=d$. Тогда прямые l_1 и l_2, проведенные через точки A и B перпендикулярно к отрезку AB, являются опорными прямыми фигур F и G, причем эти фигуры лежат по разные стороны полосы, образованной прямыми l_1 и l_2.* (рис. 64). В самом деле, точка A является ближайшей к B точкой фигуры F, и потому прямая l_1 является опорной прямой фигуры F (см. теорему на стр. 202). Аналогично l_2 является опорной прямой фигуры G. При этом точка B и фигура F расположены по разные стороны прямой l_1, т. е. F расположена вне полосы, образованной прямыми l_1 и l_2. То же справедливо и для фигуры G.

Теорема. *Если F и G — две непересекающиеся выпуклые фигуры, то существует прямая l, разделяющая эти фигуры, т. е. такая прямая, по отношению к которой фигуры F и G расположены по разные стороны.*

Справедливость этой теоремы в случае, когда хотя бы одна из фигур F, G ограничена, непосредственно вытекает из сказанного выше. Действительно, сохраняя обозначения предыдущей теоремы, мы можем в качестве l взять любую из прямых l_1, l_2 (или среднюю линию полосы, образованной прямыми l_1 и l_2). Несколько более сложное рассуждение (которое мы не приводим) показывает, что теорема справедлива и для неограниченных выпуклых фигур (а также и в том случае, если выпуклые фигуры F, G имеют общие граничные точки, но не имеют общих внутренних точек, рис. 65).

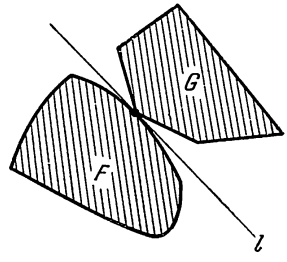


Рис. 65.

Расстояние от точки M до пространственного тела F определяется так же, как и в случае плоской фигуры. При этом, если F — выпуклое тело и M — не принадлежащая ему точка, то ближайшая к M точка A тела F единственна (а плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно к отрезку MA, является опорной плоскостью тела F, рис. 66). Обратно, если F — такое пространственное тело, что для любой не принадлежащей ему точки M ближайшая к M точка тела F единственна, то F — выпуклое тело.

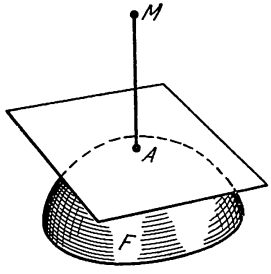


Рис. 66.

Так же как в случае плоских фигур, определяется и расстояние между двумя не пересекающимися выпуклыми телами в пространстве. Если $AB=d$ — отрезок, реализующий наименьшее расстояние между не пересекающимися выпуклыми телами F и G, то плоскости, проведенные через точки A и B перпендикулярно к отрезку AB, являются опорными плоскостями тел F, G, а сами эти тела расположены по разные стороны полосы, образованной указанными плоскостями. Далее, каждые два не пересекающихся выпуклых тела можно разделить плоскостью.

§ 3. Выпуклые многоугольники и многогранники

3.1. Пересечение выпуклых фигур. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — некоторые фигуры. Их *пересечением* называется фигура, состоящая из всех точек, каждая из которых одновременно принадлежит всем фигурам $F_1, F_2, \ldots, F_k$. На рис. 67 изображено пересечение трех

фигур F_1, F_2, F_3. Пересечение фигур (или тел) F_1, F_2, ..., F_k обозначается символом $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k$. Можно рассматривать пересечение и бесконечного множества фигур.

Теорема. *Пересечение любого множества выпуклых фигур также представляет собой выпуклую фигуру* (если, конечно, это пересечение содержит хотя бы одну точку).

Доказательство. Пусть F_1, F_2, ... — данные выпуклые фигуры и F — их пересечение. Возьмем две произвольные точки A, B фигуры F. Тогда, по определению пересечения, точки A и B принадлежат каждой из фигур F_1, F_2 ... Так как фигуры F_1, F_2, ... выпуклы, то каждая из них содержит и весь отрезок AB. Но это означает, что весь отрезок AB принадлежит пересечению F фигур F_1, F_2, ... Итак, фигура F вместе с каждыми двумя своими точками A и B содержит также весь соединяющий их отрезок AB, т. е. фигура F выпукла.

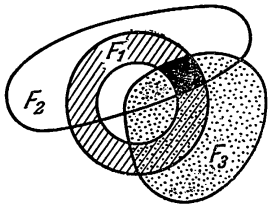


Рис. 67.

Так как полуплоскость является выпуклой фигурой, то из доказанной теоремы вытекает, в частности, что *пересечение любого множества полуплоскостей представляет собой выпуклую фигуру*. Замечательно, что имеет место и обратное предложение: *всякая плоская выпуклая фигура F, отличная от всей плоскости, может быть представлена как пересечение некоторого множества полуплоскостей*, а именно, всех полуплоскостей, содержащих фигуру F. В самом деле, прежде всего очевидно, что полуплоскости, целиком содержащие фигуру F, существуют: например, любая опорная прямая фигуры F делит плоскость на две полуплоскости, одна из которых содержит F. Ясно, что пересечение Π всех полуплоскостей, содержащих фигуру F, представляет собой выпуклую фигуру, содержащую F. Докажем, что в действительности Π совпадает с F. Действительно, пусть A — точка, не принадлежащая фигуре F. Тогда существует прямая l, разделяющая выпуклые фигуры A и F (рис. 68; заметим, что одна из этих фигур, а именно A, ограничена).

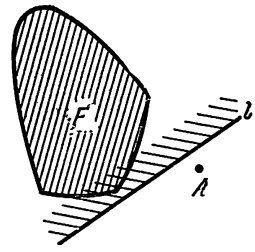


Рис. 68.

Следовательно, та из полуплоскостей, определяемых прямой l, которая содержит фигуру F, не содержит точки A и, значит, точка A не принадлежит фигуре Π. Из этого и вытекает, что фигура Π не содержит точек, не принадлежащих фигуре F, т. е. Π совпадает с F.

Таким образом, *плоская фигура в том и только в том случае является выпуклой, если она может быть представлена в виде пересечения некоторого множества полуплоскостей.* Это свойство может быть принято за новое определение выпуклых фигур.

Заметим еще, что в качестве полуплоскостей, пересечение которых представляет собой заданную выпуклую фигуру F, можно взять все содержащие F полуплоскости, ограниченные опорными прямыми фигуры F (рис. 69).

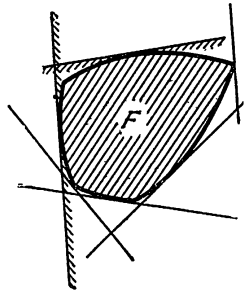


Рис. 69.

3.2. Выпуклые многосторонники и многогранники. Особый интерес представляют фигуры, которые можно представить в виде пересечения конечного числа полуплоскостей. Такие фигуры называются *выпуклыми многосторонниками.*

Пусть выпуклый многосторонник M образован пересечением полуплоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$. Ясно, что если какая-либо из этих полуплоскостей, скажем Π_i, содержит пересечение всех остальных полуплоскостей, то полуплоскость Π_i является «лишней», т. е. многосторонник M представляется также в виде пересечения меньшего числа полуплоскостей (а именно, $\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \ldots, \Pi_k$). В дальнейшем каждый выпуклый многосторонник мы будем представлять себе в виде пересечения полуплоскостей, среди которых нет ни одной лишней (т. е. лишние полуплоскости будем отбрасывать). Многосторонник, образованный пересечением n полуплоскостей (среди которых нет лишних), называется *выпуклым n-сторонником.*

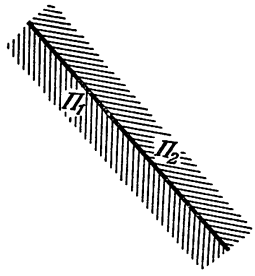


Рис. 70.

Простейшим выпуклым многосторонником является односторонник, т. е. полуплоскость (рис. 4, *б*). Выпуклыми двусторонниками являются углы, меньшие 180°, и полосы (рис. 4, *а*, *в*). Заметим, что прямая линия также представляет собой выпуклый двусторонник (ибо она может быть представлена как пересечение двух полуплоскостей, рис. 70).

Выпуклые трехсторонники изображены на рис. 71. Мы видим, что выпуклые односторонники и двусторонники обязательно являются неограниченными фигурами, так что простейшим ограниченным выпуклым многосторонником является обычный треугольник (рис. 71, *д*). При $n \geqslant 3$ выпуклые многосторонники могут быть как ограниченными, так и неограниченными (рис. 72).

Примером выпуклого ограниченного четырехсторонника может служить также обыкновенный отрезок (рис. 73).

Мы видим, что любая выпуклая фигура, расположенная на прямой (точка, отрезок, луч или вся прямая), представляет собой выпуклый многосторонник. Точку естественно назвать *нульмерным* выпуклым многосторонником; отрезок, луч и прямую — *одномерными* выпуклыми многосторонниками; наконец, все остальные выпуклые многосторонники будем называть *двумерными*.

Пусть M — некоторый выпуклый n-сторонник и $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ — полуплоскости, пересечением которых является многосторонник M.

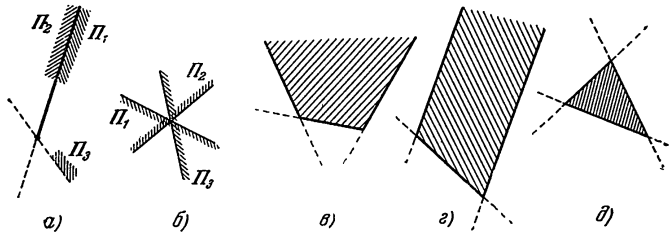


Рис. 71.

Граничные прямые полуплоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ обозначим соответственно через $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Легко понять, что *каждая из прямых* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *является опорной прямой фигуры* M. В самом деле, так как фигура M целиком лежит в полуплоскости Π_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то она расположена по одну сторону от прямой

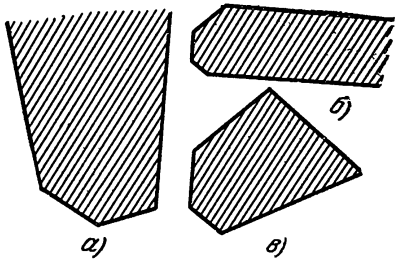


Рис. 72.

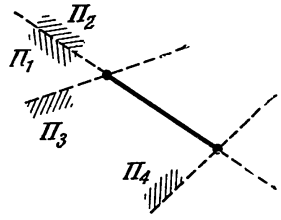


Рис. 73.

l_i. Если бы при этом прямая l_i не имела общих точек с M (рис. 74), то полуплоскость Π_i была бы лишней; между тем мы предполагаем, что среди полуплоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ нет лишних.

Предположим теперь, что выпуклый многосторонник является двумерным. Если бы опорная прямая l_i имела с M только одну общую точку, то и в этом случае полуплоскость Π_i была бы лишней (рис. 75). Таким образом, *каждая прямая* l_i *имеет с границей фигуры* M *либо общий отрезок* (рис. 76, *а*), *либо луч* (рис. 76, *б*),

либо же l_i целиком принадлежит границе фигуры M (рис. 76, *в*). Часть прямой l_i, принадлежащая границе многосторонника M, называется его *стороной*. Таким образом, выпуклый n-сторонник имеет n сторон. Концы сторон называются вершинами рассматриваемого многосторонника. (Иногда сторонами выпуклого многосторонника M

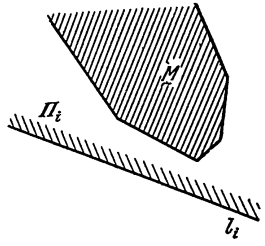


Рис. 74.

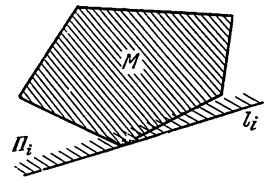


Рис. 75.

называют сами прямые $l_1, l_2, \ldots, l_n$, а не только указанные части этих прямых.)

При $n \geqslant 3$ граница двумерного выпуклого многосторонника представляет собой n-звенную ломаную. Эта ломаная замкнута, если

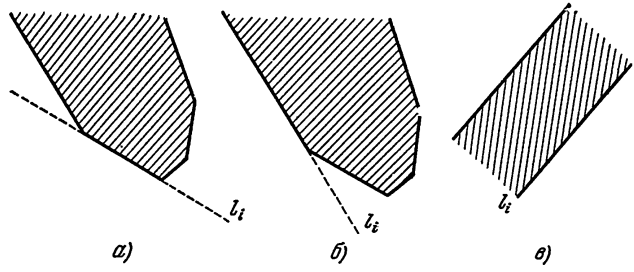


Рис. 76.

многосторонник M ограничен (рис. 72, *в*), и содержит два бесконечных луча, если он не ограничен (рис 72, *а*, *б*). В первом случае n-сторонник имеет n вершин; во втором случае он имеет $n-1$ вершин.

Аналогично сказанному выше, выпуклые тела в пространстве можно определить как пересечение некоторого множества полупространств. Простейшими выпуклыми телами являются те, которые можно представить в виде пересечения конечного числа полупространств. Такие выпуклые тела называются *выпуклыми многогранниками*. Если выпуклый многогранник может быть представлен в виде пересечения n полупространств, но не может быть представлен в виде пересечения меньшего числа полупространств, то он называется *выпуклым n-гранником*.

Легко понять, что каждый выпуклый многосторонник может быть представлен как пересечение конечного числа полупространств, т. е. является также выпуклым многогранником. Точку можно назвать *нульмерным* выпуклым многогранником, отрезок, луч и прямую — *одномерными* выпуклыми многогранниками. Двумерные выпуклые многосторонники будем также считать и *двумерными* выпуклыми многогранниками. Двумерным выпуклым многогранником является и плоскость (ее можно представить как пересечение двух полупространств с общей граничной плоскостью). Наконец, все остальные выпуклые многогранники (т. е. такие, которые не располагаются целиком в одной плоскости) называются *трехмерными*.

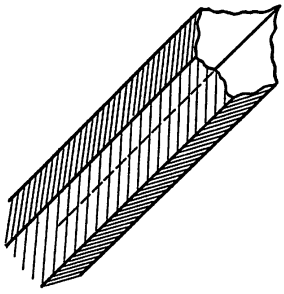


Рис. 77.

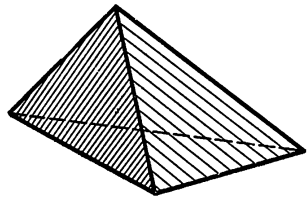


Рис. 78.

Среди неограниченных выпуклых трехмерных многогранников отметим *полупространство* (выпуклый одногранник), выпуклые двугранные и многогранные углы (рассматриваемые вместе с внутренностью), бесконечные выпуклые призмы (рис. 77) и др. Ограниченные трехмерные выпуклые n-гранники существуют лишь при $n \geqslant 4$; простейшим из них является тетраэдр (выпуклый ограниченный четырехгранник; рис. 78).

Пусть M — выпуклый трехмерный n-гранник и $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ — полупространства, пересечением которых он является. Плоскости, ограничивающие полупространства $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_3$, обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Эти плоскости являются опорными для выпуклого тела M, причем каждая из них пересекается с границей тела M по некоторому выпуклому многостороннику. Эти многосторонники $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ называются *гранями* выпуклого многогранника M; таким образом, выпуклый n-гранник имеет n граней. Стороны многосторонников $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ называются *ребрами* многогранника M, а их концы — *вершинами* этого многогранника. Ясно, что у ограниченного выпуклого многогранника все грани и ребра также являются ограниченными.

3.3. Выпуклая оболочка множества. Доказанная в п. **3.1** теорема о пересечении выпуклых фигур позволяет установить, что *для каждой фигуры* F (не предполагаемой выпуклой)

существует наименьшая выпуклая фигура F^*, содержащая F. В самом деле, рассмотрим все выпуклые фигуры, целиком содержащие F. Пересечение F^* всех этих фигур также будет, согласно указанной теореме, выпуклой фигурой, причем, очевидно, фигура F^* также содержит F. Далее, пусть F' — произвольная выпуклая фигура, содержащая F. Фигура F^* представляет собой пересечение ряда выпуклых фигур, в число которых входит и F'. Следовательно, фигура F^* содержится в фигуре F' (или совпадает с ней). Это и означает, что F^* — наименьшая из выпуклых фигур, содержащих F.

Фигура F^* называется *выпуклой оболочкой* фигуры F. Если F — ограниченная плоская фигура, то границу выпуклой фигуры F^* можно представлять себе как положение упругой резиновой нити, плотно охватывающей фигуру F (рис. 79). Разумеется, если фигура

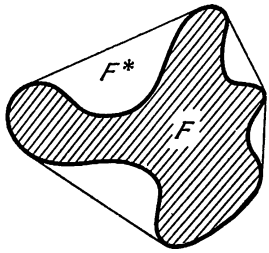


Рис. 79.

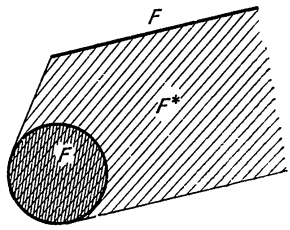


Рис. 80.

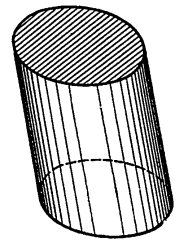


Рис. 81.

F не ограничена, то ее выпуклая оболочка также будет неограниченной выпуклой фигурой (на рис. 80 фигура F состоит из двух отдельных кусков: круга и луча).

В качестве простых геометрических примеров выпуклой оболочки можно указать следующие. Выпуклой оболочкой трех точек, не лежащих на одной прямой, является треугольник с вершинами в этих точках. Выпуклой оболочкой двух равных кругов, расположенных в параллельных плоскостях, является цилиндр (вообще говоря, наклонный), основаниями которого служат эти круги (рис. 81). Отметим еще, что конус является выпуклой оболочкой множества, к которому причисляются вершина конуса и все точки его основания.

3.4. Выпуклые многоугольники и многовершинники. Выпуклую оболочку конечного числа точек на плоскости называют *выпуклым многоугольником*. Пусть M — выпуклый многоугольник, представляющий собой выпуклую оболочку точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Если какая-либо из этих точек, скажем A_i, принадлежит выпуклой оболочке остальных точек, то точка A_i является «лишней», т. е. многоугольник M может быть представлен также как выпуклая оболочка меньшего числа точек (а именно, точек $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$).

Поэтому каждый выпуклый многоугольник мы будем представлять себе как выпуклую оболочку точек, среди которых нет ни одной лишней. Многоугольник, представляющий собой выпуклую оболочку n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (ни одна из которых не является лишней), называется *выпуклым n-угольником*. Сами точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *вершинами* этого выпуклого n-угольника.

Если $n=1$, то n-угольник состоит только из одной точки («выпуклый одноугольник»); такой многоугольник естественно назвать *нульмерным*. Выпуклый двуугольник ($n=2$) представляет собой отрезок; это — *одномерный* многоугольник. При $n \geqslant 3$ выпуклый n-угольник называется *двумерным*. Это название объясняется тем, что при $n \geqslant 3$ выпуклый n-угольник имеет внутренние точки, т. е.

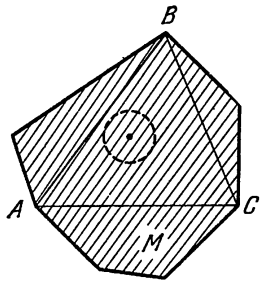


Рис. 82.

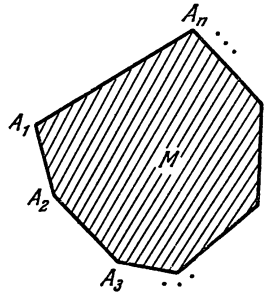


Рис. 83.

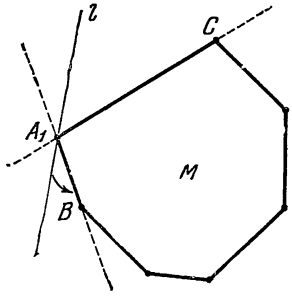


Рис. 84.

является двумерной выпуклой фигурой. В самом деле, пусть A, B, C — три вершины многоугольника. Они не лежат на одной прямой, так как в противном случае одна из них была бы лишней. Легко видеть, что выпуклая оболочка трех точек A, B, C совпадает с треугольником ABC. Значит, многоугольник M содержит целиком треугольник ABC, и потому M имеет внутренние точки (рис. 82).

Рассмотрим некоторый двумерный выпуклый многоугольник M. Ясно, что ни одна из его вершин не может являться внутренней точкой выпуклой фигуры M (иначе эта вершина была бы лишней). Следовательно, все вершины многоугольника лежат на его границе. Занумеруем вершины многоугольника в том порядке, в каком они нам встречаются при обходе границы фигуры M, скажем, в направлении «против часовой стрелки»: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 83).

Проведем через вершину A_1 опорную прямую l выпуклого многоугольника M и будем поворачивать ее вокруг точки A_1 до тех пор, пока она не «наткнется» на какую-либо вершину B многоугольника M (рис. 84). Так как все вершины многоугольника M лежат по одну сторону от прямой A_1B, то и сам многоугольник M (являющийся выпуклой оболочкой своих вершин) лежит по одну сторону от

A_1B, и потому A_1B — *опорная прямая* многоугольника M. Из этого следует, что отрезок A_1B принадлежит границе многоугольника M, а следовательно, вершины A_1 и B являются соседними (на отрезке A_1B нет других вершин, так как они были бы лишними). Аналогично, если поворачивать прямую l вокруг точки A_1 в противоположную сторону, то она наткнется на другую соседнюю с A_1 вершину C. Из сказанного ясно, что *прямая, соединяющая любые две соседние вершины выпуклого n-угольника, является его опорной прямой.*

Мы нашли, таким образом, n опорных прямых A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}, A_n, A_nA_1 выпуклого n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$. Полуплоскости, определяемые этими прямыми и содержащие многоугольник, мы обозначим через Π_{12}, Π_{23}, ..., $\Pi_{n-1,n}$, $\Pi_{n,1}$ (рис. 85). Нетрудно видеть, что n-угольник A_1A_2, ..., A_n совпадает с пересечением n полуплоскостей Π_{12}, Π_{23}, ..., $\Pi_{n-1,n}$, $\Pi_{n,1}$, т. е. является выпуклым n-сторонником.

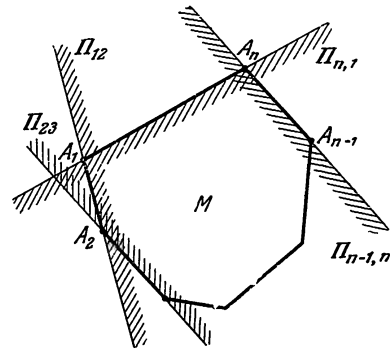


Рис. 85.

Таким образом, *понятие выпуклого многоугольника совпадает с понятием (ограниченного) выпуклого многосторонника.* Иными словами, привычное для нас понятие выпуклого многоугольника может быть определено двумя способами: как выпуклая оболочка конечного числа *точек* или как (ограниченное) пересечение конечного числа полуплоскостей.

В пространстве дело обстоит совершенно аналогично. Выпуклую оболочку конечного числа точек в пространстве условимся называть *выпуклым многовершинником.* Если эти точки не лежат в одной плоскости, то соответствующий многовершинник называется *трехмерным.* Так как наименьшее число точек, не лежащих в одной плоскости, равно четырем, то простейшим трехмерным многовершинником является тетраэдр (ср. рис. 78). Как и в случае плоскости, справедлива следующая теорема (доказательство которой, впрочем, значительно сложнее, чем в плоском случае):

Понятие выпуклого многовершинника совпадает с понятием (ограниченного) выпуклого многогранника.

3.5. Строение выпуклой оболочки. Вернемся снова к понятию выпуклой оболочки множества. Данное в начале этого пункта определение выпуклой оболочки (как пересечения всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру F) является, как говорят математики, неэффективным: оно использует лишь сам факт существования наименьшей выпуклой фигуры, содержащей F, но в нем ничего не говорится о том, как эту наименьшую фигуру можно

отыскать. Несколько бо́льшую информацию об «устройстве» выпуклой оболочки дает следующая

Теорема. *Пусть F — некоторая плоская фигура. Точка M в том и только в том случае принадлежит выпуклой оболочке F^* фигуры F, если существуют такие три точки A_1, A_2, A_3 фигуры F и такие три неотрицательных числа λ_1, λ_2, λ_3, что*

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \text{ и } \overline{OM}=\lambda_1\overline{OA}_1+\lambda_2\overline{OA}_2+\lambda_3\overline{OA}_3 \qquad (*)$$

(*O — произвольная точка плоскости*).

Прежде чем переходить к доказательству, сделаем некоторые замечания по поводу формулировки этой теоремы. Укажем, во-первых, что аналогичная теорема имеет место и для фигур в пространстве, с той, однако, разницей, что там уже приходится говорить о четырех точках A_1, A_2, A_3, A_4 и соответственно о четырех (неотрицательных) числах λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Далее выясним смысл соотношений (*). Хорошо известно, что *если для некоторых неотрицательных чисел λ_1, λ_2 выполнены соотношения*

$$\lambda_1+\lambda_2=1 \text{ и } \overline{OM}=\lambda_1\overline{OA}_1+\lambda_2\overline{OA}_2, \qquad (**)$$

то точка M принадлежит отрезку A_1A_2 (ср. ЭЭМ, кн. IV, стр. 311); *обратно, для любой точки M отрезка A_1A_2 найдутся неотрицательные числа λ_1, λ_2, удовлетворяющие условиям* (**). Таким образом, соотношения (**) представляют собой (при меняющихся $\lambda_1\geqslant 0$, $\lambda_2\geqslant 0$) как бы «уравнения отрезка A_1A_2». Аналогично этому соотношения (*) представляют собой «уравнения треугольника $A_1A_2A_3$». Это означает, что если для некоторых неотрицательных чисел λ_1, λ_2 λ_3 выполнены соотношения (*), то точка M принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$; обратно, для любой точки M треугольника $A_1A_2A_3$ найдутся неотрицательные числа λ_1, λ_2, λ_3, удовлетворяющие соотношению (*).

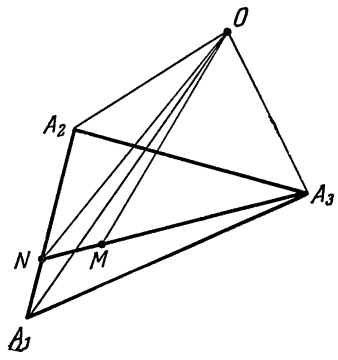


Рис. 86.

В самом деле, если M — точка треугольника $A_1A_2A_3$ и N — точка пересечения прямой A_3M со стороной A_1A_2 [1]), то (рис. 86)

$$\overline{ON}=\mu_1\overline{OA}_1+\mu_2\overline{OA}_2, \qquad (\mu_1\geqslant 0,\ \mu_2\geqslant 0,\ \mu_1+\mu_2=1),$$
$$\overline{OM}=\nu_1\overline{ON}+\nu_2\overline{OA}_3 \qquad (\nu_1\geqslant 0,\ \nu_2\geqslant 0,\ \nu_1+\nu_2=1),$$

[1]) Если M совпадает с A_3, то достаточно взять $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$.

и потому

$$\overline{OM} = \nu_1(\mu_1\overline{OA_1} + \mu_2\overline{OA_2}) + \nu_2\overline{OA_3} = \lambda_1\overline{OA_1} + \lambda_2\overline{OA_2} + \lambda_3\overline{OA_3},$$

где $\lambda_1 = \nu_1\mu_1$, $\lambda_2 = \nu_1\mu_2$, $\lambda_3 = \nu_2$. Ясно, что $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ и

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \nu_1\mu_1 + \nu_1\mu_2 + \nu_2 = \nu_1(\mu_1 + \mu_2) + \nu_2 = \nu_1 + \nu_2 = 1.$$

Обратно, если имеет место равенство (*), в котором λ_1, λ_2, λ_3 — неотрицательные числа, то, определив точку N вектором [1])

$$\overline{ON} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\overline{OA_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\overline{OA_2},$$

мы найдем, что точка N лежит на отрезке A_1A_2. Кроме того, так как $\overline{OM} = (\lambda_1 + \lambda_2)\overline{ON} + \lambda_3\overline{OA_3}$, то точка M лежит на отрезке ON, т. е. точка M принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$.

Сделанное замечание поясняет смысл сформулированной теоремы:

Для того чтобы получить выпуклую оболочку фигуры F, достаточно присоединить к F все треугольники (рассматриваемые как часть плоскости, т. е. вместе с их внутренними точками), *вершины которых принадлежат множеству F.*

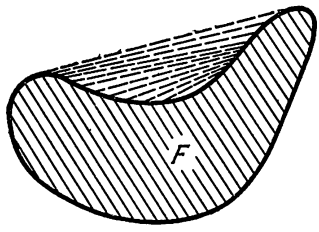


Рис. 87.

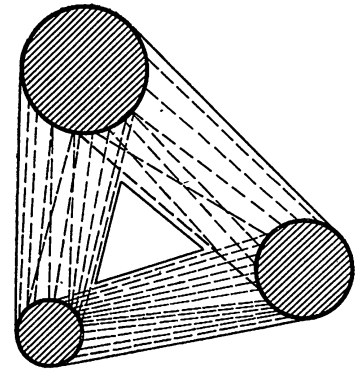


Рис. 88.

Исходя из определения выпуклых фигур, можно было бы подумать, что для получения выпуклой оболочки фигуры F достаточно присоединить к F все отрезки с концами в точках фигуры F. Некоторые простые примеры подтверждают это предположение (рис. 87). Можно доказать, что если F — связная фигура, то, присоединяя к ней все отрезки с концами в точках фигуры F, мы получим выпуклую оболочку фигуры F. Однако в общем случае такое присоединение отрезков может не привести к цели. Например, если фигура F состоит из трех кругов, изображенных на

[1]) Если $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), то соотношение (*) принимает вид $\overline{OM} = \overline{OA_3}$, т. е. точка M совпадает с точкой A_3.

рис. 88, то присоединение отрезков приводит к невыпуклой фигуре F_1. Если же мы теперь повторно произведем ту же операцию (т. е. присоединим к F_1 все отрезки с концами в точках фигуры F_1), то полученная фигура F_2 будет уже выпуклой, т. е. мы получим выпуклую оболочку $F_2 = F^*$ фигуры F. Такое двукратное присоединение отрезков в случае любой плоской фигуры F дает ее выпуклую оболочку. Как показывает сформулированная выше теорема, это двукратное присоединение отрезков можно заменить присоединением треугольников с вершинами в точках фигуры F.

Для получения выпуклой оболочки пространственной фигуры F, вообще говоря, необходимо трехкратное присоединение отрезков с концами в точках полученной ранее фигуры (представьте мысленно случай, когда фигура F состоит из четырех маленьких шариков с центрами в вершинах тетраэдра!). Вместо этого можно для получения выпуклой оболочки пространственной фигуры F присоединить к ней все тетраэдры с вершинами в точках фигуры F.

Перейдем теперь к доказательству сформулированной теоремы. Обозначим через $\tilde{F}$ множество всех точек M, удовлетворяющих соотношению (*) с неотрицательными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ясно, что фигура $\tilde{F}$ целиком содержится в F^* (ибо каждый треугольник с вершинами в точках фигуры F, целиком принадлежит ее выпуклой оболочке F^*). Докажем, что и, обратно, фигура F^* целиком содержится в $\tilde{F}$. Так как F^* — наименьшая выпуклая фигура, содержащая F, то для этого достаточно установить, что фигура $\tilde{F}$ выпукла. Пусть M и N — две точки фигуры $\tilde{F}$; тогда существуют такие точки A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 фигуры F, что точка M принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$, а точка N — треугольнику $B_1B_2B_3$. Обозначим через P выпуклый многоугольник, представляющий собой выпуклую оболочку точек A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 (многоугольник $A_1A_2B_1B_2B_3$ на рис. 89). Обе точки M, N принадлежат многоугольнику P, а потому и весь отрезок MN целиком принадлежит многоугольнику P. Проведем теперь все диагонали многоугольника P, исходящие из какой-либо его вершины. Эти диагонали разобьют весь многоугольник P на несколько треугольников с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, т. е. с вершинами в точках фигуры F (на рис. 89 треугольники $A_1A_2B_1$, $A_1B_1B_2$, $A_1B_2B_3$). Любая точка отрезка MN принадлежит одному из этих треугольников, т. е. принадлежит фигуре $\tilde{F}$. Тем самым выпуклость фигуры $\tilde{F}$ установлена, что и завершает доказательство теоремы.

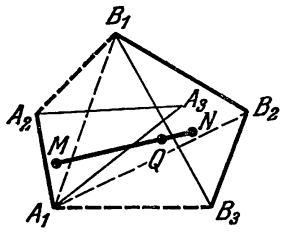


Рис. 89.

§ 4. Периметр, площадь, объем

4.1. Сложение выпуклых фигур. Выберем на плоскости некоторую точку O. Если A и B — две произвольные точки плоскости, то точку C, удовлетворяющую соотношению $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ (рис. 90), мы будем называть *суммой точек* A и B и будем писать $C=A+B$.

Пусть теперь F_1 и F_2 — две выпуклые фигуры. Рассмотрим всевозможные суммы $A=A_1+A_2$, где точки A_1 и A_2 пробегают фигуры F_1 и F_2 соответственно. Множество получающихся точек A представляет собой некоторую фигуру F, которую мы будем называть *суммой выпуклых фигур* F_1 и F_2: $F=F_1+F_2$ (рис. 91).

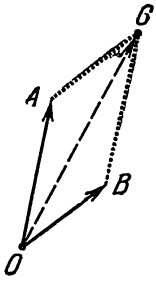


Рис. 90.

Полезно иметь в виду следующее геометрическое описание операции сложения выпуклых фигур. Зафиксируем точку A_1 фигуры F_1; тогда всевозможные суммы вида A_1+A_2, где A_2 пробегает все точки фигуры F_2, заполняют выпуклую фигуру A_1+F_2, которая получается из F_2 параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OA_1}$ (рис. 92, *а*). Множество всех фигур A_1+F_2, где A_1 пробегает все точки фигуры F_1, заполняет интересующую нас фигуру F_1+F_2 (рис. 92, *б*).

Укажем в качестве примера, что если F_1 и F_2 — отрезки, то F_1+F_2 будет отрезком (если F_1 и F_2 параллельны, рис. 93, *а*) или параллелограммом (если $F_1 \nparallel F_2$, рис. 93, *б*). Из этого непосредственно вытекает, что *сумма любых двух выпуклых фигур сама является выпуклой фигурой*. В самом деле, пусть $A=A_1+A_2$ и $B=B_1+B_2$ — две точки фигуры $F=F_1+F_2$ (рис. 94). Тогда фигуре F_1 (в силу ее выпуклости) целиком принадлежит отрезок A_1B_1, а фигуре F_2 — отрезок A_2B_2. Отсюда следует, что фигуре F целиком принадлежит сумма $A_1B_1+A_2B_2$, представляющая собой, как мы знаем, отрезок (рис. 94, *а*) или параллелограмм (рис. 94, *б*). Точки A и B принадлежат получающемуся отрезку (рис. 94, *а*) или являются противоположными вершинами параллелограмма (рис. 94, *б*). И в том, и в другом случае отрезок AB целиком принадлежит фигуре F, откуда и вытекает ее выпуклость.

Из свойств сложения векторов сразу следует, что справедливы соотношения $F_1+F_2=F_2+F_1$, $(F_1+F_2)+F_3=F_1+(F_2+F_3)$ (эту последнюю сумму мы будем обозначать просто через $F_1+F_2+F_3$ без скобок).

Данное определение суммы выпуклых фигур, конечно, зависит от положения слагаемых и, кроме того, от выбора точки O. Покажем, однако, что *при изменении точки* O *и при параллельном переносе слагаемых сумма фигур лишь подвергается параллельному переносу* (так что форма ее не меняется). В самом деле, пусть точка O заменяется точкой O'. Тогда точка $A=A_1+A_2$

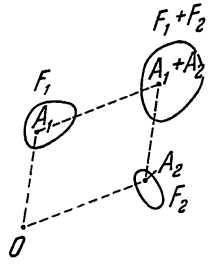


Рис. 91.

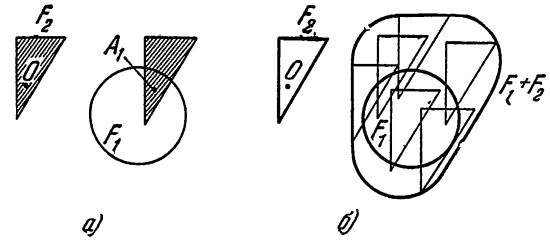
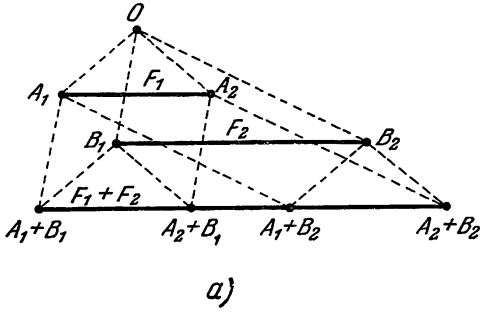


Рис. 92.



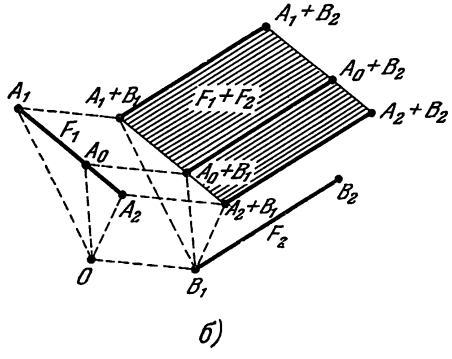
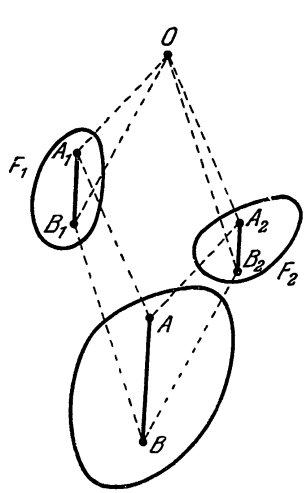


Рис. 93.



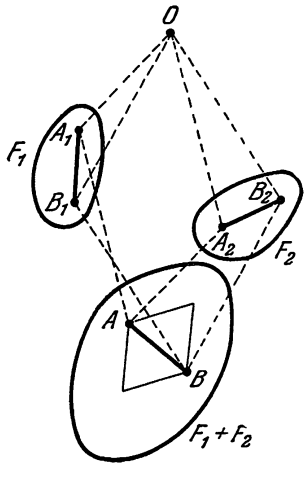


Рис. 94

заменится такой точкой A', что $\overline{O'A'} = \overline{O'A_1} + \overline{O'A_2}$. Мы имеем:

$$\overline{OA'} = \overline{OO'} + \overline{O'A'} = \overline{OO'} + \overline{O'A_1} + \overline{O'A_2} =$$
$$= \overline{OO'} + (\overline{O'O} + \overline{OA_1}) + (\overline{O'O} + \overline{OA_2}) = \overline{O'O} + (\overline{OA_1} + \overline{OA_2}) = \overline{O'O} + \overline{OA}.$$

Таким образом, точка A переходит в точку A' при параллельном переносе на вектор $\overline{O'O}$ (рис. 95).

Аналогично доказывается, что *параллельный перенос любого слагаемого приводит лишь к параллельному переносу суммы фигур*. Напротив, поворот слагаемых может существенно изменить сумму. Например, сумма параллельных отрезков является отрезком, а при повороте одного из отрезков сумма превращается в параллелограмм.

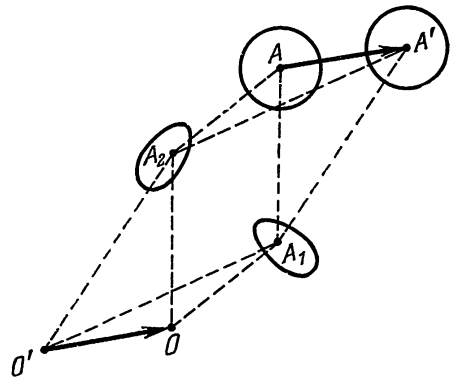


Рис. 95.

В заключение этого пункта отметим следующий интересный факт. *Пусть F — произвольная фигура постоянной ширины d, а F' — фигура, симметричная ей относительно некоторой точки; тогда сумма $F + F'$ представляет собой круг радиуса d.* (Для доказательства надо прежде всего установить, что $F + F'$ есть центрально-симметричная фигура

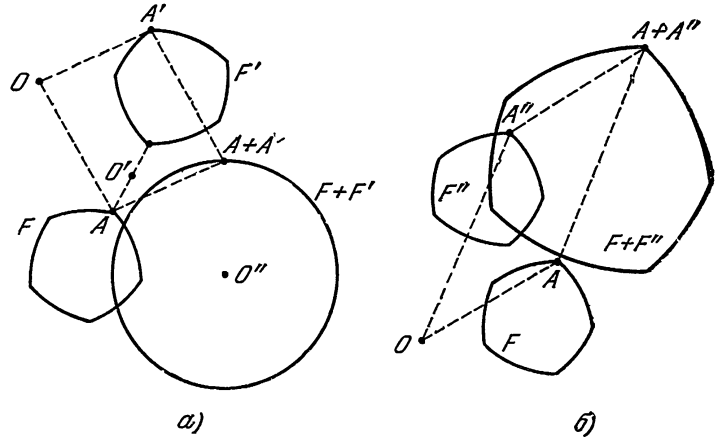


Рис. 96.

постоянной ширины $2d$; из этого уже нетрудно вывести, что $F + F'$ — круг.) Иными словами, если фигура F' получается из F поворотом на угол 180°, то $F + F'$ есть круг (рис. 96, *а*). В то же время, если F'' получается из F параллельным переносом, то $F + F''$ есть фигура, подобная F (с коэффициентом подобия 2, рис. 96, *б*). Это — еще одна иллюстрация к тому факту, что поворот слагаемых может существенно изменить сумму.

Нетрудно убедиться, что справедлива и обратная теорема: *если сумма фигур F и F', где фигура F' получается из F симметрией относительно точки, есть круг, то F — фигура постоянной ширины.* Таким образом, фигуру постоянной ширины можно определить как такую фигуру, сумма которой с центрально-симметричной ей представляет собой круг [1]).

4.2. Отклонение. Сумму плоской фигуры F и круга C_r радиуса r с центром в точке O можно определить как фигуру, образованную совокупностью всех кругов радиуса r с центрами в точках фигуры F (рис. 97). Эту сумму $F+C_r$ мы будем называть *r-окрестностью* фигуры F. (Если F — пространственное выпуклое тело, то под его r-окрестностью понимают сумму $F+C_r$ тела F и шара C_r радиуса r с центром в точке O.) Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые фигуры и r — такой отрезок, что каждая из фигур F_1, F_2 содержится целиком в r-окрестности другой фигуры. Наименьший из всех отрезков r, обладающих этим свойством, называется *отклонением* фигур F_1 и F_2 друг от друга (рис. 98). Мы будем обозначать отклонение символом $\sigma(F_1, F_2)$.

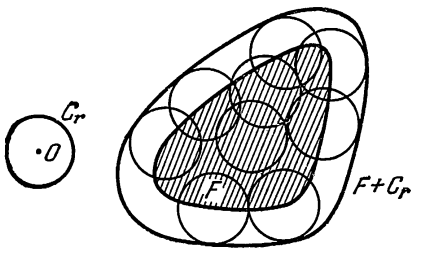


Рис. 97.

Отметим основные свойства отклонений. Прежде всего ясно, что отклонение $\sigma(F_1, F_2)$ фигур F_1 и F_2 друг от друга равно нулю в том и только в том случае, если эти фигуры совпадают. Далее, очевидно, что $\sigma(F_1, F_2)=\sigma(F_2, F_1)$ (т. е. фигуры F_1, F_2 равноправны в определении отклонения). Наконец, докажем, что для любых трех выпуклых фигур F_1, F_2, F_3 имеет место неравенство

$$\sigma(F_1, F_2)+\sigma(F_2, F_3)\geqslant \geqslant\sigma(F_1, F_3).$$

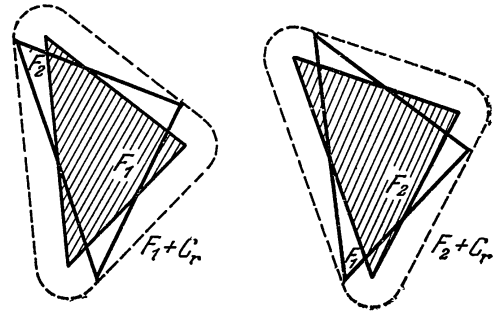


Рис. 98.

В самом деле, обозначим отклонение $\sigma(F_1, F_2)$ через r, а $\sigma(F_2, F_3)$ через s. Тогда фигура F_2 находится целиком в r-окрестности фигуры F_1; эту r-окрестность обозначим через H. Так как, кроме того, фигура F_3 находится в s-окрестности фигуры F_2, то она и

---

[1]) Можно рассматривать также такие фигуры F, что *сумма* $F+F'+F''+\ldots+F^{(n-1)}$, *где фигура* $F^{(i)}$ *получается из* F *поворотом на угол* $i\,\frac{360^\circ}{n}$, *представляет собой круг.* Эти фигуры (их свойствам посвящен последний параграф указанной в списке литературы книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского [1]) во многом аналогичны фигурам постоянной ширины.

подавно находится в s-окрестности фигуры H. Но легко понять, что s-окрестность фигуры H (т. е. r-окрестности фигуры F_1) совпадает с $(r+s)$-окрестностью фигуры F_1 (рис. 99). Итак, F_3 находится в $(r+s)$-окрестности фигуры F_1. Аналогично устанавливается, что F_1 лежит $(s+r)$-окрестности фигуры F_3. Таким образом, $\sigma(F_1, F_3) \leqslant r+s$, что и требовалось доказать.

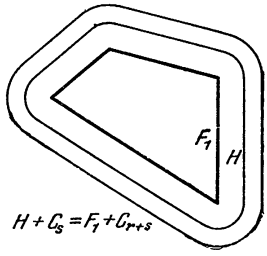


Рис. 99.

Если рассматриваемые выпуклые фигуры являются точками, то отклонение $\sigma(F_1, F_2)$ совпадает, очевидно, с расстоянием между точками F_1 и F_2. Поэтому неравенство $\sigma(F_1, F_2)+\sigma(F_2, F_3) \geqslant \sigma(F_1, F_3)$ означает для случая трех точек F_1, F_2, F_3, что сумма двух сторон треугольника $F_1F_2F_3$ не меньше его третьей стороны (знак равенства достигается, когда все три точки F_1, F_2, F_3 лежат на одной прямой). По аналогии с этим случаем общее неравенство

$$\sigma(F_1, F_2)+\sigma(F_2, F_3) \geqslant \sigma(F_1, F_3)$$

называется неравенством треугольника.

В математике очень часто приходится рассматривать «пространства», «точками» которых могут служить самые разнообразные математические объекты. Нередко между «точками» F_1, F_2 определено в этих пространствах «расстояние» $\rho(F_1, F_2)$, причем выполняются следующие три условия:

1. Расстояние $\rho(F_1, F_2)$ между любыми двумя точками неотрицательно; равенство $\rho(F_1, F_2)=0$ означает совпадение точек F_1 и F_2.
2. $\rho(F_1, F_2)=\rho(F_2, F_1)$ для любых двух точек F_1, F_2.
3. $\rho(F_1, F_2)+\rho(F_2, F_3) \geqslant \rho(F_1, F_3)$ (неравенство треугольника).

Такие «пространства» называются *метрическими пространствами* [1]).

С одним из метрических пространств читатель хорошо знаком из школьного курса геометрии: множество всех точек плоскости (или пространства) с расстоянием, понимаемым в обычном смысле, представляет собой пример метрического пространства. Сказанное выше позволяет указать еще один интересный пример метрического пространства. Именно, условимся считать «точками» всевозможные выпуклые фигуры, а под «расстоянием» между двумя «точками» F_1, F_2 условимся понимать отклонение $\sigma(F_1, F_2)$. При этих соглашениях *множество всех выпуклых фигур представляет собой метрическое пространство.*

4.3. Сходящиеся последовательности выпуклых фигур. Пусть дана последовательность

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \qquad (*)$$

выпуклых фигур. Будем говорить, что эта последовательность

[1]) См. стр. 537 этой книги ЭЭМ. Подробнее о метрических пространствах можно прочесть, например, в книге Ю. А. Шрейдера «Что такое расстояние?», М., Физматгиз, 1963.

сходится к выпуклой фигуре F (или имеет выпуклую фигуру F своим *пределом*), если $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(F, F_n)=0$. Иными словами, последовательность (*) сходится к фигуре F, если для каждого $\varepsilon>0$ можно найти такое натуральное число N, что при любом $n>N$ выполнено неравенство $\sigma(F, F_n)<\varepsilon$.

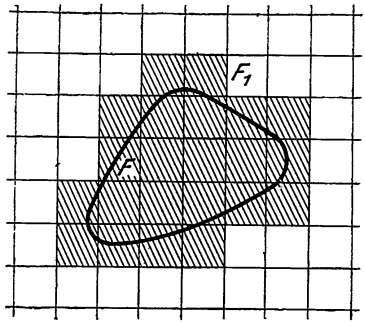


Рис. 100.

Теорема. *Для любой двумерной выпуклой фигуры F существует сходящаяся к ней последовательность выпуклых многоугольников.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что при любом $r>0$ существует выпуклый многоугольник M, для которого $\sigma(F, M)<r$. Для этого покроем плоскость сеткой квадратов со стороной $\frac{r}{2}$ (рис. 100) и рассмотрим все квадраты этой сетки, имеющие с фигурой F хотя бы одну общую точку. Вместе взятые, эти квадраты образуют многоугольную фигуру F_1 (она заштрихована на рис. 100), целиком содержащую фигуру F. Обозначим через M выпуклую оболочку фигуры F_1. Ясно, что M также целиком содержит фигуру F. Если P есть множество всех вершин квадратов, входящих в фигуру F_1, то, очевидно, M будет совпадать также с выпуклой оболочкой множества P (рис. 101). Так как P — конечное множество точек, то M — выпуклый многоугольник.

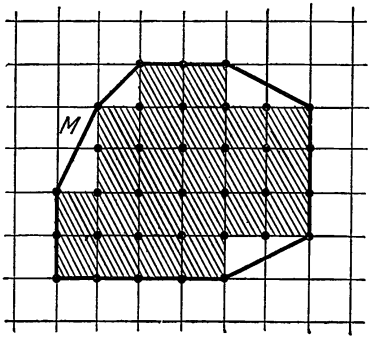


Рис. 101.

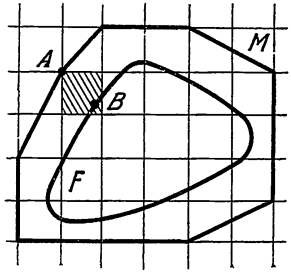


Рис. 102.

Пусть A — произвольная вершина многоугольника M. Тогда точка A принадлежит множеству P. Следовательно, точка A принадлежит некоторому квадрату сетки, имеющему с фигурой F общую точку B (рис. 102). Так как расстояние между любыми двумя

точками квадрата не превосходит его диагонали, то $AB \leqslant \frac{r}{2}\sqrt{2} < r$, и потому точка A находится в r-окрестности фигуры F. Итак, все вершины выпуклого многоугольника M принадлежат r-окрестности фигуры F. Так как r-окрестность выпуклой фигуры F сама является выпуклой фигурой, то весь многоугольник M содержится в r-окрестности фигуры F. Кроме того, M содержит фигуру F; поэтому ясно, что $\sigma(F, M) < r$. Таким образом, M — искомый многоугольник.

Теперь легко завершить доказательство теоремы. В самом деле, пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ — такие выпуклые многоугольники, что $\sigma(F, M_1) < 1$, $\sigma(F, M_2) < 1/2, \ldots, \sigma(F, M_n) < 1/n \ldots$ (существование таких многоугольников вытекает из доказанного выше). Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(F, M_n) = 0$, и потому последовательность $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_n, \ldots$ сходится к фигуре F.

Доказанную теорему можно несколько усилить. Назовем *вписанным многоугольником* двумерной выпуклой фигуры F выпуклую оболочку конечного числа точек, выбранных на границе фигуры F (рис. 103). *Описанным многоугольником* (может быть, правильнее было бы сказать «описанным многосторонником») двумерной выпуклой фигуры F назовем пересечение конечного числа полуплоскостей, каждая из которых ограничена опорной прямой фигуры F и содержит эту фигуру (рис. 104). В дальнейшем мы будем рассматривать лишь о г р а н и ч е н н ы е описанные многоугольники (рис. 105).

Из доказательства приведенной выше теоремы легко вывести, что *для произвольной двумерной выпуклой фигуры F можно найти*

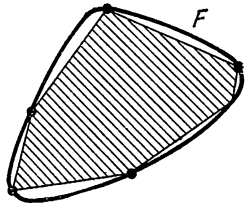


Рис. 103.

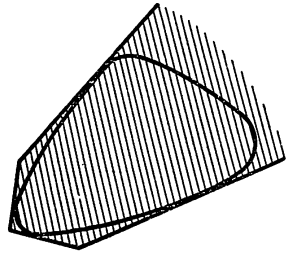


Рис. 104.

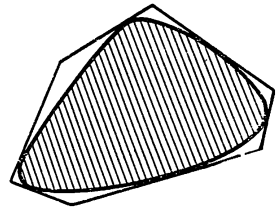


Рис. 105.

сколь угодно близкий к ней описанный многоугольник. В самом деле, построенный при доказательстве теоремы многоугольник M содержал фигуру F внутри себя (рис. 106). Если теперь перенести параллельно стороны многоугольника, сделав их опорными прямыми фигуры F, то мы получим описанный многоугольник M_1, целиком

содержащийся в M (пунктирный многоугольник на рис. 106). Ясно, что $\sigma(F, M_1) \leqslant \sigma(F, M) < r$, откуда и вытекает наше утверждение.

Легко видеть также, что *для каждой двумерной выпуклой фигуры F можно найти сколь угодно близкий к ней вписанный многоугольник*. Для доказательства достаточно покрыть плоскость сеткой квадратов со стороной $r/2$ (рис. 100) и рассмотреть все точки пересечения границы фигуры F с линиями сетки (рис. 107).

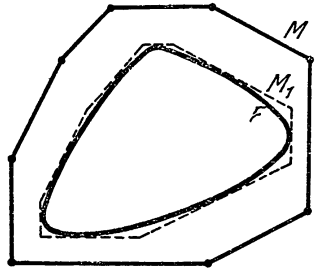


Рис. 106.

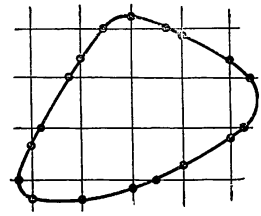


Рис. 107

Эти точки являются вершинами вписанного многоугольника M', причем нетрудно показать, что $\sigma(F, M') \leqslant \frac{r}{2}\sqrt{2}$, т. е. подавно $\sigma(F, M') < r$.

Теперь ясно, что доказанную выше теорему можно уточнить следующим образом:

Для любой двумерной выпуклой фигуры F существует сходящаяся к ней последовательность описанных многоугольников; точно так же существует сходящаяся к F последовательность вписанных многоугольников.

4.4. Теорема Бляшке. Во многих вопросах теории выпуклых тел оказывается весьма удобной следующая теорема, принадлежащая известному немецкому геометру В. Бляшке. В настоящей статье эта теорема использоваться не будет, но она найдет существенные применения в статье «Геометрические задачи на максимум и минимум».

Теорема. *Пусть дана бесконечная последовательность F_1, F_2, ..., F_n, ... выпуклых фигур, расположенных в ограниченной части плоскости. Тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Покроем плоскость сеткой квадратов со стороной 1/8 и обозначим через Q_1, Q_2, ..., Q_r те из квадратов, которые имеют общие точки хотя бы с одной из фигур F_1, F_2, ..., F_n, ... (этих квадратов имеется лишь конечное число, поскольку все рассматриваемые фигуры расположены в ограниченной

части плоскости). Обозначим, далее, через $L(Q_\alpha, Q_\beta, \ldots, Q_\rho)$ множество тех фигур F_i, которые имеют общие точки с каждым из квадратов $Q_\alpha, Q_\beta, \ldots, Q_\rho$, но не имеют общих точек ни с одним из остальных квадратов. Ясно, что каждая из рассматриваемых фигур F_i принадлежит некоторому множеству $L(Q_\alpha, Q_\beta, \ldots, Q_\rho)$; например, изображенная на рис. 108 фигура принадлежит множеству $L(Q_4, Q_5, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}, Q_{19}, Q_{20}, Q_{23}, Q_{24}, Q_{25}, Q_{26}, Q_{27}, Q_{28}, Q_{30}, Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, Q_{34}, Q_{35}, Q_{38}, Q_{39}, Q_{40}, Q_{41})$. Так как множеств $L(Q_\alpha, Q_\beta, \ldots, Q_\rho)$ имеется лишь конечное число (ибо из r квадратов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ можно выбрать лишь конечное число наборов $Q_\alpha, Q_\beta, \ldots, Q_\rho$), то хотя бы одно из них содержит бесконечно много фигур F_i рассматриваемой последовательности.

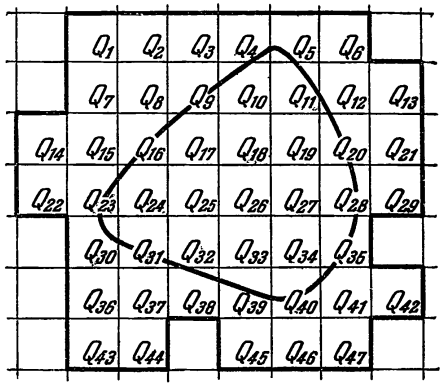


Рис. 108.

Пусть, например, множество $L_1 = L(Q_{\alpha_0}, Q_{\beta_0}, \ldots, Q_{\rho_0})$ содержит бесконечно много фигур F_i. Легко понять, что *если фигуры* F_i *и* F_j *принадлежат множеству* L_1, *то* $\sigma(F_i, F_j) < \frac{1}{4}$. Действительно, если A — любая точка фигуры F_i и Q_δ — тот квадрат, который содержит точку A, то в квадрате Q_δ найдется и некоторая точка B фигуры F_j. Так как, очевидно, $AB \leqslant \frac{1}{8}\sqrt{2}$, т. е. подавно $AB < 1/4$, то фигура F_i целиком расположена в 1/4-окрестности фигуры F_j. Точно так же, фигура F_j лежит в 1/4-окрестности фигуры F_i, и потому $\sigma(F_i, F_j) < 1/4$.

Разобьем теперь плоскость на квадраты со стороной 1/16 и обозначим через $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_s$ те из них, которые имеют хотя бы одну общую точку с рассматриваемыми фигурами. Обозначим через $L_1(Q'_\alpha, \ldots, Q'_\varrho)$ множество тех фигур из L_1, которые имеют общие точки с квадратами $Q'_\alpha, \ldots, Q'_\varrho$, но не имеют общих точек ни с какими другими квадратами. Хотя бы одно из множеств $L_1(Q'_\alpha, \ldots, Q'_\varrho)$ содержит бесконечно много фигур; выберем такое множество и обозначим его через L_2. Как и выше, показывается, что *если* F_i *и* F_j *принадлежат множеству* L_2, *то* $\sigma(F_i, F_j) \leqslant \leqslant \frac{1}{16}\sqrt{2} < \frac{1}{8}$.

Затем мы разобьем плоскость на квадраты со стороной 1/32 и проделаем то же построение. Тогда мы получим такое бесконечное множество L_3 выпуклых фигур (содержащееся в множестве L_2),

что $\sigma(F_i, F_j) < 1/16$ для любых двух фигур L_i, L_j из L_3. Ясно, что этот процесс можно продолжать неограниченно.

Пусть теперь F_{i_1} — некоторая фигура, принадлежащая множеству L_1. Выберем в L_2 фигуру F_{i_2}, причем так, чтобы было $i_2 > i_1$. Затем мы выберем фигуру F_{i_3} из множества L_3, имеющую номер $i_3 > i_2$, и т. д.

Мы докажем, что *выбранная таким образом подпоследовательность* $F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, \ldots$ *выпуклых фигур является сходящейся.* Обозначим через $F^*_{i_1}$ выпуклую фигуру, представляющую собой $\frac{1}{2}$-окрестность фигуры F_{i_1}, через $F^*_{i_2}$ — фигуру, являющуюся $\frac{1}{4}$-окрестностью фигуры F_2, далее $\frac{1}{8}$-окрестность фигуры F_{i_3} обозначим через $F^*_{i_3}$ и т. д. Заметим прежде всего, что фигура $F^*_{i_2}$ содержится целиком в фигуре $F^*_{i_1}$, фигура $F^*_{i_3}$ содержится в $F^*_{i_2}$ и т. д. В самом деле, в $\frac{1}{4}$-окрестности фигуры F_{i_1} содержатся все фигуры, принадлежащие множеству L_1 и, в частности, фигура F_{i_2}. Но тогда в $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$-окрестности фигуры F_{i_1} содержится $\frac{1}{4}$-окрестность фигуры F_{i_2}, а это и означает, что в $F^*_{i_1}$ содержится фигура $F^*_{i_2}$. Иными словами, фигуры $F^*_{i_1}$, $F^*_{i_2}$, $F^*_{i_3}$, ... образуют «убывающую» последовательность (рис. 109).

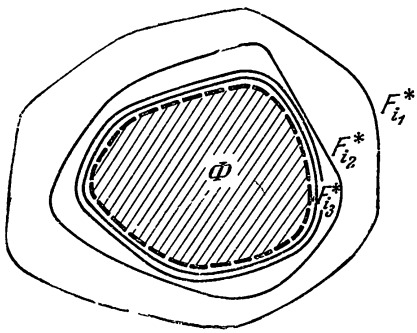


Рис. 109.

Из этого нетрудно вывести [1]), что пересечение Ф всех фигур $F^*_{i_1}$, $F^*_{i_2}$, ... содержит хотя бы одну точку и что последовательность $F^*_{i_1}$, $F^*_{i_2}$, ... сходится к выпуклой фигуре Ф (рис. 109). Отсюда уже без труда следует, что и последовательность F_{i_1}, F_{i_2}, ... сходится к фигуре Ф. Теорема доказана.

Заметим в заключение, что все, сказанное в этом пункте, без труда переносится на случай пространственных выпуклых тел.

4.5. Периметр, площадь, объем [2]). В этом пункте мы дадим определение понятий *периметра* и *площади* плоской выпуклой фигуры, а также *поверхности* и *объема* пространственного выпук-

[1]) Воспользовавшись, например, теоремой Больцано—Вейерштрасса (см. ЭЭМ, кн. III, стр. 159 и 270).

[2]) Содержание этого пункта тесно связано с помещенными в этой книге статьями «Площадь и объем» и «Длина кривой и площадь поверхности».

лого тела. При этом мы не будем предполагать известными понятия длины окружности, площади круга и т. п., не получающие в средней школе полноценных определений. Однако мы будем считать известными понятия периметра и площади выпуклого многоугольника, объема и площади поверхности выпуклого многогранника.

Наше изложение мы начнем со следующих лемм, которые мы формулируем для плоских выпуклых фигур, но которые остаются справедливыми и для пространственных выпуклых тел (с очевидной заменой круга шаром, квадрата — кубом и т. п.).

Лемма 1. *Пусть F — некоторая плоская выпуклая фигура и O — ее внутренняя точка. Предположим, что круг K радиуса a с центром в точке O целиком содержится в фигуре F. Тогда при любом $r>0$ фигура, получающаяся из F гомотетией с центром O и коэффициентом $k=1+\frac{r}{a}$, содержит r-окрестность фигуры F* (рис. 110).

Доказательство. Пусть A — произвольная точка фигуры F, лежащая вне круга K, и C — круг радиуса r с центром в этой точке. Проведем из точки A касательные к кругу K и обозначим через H выпуклую фигуру, получающуюся добавлением к кругу K части плоскости, заключенной между его окружностью и касательными (рис. 111). Фигура H целиком содержится в выпуклой фигуре F. При гомотетии с центром O и коэффициентом $k=1+\frac{r}{a}$ отрезки, входящие в границу фигуры H, перейдут в касательные

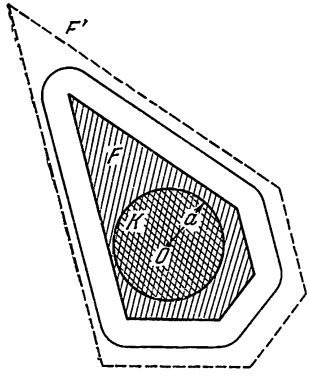


Рис. 110.

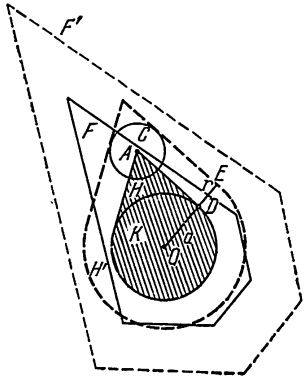


Рис. 111.

к кругу C (ибо $OE:OD=k$, см. рис. 111). Поэтому фигура H', получаемая из H при этой гомотетии, целиком содержит круг C. Тем более содержит круг C фигура F', получающаяся из F при

рассматриваемой гомотетии. Если же точка A принадлежит кругу K, то и в этом случае круг C радиуса r с центром в точке A содержится в F' (в этом случае он даже содержится в круге K', получающемся из K при рассматриваемой гомотетии).

Итак, фигура F' содержит круг C радиуса r с центром в любой точке A фигуры F. Но это и означает, что F' содержит r-окрестность фигуры F. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть M_1 и M_2 — два плоских выпуклых многоугольника, внутри каждого из которых можно поместить круг радиуса a. Обозначим периметры этих многоугольников через l_1, l_2, а площади — через s_1, s_2. Тогда*

$$|l_1-l_2|<l\cdot\frac{r}{a}, \qquad |s_1-s_2|<s\cdot\frac{r}{a}\left(2+\frac{r}{a}\right),$$

где l — наибольший из периметров l_1, l_2; s — наибольшая из площадей s_1, s_2, а $r=\sigma(M_1, M_2)$ — отклонение многоугольников M_1 и M_2 друг от друга [1]).

Доказательство. Обозначим M_1' многоугольник, получающийся из M_1 гомотетией с коэффициентом $k=\frac{r+a}{a}$ и центром, совпадающим с центром круга радиуса a, лежащим внутри M_1. Тогда многоугольник M_1' содержит r-окрестность многоугольника M_1, а следовательно, и многоугольник M_2 (ибо в силу равенства $r=\sigma(M_1, M_2)$, многоугольник M_2 лежит в r-окрестности многоугольника M_1). Из этого следует, что периметр и площадь многоугольника M_1' больше, чем соответственно периметр и площадь выпуклого многоугольника M_2. Но периметр и площадь многоугольника M_1' имеют значения kl_1 и k^2s_1. Таким образом, $kl_1>l_2$, $k^2s_1>s_2$, и потому

$$l_2-l_1<kl_1-l_1=\left(1+\frac{r}{a}\right)l_1-l_1=l_1\cdot\frac{r}{a}\leqslant l\cdot\frac{r}{a};$$

$$s_2-s_1<k^2s_1-s_1=\left(1+\frac{r}{a}\right)^2s_1-s_1=$$

$$=s_1\cdot\frac{r}{a}\left(2+\frac{r}{a}\right)\leqslant s\cdot\frac{r}{a}\left(2+\frac{r}{a}\right).$$

---

[1]) Для пространственных многогранников M_1, M_2, имеющих площади поверхностей s_1, s_2, объемы v_1, v_2 и содержащих внутри себя шар радиуса a, аналогичные неравенства имеют вид

$$|s_1-s_2|<s\cdot\frac{r}{a}\left(2+\frac{r}{a}\right), \qquad |v_1-v_2|<v\cdot\frac{r}{a}\left(3+3\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2}\right),$$

где s — наибольшая из площадей s_1, s_2; v — наибольший из объемов v_1, v_2.

Совершенно так же доказывается, что и $l_1 - l_2 < l \cdot \frac{r}{a}$, $s_1 - s_2 < s\frac{r}{a}\left(2 + \frac{r}{a}\right)$. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что *если* $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ — *последовательность выпуклых многоугольников, сходящаяся к двумерной выпуклой фигуре* F, *то их периметры* $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, *а также их площади* $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ *образуют сходящиеся числовые последовательности.* Для доказательства прежде всего установим, что *существует круг, содержащийся в каждом из многоугольников* M_n *с достаточно большим номером* n. В самом деле, пусть K — круг, заключенный внутри фигуры F и не имеющий общих точек с границей фигуры F (рис. 112). Проведем концентрическую с кругом K окружность C несколько большего радиуса, также содержащуюся в фигуре F. Разность радиусов окружности C и круга K обозначим через b. Пусть N — такое число, что при $n > N$ выполнено неравенство $\sigma(F, M_n) < b$. Оказывается тогда, что при $n > N$ многоугольник M_n целиком содержит круг K. Действительно, допустим, что это не так, т. е. что некоторый многоугольник M_n, где $n > N$, не содержит целиком круга K, т. е. некоторая точка A этого круга не принадлежит многоугольнику M_n. Проведем прямую l, разделяющую точку A и многоугольник M_n. Далее проведем параллельную l касательную l' к окружности C, расположенную с той же стороны от l, что и точка A (рис. 112). Прямая l' касается окружности C в точке B, очевидно, отстоящей от ближайшей точки многоугольника M более чем на b. Следовательно, точка B не принадлежит b-окрестности многоугольника M_n. Но это противоречит тому, что $\sigma(F, M_n) < b$, т. е. вся фигура F (и, в частности, точка B) расположена в b-окрестности многоугольника M_n.

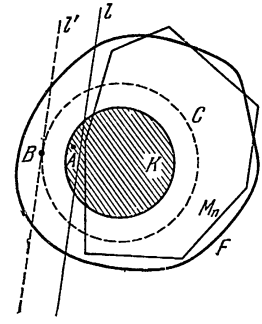


Рис. 112.

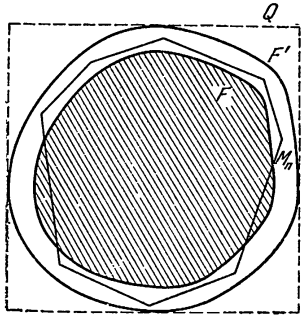


Рис. 113.

Итак, существует круг K, содержащийся во всех многоугольниках M_n при $n > N$. Радиус круга K обозначим через a. Легко видеть далее, что *существует выпуклый многоугольник* Q, *содержащий все многоугольники* M_n *при* $n > N$. В самом деле, все эти многоугольники расположены внутри b-окрестности фигуры F. Обозначим эту b-окрестность через F'. Если теперь провести к фигуре F' две параллельные между собой опорные прямые и еще

две опорные прямые, перпендикулярные к ним (рис. 113), то мы получим прямоугольник Q, содержащий всю фигуру F', а значит, и все многоугольники M_n с номерами $n > N$. Периметр и площадь многоугольника Q обозначим соответственно через λ и Σ. Ясно, что при $n > N$ справедливы неравенства $\Sigma > s_n$ (ибо многоугольник M_n содержится в Q); точно так же $\lambda > l_n$ при $n > N$ (ибо периметр «объемлющего» многоугольника всегда больше, чем периметр содержащегося в нем выпуклого многоугольника).

Пусть теперь m, n — два натуральных числа, каждое из которых больше N. Тогда $l_n < \lambda$, $l_m < \lambda$, так что наибольший из периметров l_m, l_n меньше, чем λ. Точно так же наибольшая из площадей s_m, s_n меньше, чем Σ. Поэтому из леммы 2 мы находим, что (при $m > N$, $n > N$)

$$|l_m - l_n| < \lambda \frac{r}{a}, \qquad |s_m - s_n| < \Sigma \frac{r}{a}\left(2 + \frac{r}{a}\right), \tag{*}$$

где $r = \sigma(M_n, M_m)$.

Так как $\sigma(M_n, M_m) \leqslant \sigma(F, M_n) + \sigma(F, M_m)$ (в силу неравенства треугольника), $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(F, M_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \sigma(F, M_m) = 0$, то величина $r = \sigma(M_n, M_m)$ стремится к нулю, когда m и n неограниченно увеличиваются (независимо друг от друга):

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sigma(M_n, M_m) = 0.$$

Поэтому из (*)следует, что

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} |l_m - l_n| = 0, \qquad \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} |s_m - s_n| = 0.$$

Но это и означает [1]), что *числовая последовательность* $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ (*а также последовательность* $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$) *является сходящейся.*

Предположим теперь, что, кроме последовательности $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, мы имеем еще одну последовательность $M_1', M_2', \ldots, M_n', \ldots$ выпуклых многоугольников, также сходящуюся к той же фигуре F. Тогда периметры $l_1', l_2', \ldots, l_n', \ldots$ и площади $s_1', s_2', \ldots, s_n', \ldots$ этих многоугольников также образуют сходящиеся числовые последовательности. Покажем, что эти новые последовательности сходятся к тем же пределам, что и прежние последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} l_n' = \lim_{n\to\infty} l_n, \qquad \lim_{n\to\infty} s_n' = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{**}$$

---

[1]) В силу так называемого *критерия сходимости Коши*, излагаемого в любом учебнике математического анализа.

В самом деле, начиная с некоторого n, все многоугольники M_n' также располагаются внутри Q и содержат внутри себя круг K. Поэтому для достаточно большого n к многоугольникам M_n и M_n' применима лемма 2:

$$|l_n' - l_n| < \lambda \frac{r}{a}, \qquad |s_n' - s_n| < \Sigma \frac{r}{a}\left(2 + \frac{r}{a}\right),$$

где $r = \sigma(M_n', M_n)$. Но $\sigma(M_n', M_n) \leqslant \sigma(F, M_n) + \sigma(F, M_n')$, и потому $\sigma(M_n', M_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда и вытекает справедливость равенств (**).

Итак, *пусть F — произвольная двумерная выпуклая фигура. Рассмотрим последовательность $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ выпуклых многоугольников, сходящуюся к фигуре F* (существование такой последовательности было установлено в п. **4.3**); *периметры и площади этих многоугольников обозначим соответственно через $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ и $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ Тогда* (это было также установлено) *существуют пределы*

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n, \qquad s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

причем эти пределы не зависят от выбора последовательности выпуклых многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ (т. е. они полностью определяются самой фигурой F). Числа l и s называются соответственно периметром и площадью выпуклой фигуры F.

Таким образом, мы определили понятие периметра и площади для любой двумерной выпуклой фигуры. При этом мы считали известными понятия периметра и площади выпуклого многоугольника, которые несравненно проще, чем понятия периметра и площади для произвольных выпуклых фигур. Заметим, что если фигура F сама является выпуклым многоугольником, то в качестве последовательности выпуклых многоугольников, сходящихся к F, можно взять последовательность совпадающих с F многоугольников: $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = \ldots = F$. Так как понятия периметра и площади не зависят от выбора сходящейся последовательности, то ясно, что наше определение периметра и площади (построенное с помощью предельного перехода) приводит в случае выпуклого многоугольника к обычным периметру и площади.

Для определения периметра и площади выпуклой двумерной фигуры F, как мы видели, можно пользоваться любой последовательностью выпуклых многоугольников, сходящейся к фигуре F. Часто с этой целью используют *вписанные или описанные многоугольники* выпуклой фигуры F (см. п. **4.3**).

Укажем теперь некоторые общие свойства периметров и площадей выпуклых фигур. Прежде всего мы остановимся на вопросе о поведении площади и периметра при преобразованиях подобия.

Теорема. *Если выпуклая фигура F' подобна выпуклой фигуре F с коэффициентом подобия k, то периметры l', l и площади s', s этих фигур связаны соотношениями $l'=kl$, $s'=k^2s$.*

В самом деле, пусть α — преобразование подобия (с коэффициентом k), переводящее фигуру F в F'. Пусть далее M_1, M_2, ..., M_n, ... — какая-либо последовательность выпуклых многоугольников, сходящаяся к фигуре F. Тогда последовательность M_1', M_2', ..., M_n', ... многоугольников, получающихся из M_1, M_2, ..., M_n, ... с помощью преобразования α, сходится [1]) к фигуре F'. Но, как известно, периметры l_n, l_n' многоугольников M_n, M_n' и площади s_n, s_n' этих многоугольников связаны равенствами $l_n'=kl_n$, $s_n'=k^2s_n$. Переход к пределу в этих равенствах при $n\to\infty$ и дает требуемые соотношения.

Доказанную теорему можно применить к вычислению длины окружности и площади круга. Обозначим площадь круга K_0, имеющего радиус 1, через π. Пусть теперь K — круг произвольного радиуса R. Так как круг K может быть получен из K_0 преобразованием подобия с коэффициентом подобия R, то площадь s круга K связана с площадью π круга K_0 соотношением $s=R^2\cdot\pi$. Итак, для площади круга радиуса R мы имеем формулу $s=\pi R^2$.

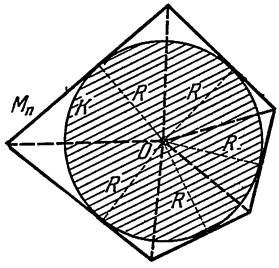


Рис. 114.

Пусть теперь M_n — произвольный описанный многоугольник круга K (рис. 114). Разбив многоугольник M на треугольники с общей вершиной в центре O круга K, мы найдем, что периметр l_n и площадь s_n многоугольника M_n связаны соотношением $s_n=\frac{1}{2}l_n\cdot R$. Поэтому, взяв последовательность M_1, M_2, ..., M_n, ... описанных многоугольников, сходящихся к кругу K, и переходя к пределу, мы получим $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}R\lim\limits_{n\to\infty}l_n$, или $s=\frac{1}{2}R\cdot l$, где l — периметр круга K (т. е. длина окружности радиуса R). Таким образом, для длины окружности радиуса R мы получаем формулу

$$l=\frac{2s}{R}=\frac{2\pi R^2}{R}=2\pi R.$$

В заключение заметим, что, хотя площадь и периметр определены здесь не во всей возможной общности, а лишь для сравнительно узкого класса фигур (а именно, выпуклых фигур), они сов-

[1]) Это, например, вытекает из того очевидного факта, что если фигуры F' и G' получаются из F и G преобразованием подобия с коэффициентом k, то $\sigma(F', G')=k\sigma(F, G)$.

падают для этих фигур с общим понятием площади и длины. Точнее говоря, любая выпуклая фигура F является плоской квадрируемой областью, а ее площадь, как квадрируемой области, совпадает с площадью, определенной в этом пункте. Точно так же граница плоской выпуклой фигуры является замкнутой спрямляемой линией, и ее длина (как спрямляемой линии) совпадает с определенным в этом пункте периметром выпуклой фигуры. Отсюда вытекает, что площадь выпуклой фигуры обладает всеми основными свойствами (инвариантность, аддитивность, неотрицательность, нормировка), положенными в основу определения общего понятия площади [1]). Впрочем, справедливость этих свойств легко доказать непосредственно, исходя из данного в этом пункте определения площади выпуклой фигуры. Точно так же периметр выпуклой фигуры обладает всеми основными свойствами длины (см. стр. 89 и 98 этой книги ЭЭМ). Весьма существенно, однако, что, в то время как длина произвольной спрямляемой линии обладает лишь свойством полунепрерывности, понятие периметра выпуклой фигуры обладает более сильным свойством непрерывности. Точно так же обладает свойством непрерывности и понятие площади выпуклой фигуры. Именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть F — произвольная двумерная выпуклая фигура, s — ее площадь и l — периметр. Пусть, далее, ε — произвольное положительное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что если выпуклая фигура F' удовлетворяет соотношению $\sigma(F, F') < \delta$, то ее площадь s' и периметр l' удовлетворяют неравенствам $|s - s'| < \varepsilon$, $|l - l'| < \varepsilon$. Из этого, в частности, следует, что если последовательность выпуклых фигур F_1, F_2, ..., ..., F_k, ... сходится к двумерной выпуклой фигуре F, то их площади s_1, s_2, ..., s_k, ... и периметры l_1, l_2, ..., l_k, ... сходятся соответственно к площади s и периметру l фигуры F:* $\lim\limits_{n\to\infty} s_k = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} l_k = l$.

Доказательство этой теоремы несложно выводится из леммы 2 (стр. 230). (По существу, в этой лемме утверждается непрерывность площади и периметра для случая выпуклого многоугольника.)

Аналогично изложенному строятся понятия объема и площади поверхности для пространственных выпуклых тел. Именно, если F — произвольное выпуклое тело, то можно построить сходящуюся к нему последовательность M_1, M_2, ..., M_n, ... выпуклых многогранников. Обозначим объемы и площади поверхностей этих многогранников соответственно через v_1, v_2, ..., v_n, ...

[1]) См. стр 7—8 этой книги ЭЭМ.

и s_1, s_2, ..., s_n, ... Оказывается, что существуют пределы $v=\lim\limits_{n\to\infty} v_n$, $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, причем эти пределы не зависят от выбора сходящейся к F последовательности выпуклых многогранников M_1, M_2, ..., M_n, ... (т. е. они полностью определяются самой фигурой F). Числа v и s называются соответственно *объемом* и *площадью поверхности*[1]) выпуклого тела F.

Введенные таким образом понятия объема и площади поверхности совпадают (для выпуклых тел) с общими определениями этих понятий (см. стр. 76 и 130); они обладают всеми свойствами объема и площади поверхности и дополнительно свойством непрерывности.

Если выпуклое тело F' подобно выпуклому телу F с коэффициентом подобия k, то объемы v', v и площади поверхностей s', s этих тел связаны соотношениями $v'=k^3v$, $s'=k^2s$. Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы на стр. 234. Из этого, в частности, вытекает, *что объем v шара радиуса R равен* ρR^3, где ρ — объем шара радиуса 1. Рассматривая описанные вокруг шара многогранники, мы получим (так же как на стр. 234), что *поверхность s шара радиуса R связана с его объемом формулой* $v=\frac{1}{3}Rs$ (ибо объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту). Следовательно, $s=\frac{3v}{R}=3\rho R^2$.

В полученных формулах $v=\rho R^3$, $s=3\rho R^2$ число ρ играет роль, аналогичную роли числа π в формулах площади круга и длины окружности. Замечательно, однако, что число ρ весьма просто выражается через π. А именно, $\rho=\frac{4}{3}\pi$, благодаря чему формулы для объема и площади поверхности шара принимают вид $v=\frac{4}{3}\pi R^3$, $s=4\pi R^2$).

Доказательство соотношения $\rho=\frac{4}{3}\pi$ использует специфические свойства шара и круга и не связано с теорией выпуклых тел. В любом варианте такого доказательства используется операция интегрирования или какой-либо предельный переход, по существу эквивалентный ей. Этим и объясняется сложность вывода формулы объема шара в учебниках элементарной геометрии.

Подчеркнем, что наличие одного и того же числа π в формулах $s=\pi R^2$, $l=2\pi R$ неудивительно и очень легко обосно-

---

[1]) Отметим, что такой подход к понятию площади поверхности выпуклой фигуры несравненно проще общего определения площади квадрируемой поверхности. (О трудностях, связанных с этим общим определением, см. стр. 130—137 этой книги ЭЭМ.)

вывается (см. стр. 234). Однако тот факт, что это же число π встречается в формулах $v=\frac{4}{3}\pi R^3$, $s=4\pi R^2$, относящихся к шару, является весьма замечательным и нетривиальным: во всей элементарной математике нелегко указать теорему, сравнимую по своей неожиданности с соотношением $\rho=\frac{4}{3}\pi$. Еще более удивительно то, что в формулах для объема и поверхности многомерных шаров (см. стр. 247 этой книги ЭЭМ) вновь появляется то же число π (но уже в некоторых степенях!).

4.6. Периметр и площадь суммы выпуклых фигур. В этом пункте мы укажем без доказательства некоторые теоремы о периметре и площади фигуры F_1+F_2, где F_1 и F_2 — заданные выпуклые фигуры.

Теорема. *Периметр фигуры F_1+F_2 равен сумме периметров фигур F_1 и F_2:* $l(F_1+F_2)=l(F_1)+l(F_2)$. (При этом, если какая-либо из фигур F_1, F_2 представляет собой отрезок длины a, то периметр этой фигуры следует считать равным $2a$, т. е. отрезок мы представляем себе в виде «двусторонника», состоящего из двух совпавших сторон длины a.)

В качестве примера применения сформулированной теоремы укажем, что *если F — произвольная выпуклая фигура, а F' — ее r-окрестность* (рис. 97), *то периметр фигуры F' равен $l+2\pi r$, где l — периметр фигуры F.* В самом деле, мы имеем $F'=F+C_r$, где C_r — круг радиуса r (см. стр. 222), откуда и вытекает требуемое утверждение.

Из сформулированной теоремы вытекает также следующий интересный факт, установленный французским математиком Барбье: *любая фигура постоянной ширины d имеет периметр πd.* В самом деле, пусть F — фигура постоянной ширины d, а F' — фигура, симметричная ей относительно некоторой точки. Обозначим периметр фигуры F через l; тогда и фигура F' имеет периметр l. Фигура же $F+F'$ имеет, согласно сформулированной выше теореме, периметр $l+l$, т. е. периметр $2l$. Но $F+F'$ есть круг радиуса d (см. стр. 221), и потому его периметр равен $2\pi d$. Таким образом, $2l=2\pi d$, откуда и вытекает, что периметр l фигуры F равен πd.

Для площади фигуры F_1+F_2 уже нет такого точного утверждения, как для периметра. Равенство $s(F_1+F_2)=s(F_1)+s(F_2)$, которое, по аналогии с периметрами, может в первый момент прийти в голову, места не имеет. Именно, имеет место следующая

Теорема. *Для любых (двумерных) выпуклых фигур F_1, F_2 справедливо неравенство $s(F_1+F_2)>s(F_1)+s(F_2)$.*

Иными словами, величина $s(F_1+F_2)-s(F_1)-s(F_2)$ всегда положительна; половину этой величины обозначают через $s(F_1, F_2)$ и называют *смешанной площадью* выпуклых фигур F_1 и F_2: $s(F_1, F_2)=\frac{1}{2}[s(F_1+F_2)-s(F_1)-s(F_2)]$. Это соотношение переписывается в виде равенства $s(F_1+F_2)=s(F_1)+s(F_2)+2s(F_1, F_2)$,

которое и дает выражение для площади фигуры F_1+F_2. Разумеется, это равенство есть лишь иная форма определения смешанной площади, и до тех пор, пока у нас нет какой-либо иной информации о смешанной площади, это соотношение бесполезно.

Точного выражения смешанной площади $s(F_1, F_2)$ через площади $s(F_1)$, $s(F_2)$ не существует. Однако справедлива следующая весьма важная теорема, оценивающая величину смешанной площади (эта теорема была доказана в конце XIX столетия немецкими математиками Г. Брунном и Г. Минковским):

Теорема. *Для любых (двумерных) выпуклых фигур* F_1, F_2 *справедливо неравенство* $s(F_1, F_2) \geqslant \sqrt{s(F_1)\cdot s(F_2)}$; *равенство достигается лишь в том случае, если фигуры* F_1 *и* F_2 *равны и параллельно расположены или гомотетичны.*

Следует заметить, что смешанная площадь не меняется при параллельном переносе одной (или обеих) фигуры F_1, F_2, но может существенно измениться при повороте одной из этих фигур. (Отсюда видно, что только площадями фигур F_1, F_2 смешанная площадь $s(F_1, F_2)$ не определяется.)

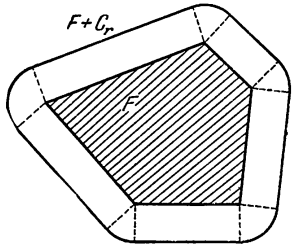


Рис. 115.

В качестве примера рассмотрим смешанную площадь $s(F, C_r)$, где C_r — круг радиуса r. Сумма $F+C_r$ есть r-окрестность фигуры F. В случае, если F — выпуклый многоугольник, его r-окрестность $F+C_r$ разбивается на три сорта частей: сам многоугольник F, прямоугольники высоты r, построенные на сторонах F, и секторы, составляющие вместе круг радиуса r (рис. 115). Сумма площадей указанных прямоугольников равна, очевидно, $l\cdot r$, где l — периметр многоугольника F; сумма же площадей секторов равна πr^2, т. е. равна $s(C_r)$. Итак, $s(F+C_r) = s(F)+lr+s(C_r)$, где l — периметр фигуры F. Формула эта справедлива для любого выпуклого многоугольника, а потому и вообще для любой двумерной выпуклой фигуры (ср. теорему на стр. 235). Теперь мы легко определим смешанную площадь:

$$s(F,\ C_r) = \frac{1}{2}[s(F+C_r) - s(F) - s(C_r)] = \frac{1}{2}lr.$$

Рассмотренный пример вычисления смешанной площади приводит к очень важному результату. Именно, в силу теоремы Брунна — Минковского, мы имеем: $(s(F, C_r))^2 \geqslant s(F)\cdot s(C_r)$, т. е. $\left(\frac{1}{2}lr\right)^2 \geqslant S(F)\pi r^2$. После упрощения мы получаем, что *для любой двумерной выпуклой фигуры* F *имеет место неравенство* $s \leqslant \frac{1}{4\pi}l^2$, *где* l *— периметр фигуры* F, *а* s *— ее площадь. Равенство дости-*

гается лишь в том случае, если фигура F гомотетична C_r, т. е. если фигура F *является кругом.*

Чтобы яснее представить себе смысл полученного неравенства, будем считать, что фигура F не является кругом, и обозначим через K круг, имеющий тот же периметр l, что и фигура F. Радиус R этого круга находится из соотношения $l=2\pi R$, т. е. $R=\frac{1}{2\pi}l$, а площадь круга K равна $\pi R^2=\pi\left(\frac{1}{2\pi}l\right)^2=\frac{1}{4\pi}l^2$. Но ведь это как раз та величина, которая стоит в правой части написанного выше неравенства. Таким образом, неравенство $s<\frac{1}{4\pi}l^2$ (здесь неравенство строгое, так как фигура F по предположению отлична от круга) переписывается в виде $s(F)<s(K)$. Иными словами, площадь любой выпуклой фигуры, отличной от круга, меньше, чем площадь круга, имеющего тот же периметр, т. е. *из всех выпуклых фигур заданного периметра* l *наибольшую площадь имеет круг.* Об этой интересной и важной теореме мы еще будем говорить в статье «Геометрические задачи на максимум и минимум»; в частности, там мы приведем другое ее доказательство, не опирающееся на теорему Брунна—Минковского.

Теорема Брунна—Минковского имеет и другие интересные геометрические приложения.

Аналогичные результаты имеют место и для пространственных выпуклых тел. Мы на этих вопросах не останавливаемся.

§ 5. Выпуклые тела в многомерных пространствах

5.1. Основные свойства. Для читателя, знакомого с понятиями многомерной геометрии (см. статью «Многомерные пространства» в этой книге ЭЭМ), мы укажем здесь основные факты, относящиеся к n-мерным выпуклым телам. Определение выпуклой фигуры в n-мерном евклидовом пространстве ничем не отличается от приведенных выше определений: *фигура* F *выпукла, если вместе с каждыми двумя точками она содержит и весь соединяющий их отрезок.* В n-мерном пространстве существуют выпуклые фигуры разного числа измерений: одномерные, двумерные, трехмерные, ..., n-мерные. Выпуклое тело F называется k-*мерным*, если оно целиком лежит в некоторой k-мерной плоскости, но не помещается ни в какой $(k-1)$-мерной плоскости. В частности, выпуклое тело считается n-*мерным*, если оно не лежит ни в какой $(n-1)$-мерной плоскости. Это определение равносильно следующему: выпуклое тело n-мерного пространства называется n-*мерным*, если оно содержит (хотя бы одну) внутреннюю точку A, т. е. такую точку A, что шар некоторого радиуса с центром в точке A принадлежит рассматриваемому телу (ср. рис. 11).

Выпуклые тела мы всегда будем предполагать замкнутыми. Все точки n-мерного выпуклого тела F (расположенного в n-мерном пространстве), не являющиеся его внутренними точками, называются его *граничными точками.* Совокупность всех граничных точек тела F называется его *границей.*

Пусть F — некоторое n-мерное выпуклое тело в n-мерном пространстве. Гиперплоскость, содержащая хотя бы одну граничную точку тела F, но не

содержащая ни одной его внутренней точки, называется *опорной гиперплоскостью* тела F. *Через каждую граничную точку выпуклого n-мерного тела F проходит хотя бы одна опорная гиперплоскость.* Это свойство является характеристическим для n-мерных выпуклых тел.

Точно так же, если F — ограниченное n-мерное выпуклое тело и Γ — произвольная гиперплоскость, то существуют ровно две опорные гиперплоскости тела F, параллельные гиперплоскости Γ. Расстояние между ними называется *шириной* выпуклого тела F в направлении, перпендикулярном к гиперплоскости Γ. Наименьшая ширина выпуклого тела F называется просто его *шириной*. Наибольшая ширина тела F называется его *диаметром*; диаметр совпадает также с наибольшим из расстояний между двумя точками тела F.

Если F и G — два не пересекающихся выпуклых тела в n-мерном пространстве, то существует разделяющая их гиперплоскость Γ (ср. рис. 64, 65), т. е. такая гиперплоскость, что тела F и G лежат по разные стороны от нее.

5.2. Выпуклые многогранники. Сохраняется в n-мерном пространстве и теорема о пересечении выпуклых тел (стр. 208). Так как, в частности, полупространство, очевидно, является выпуклым телом, то *пересечение любого числа полупространств является выпуклым телом.*

Пересечение конечного числа полупространств называется *выпуклым многогранником*. В дальнейшем мы будем интересоваться лишь n-мерными ограниченными выпуклыми многогранниками.

Граница выпуклого n-мерного многогранника M состоит из конечного числа $(n-1)$-мерных выпуклых многогранников, которые называются *главными гранями* многогранника M. Все главные грани многогранника M лежат в различных гиперплоскостях. Так как каждая главная грань N многогранника M сама является $(n-1)$-мерным выпуклым многогранником, то ее граница состоит из конечного числа $(n-2)$-мерных многогранников (главных граней многогранника N). Эти $(n-2)$-мерные многогранники называются *$(n-2)$-мерными гранями* исходного многогранника M. Аналогично этому главные грани $(n-2)$-мерных граней многогранника M называются его *$(n-3)$-мерными гранями* и т. д. Одномерные грани многогранника M называются также его *ребрами*, а точки, являющиеся концами ребер

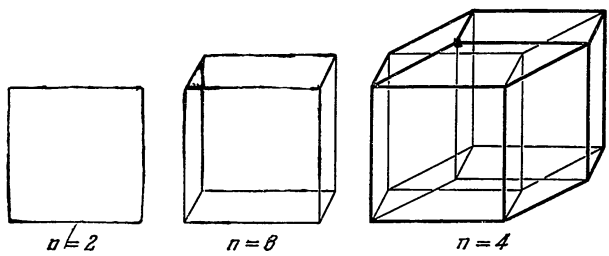


Рис. 116.

(«нульмерные грани»), — *вершинами* многогранника M. Таким образом, n-мерный многогранник M имеет «нульмерные грани» (вершины), одномерные грани (ребра), двумерные грани, ..., $(n-2)$-мерные грани и, наконец, $(n-1)$-мерные (т. е. главные) грани.

Совокупность всех k-мерных граней n-мерного многогранника M составляет его k-мерный остов. На рис. 116 схематически показано устройство одномерного остова, двумерного, трехмерного и четырехмерного кубов.

Замечательным фактом n-мерной геометрии является теорема Эйлера:

Обозначим через P_k число k-мерных граней n-мерного выпуклого многогранника M (так что P_0 — число его вершин, а P_{n-1} — число главных граней); *тогда число* $\chi(M)=P_0-P_1+P_2-\ldots+(-1)^{n-2}P_{n-2}+(-1)^{n-1}P_{n-1}$ (называемое эйлеровой характеристикой многогранника M) *принимает одно и то же значение для всех n-мерных выпуклых многогранников, а именно, оно равно* $1+(-1)^{n-1}$, *т. е.*

$$\chi(M)=\begin{cases}2, & \text{если } n \text{ нечетно},\\ 0, & \text{если } n \text{ четно}.\end{cases}$$

Если, например, $n=2$, то мы получаем равенство $P_0-P_1=0$, выражающее тот хорошо известный факт, что число вершин выпуклого многоугольника равно числу его ребер. При $n=3$ мы получаем $P_0-P_1+P_2=2$ («теорема Эйлера» для обычных, т. е. трехмерных, многогранников, ср. ЭЭМ, кн. IV, стр. 390). При $n=4$ мы получаем соотношение

$$P_0-P_1+P_2-P_3=0, \qquad (*)$$

справедливое для любого выпуклого четырехмерного многогранника. Например, для четырехмерного симплекса (ср. стр. 381 этой книги ЭЭМ) мы имеем: $P_0=5$, $P_1=10$, $P_2=10$, $P_3=5$, а для четырехмерного куба (стр. 240) имеем: $P_0=16$, $P_1=32$, $P_2=24$, $P_3=8$. В обоих случаях справедливость соотношения (*) непосредственно проверяется.

Доказательство теоремы Эйлера для n-мерных многогранников сравнительно сложно (впрочем, оно непросто уже для трехмерных многогранников, см. стр. 195 этой книги ЭЭМ или стр. 387—390 кн. IV ЭЭМ). Наиболее простое доказательство (основанное, однако, на довольно сложных идеях) проводится средствами топологии (ср. стр. 495—497 этой книги ЭЭМ).

5.3. Выпуклые многовершинники. Для каждой фигуры F, расположенной в n-мерном пространстве, существует наименьшее выпуклое тело F^*, содержащее фигуру F; оно называется *выпуклой оболочкой* фигуры F. (Так же как и в случаях $n=2$ или 3, выпуклая оболочка F^* фигуры F представляет собой пересечение всех выпуклых тел, содержащих F.) Выпуклую оболочку конечного числа точек называют *выпуклым многовершинником*. Оказывается, что n-мерное тело в том и только в том случае является выпуклым многовершинником, если оно представляет собой ограниченный выпуклый многогранник.

Полное описание (в векторной форме) выпуклого многовершинника дает следующая

Теорема. *Пусть в n-мерном пространстве даны k точек A_1, A_2, ..., A_k (где k — любое натуральное число). Точка M в том и только в том случае принадлежит выпуклой оболочке точек A_1, A_2, ..., A_k, если существуют такие неотрицательные числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, что*

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=1 \text{ и } \overrightarrow{OM}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{OA}_1+\lambda_2\cdot\overrightarrow{OA}_2+\ldots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{OA}_k \qquad (*)$$

(O — произвольная точка n-мерного пространства).

Доказательство. Обозначим через G выпуклую оболочку точек A_1, A_2, ..., A_k, а через $\tilde{G}$ — множество всех точек, удовлетворяющих соотношениям (*).

Прежде всего ясно, что множество $\tilde{G}$ содержит все точки A_1, A_2, ..., A_k. Например, из очевидных соотношений $1+0+\ldots+0=1$, $\overrightarrow{OA}_1=1\cdot\overrightarrow{OA}_1+0\cdot\overrightarrow{OA}_2+\ldots+0\cdot\overrightarrow{OA}_k$ видно, что точка A_1 принадлежит этому множеству.

Далее нетрудно понять, что множество $\tilde{G}$ выпукло. В самом деле, пусть точки M и N принадлежат множеству $\tilde{G}$. Тогда существуют такие неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$; $\mu_1, \ldots, \mu_k$, что выполнены соотношения

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=1, \qquad \overline{OM}=\lambda_1\cdot\overline{OA}_1+\lambda_2\cdot\overline{OA}_2+\ldots+\lambda_k\cdot\overline{OA}_k;$$

$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k=1, \qquad \overline{ON}=\mu_1\cdot\overline{OA}_1+\mu_2\cdot\overline{OA}_2+\ldots+\mu_k\cdot\overline{OA}_k.$$

Если теперь P — произвольная точка отрезка MN, то мы имеем $\overline{OP}=\overline{OM}+\overline{MP}=\overline{OM}+\nu\cdot\overline{MN}$ (рис. 117), где число ν удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\nu\leqslant 1$. Следовательно,

$$\overline{OP}=\overline{OM}+\nu\cdot\overline{MN}=\overline{OM}+\nu(\overline{ON}-\overline{OM})=\nu\cdot\overline{ON}+(1-\nu)\cdot\overline{OM}=$$
$$=\nu(\mu_1\cdot\overline{OA}_1+\mu_2\cdot\overline{OA}_2+\ldots+\mu_k\cdot\overline{OA}_k)+(1-\nu)\cdot(\lambda_1\cdot\overline{OA}_1+\lambda_2\cdot\overline{OA}_2+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_k\cdot\overline{OA}_k)=(\nu\cdot\mu_1+(1-\nu)\cdot\lambda_1)\cdot\overline{OA}_1+(\nu\cdot\mu_2+(1-\nu)\cdot\lambda_2)\cdot\overline{OA}_2+\ldots$$
$$\ldots+(\nu\cdot\mu_k+(1-\nu)\cdot\lambda_k)\cdot\overline{OA}_k.$$

Итак, выполнено равенство $\overline{OP}=\rho_1\cdot\overline{OA}_1+\rho_2\cdot\overline{OA}_2+\ldots+\rho_k\cdot\overline{OA}_k$, где числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ определяются соотношениями $\rho_i=\nu\mu_i+(1-\nu)\cdot\lambda_i$, $i=1, 2, \ldots, k$. Так как $\nu\geqslant 0$, $1-\nu\geqslant 0$ и все числа λ_i, μ_i неотрицательны, то $\rho_i\geqslant 0$. Кроме того, $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_k=\nu(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k)+(1-\nu)(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)=\nu\cdot 1+(1-\nu)\cdot 1=1$. Тем самым доказано, что точка P удовлетворяет соотношениям (*), т. е. принадлежит множеству $\tilde{G}$ Иными словами, все точки отрезка MN принадлежат телу $\tilde{G}$, что и доказывает выпуклость тела $\tilde{G}$.

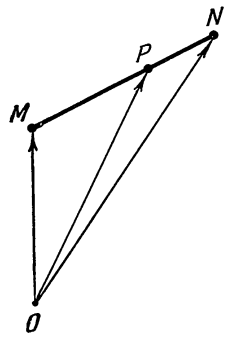


Рис. 117.

Но так как $\tilde{G}$ — выпуклое тело, содержащее все точки $A_1, A_2, \ldots, A_k$, то тело $\tilde{G}$ должно содержать и выпуклую оболочку точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Таким образом, мы установили, что тело G содержится в $\tilde{G}$. Для доказательства теоремы (т. е. для доказательства того, что тела G и $\tilde{G}$ совпадают) достаточно теперь установить, что и, наоборот, тело $\tilde{G}$ содержится в G. Мы докажем это индукцией по числу k точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

При $k=2$, т. е. для двух точек A_1, A_2, множество $\tilde{G}$, т. е. множество всех точек M, для которых $\lambda_1+\lambda_2=1$ и $\overline{OM}=\lambda_1\cdot\overline{OA}_1+\lambda_2\cdot\overline{OA}_2$ (при некоторых $\lambda_1\geqslant 0$, $\lambda_2\geqslant 0$), представляет собой отрезок A_1A_2 и, очевидно, совпадает с выпуклой оболочкой G точек A_1, A_2. Предположим, что для k точек $A_1, \ldots, A_k$ уже установлено совпадение их выпуклой оболочки G с множеством $\tilde{G}$, описываемым соотношениями (*). Докажем, что тогда это же справедливо и для $k+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$.

Пусть точка M принадлежит телу $\tilde{G}$, т. е. существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$, для которых выполнены соотношения $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k+\lambda_{k+1}=1$ и $\overline{OM}=\lambda_1\cdot\overline{OA}_1+\lambda_2\cdot\overline{OA}_2+\ldots+\lambda_k\cdot\overline{OA}_k+\lambda_{k+1}\cdot\overline{OA}_{k+1}$. Среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ непременно есть отличные от нуля (ибо сумма этих чисел равна единице); пусть, для определенности, $\lambda_1\neq 0$. Тогда подавно $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k>0$. Обозначим положительное число $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k$ через λ. Далее обозначим через N такую точку, что $\overline{ON}=\frac{\lambda_1}{\lambda}\cdot\overline{OA}_1+$

$+\frac{\lambda_2}{\lambda}\cdot\overline{OA}_2+\ldots+\frac{\lambda_k}{\lambda}\cdot\overline{OA}_k$. Так как, очевидно, $\frac{\lambda_1}{\lambda}+\frac{\lambda_2}{\lambda}+\ldots+\frac{\lambda_k}{\lambda}=1$, то, в силу предположения индукции, точка N принадлежит выпуклой оболочке точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (рис. 118) и, значит, она подавно принадлежит выпуклой оболочке G точек $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$. Наконец, $\lambda+\lambda_{k+1}=(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)+\lambda_{k+1}=1$ и $\overline{OM}=\lambda_1\cdot\overline{OA}_1+\ldots+\lambda_k\cdot\overline{OA}_k+\lambda_{k+1}\cdot\overline{OA}_{k+1}=\lambda\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\cdot\overline{OA}_1+\ldots+\frac{\lambda_k}{\lambda}\cdot\overline{OA}_k\right)+\lambda_{k+1}\cdot\overline{OA}_{k+1}=\lambda\cdot\overline{ON}+\lambda_{k+1}\cdot\overline{OA}_{k+1}$, откуда видно, что точка M лежит на отрезке NA_{k+1} (рис. 118). Но так как обе точки N, A_{k+1} принадлежат выпуклому телу G, то и точка M принадлежит этому телу. Тем самым доказано, что любая точка M тела $\tilde{G}$ принадлежит телу G, т. е. тела $\tilde{G}$ и G совпадают. Теорема доказана.

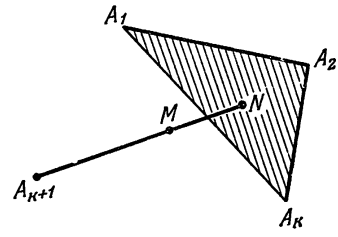


Рис. 118.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве даны $n+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$, которые не лежат в одной гиперплоскости. Многогранник, являющийся выпуклой оболочкой этих точек, называется *n-мерным симплексом* (ср. стр. 380). Так, *одномерный симплекс* представляет собой выпуклую оболочку двух точек в одномерном пространстве (т. е. на прямой); иными словами, одномерный симплекс является отрезком (рис. 119, *а*). *Двумерный симплекс*, т. е. выпуклая оболочка трех точек на плоскости, представляет собой треугольник (рис. 119, *б*). *Трехмерным симплексом* является тетраэдр (рис. 119, *в*) Таким образом, n-мерный симплекс представляет собой n-мерное обобщение треугольника (или тетраэдра).

Так как любые n точек n-мерного евклидова пространства лежат в одной гиперплоскости, то никакой «настоящий» n-мерный многогранник (т. е не лежащий целиком в гиперплоскости, или, иначе, содержащий внутренние

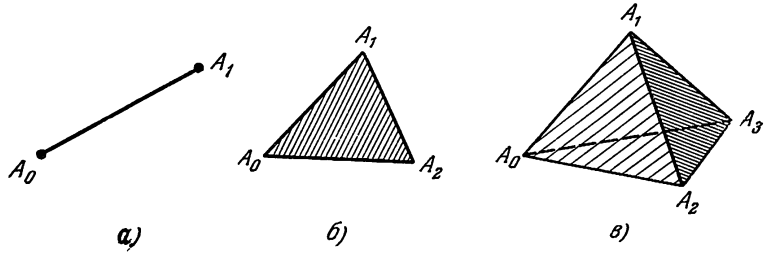


Рис 119.

точки) не может иметь менее $n+1$ вершин. Таким образом, n-мерный симплекс имеет наименьшее число вершин среди всех n-мерных многогранников и в этом смысле является простейшим n-мерным многогранником. Этим и объясняется его название (ведь слово «симплекс»—латинское simplex—как раз и означает «простой»).

Из простейших n-мерных многогранников, т. е. из симплексов, можно «сложить» любой n-мерный выпуклый многогранник. Так, например, хорошо известно, что любой выпуклый многоугольник можно разбить на треугольники, даже на треугольники, вершинами которых будут являться вершины данного многсугольника (рис 120). Точно так же любой (трехмерный) выпуклый многогранник можно разрезать на тетраэдры (на рис. 121 показано

разбиение куба на шесть тетраэдров). Аналогичное положение вещей имеет место и в n-мерном пространстве. Именно, справедлива следующая

Теорема. *Любой выпуклый n-мерный многогранник можно разбить на конечное число не перекрывающихся (т. е. не имеющих общих внутренних точек) симплексов, вершинами которых являются вершины данного многогранника.*

Доказательство мы проведем индукцией по числу измерений. При $n=2$, т. е. для «двумерных выпуклых многогранников» (для выпуклых многоугольников) теорема известна (рис. 120). Допустим, что теорема уже доказана для n-мерных многогранников, и докажем ее справедливость для

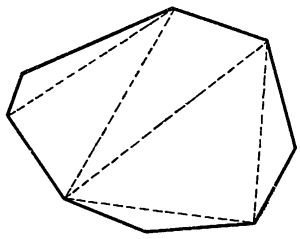


Рис. 120.

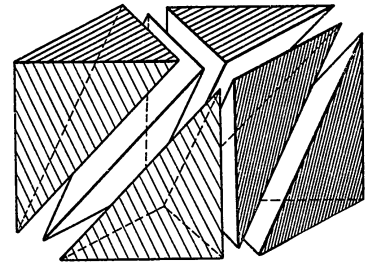


Рис. 121.

$(n+1)$-мерного многогранника M. (На чертежах, относящихся к последующей части доказательства, показан случай $n=2$, т. е. показано, как из справедливости теоремы для многоугольников вывести ее справедливость для многогранников.) Пусть A — некоторая вершина многогранника M; через Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k мы обозначим все n-мерные грани многогранника M, не имею-

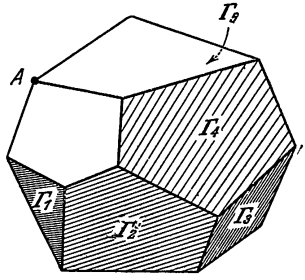


Рис. 122.

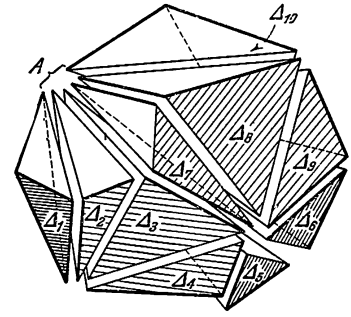


Рис. 123.

щие точку A своей вершиной (рис. 122). По предположению индукции, каждую из граней Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k можно разбить на n-мерные (не перекрывающиеся) симплексы, вершинами которых будут являться вершины многогранника M. Все полученные таким путем симплексы обозначим через Δ_1, Δ_2, ..., Δ_s (рис. 123). Пусть A_0, A_1, ..., A_n — вершины симплекса Δ_1. Добавив к ним вершину A, мы получим $n+2$ точки A, A_0, A_1, ..., A_n; через Ξ_1 мы обозначим $(n+1)$-мерный симплекс, вершинами которого являются эти точки. Аналогично, из n-мерных симплексов Δ_2, ..., Δ_s мы получим (добав-

ляя к их вершинам точку A) $(n+1)$-мерные симплексы $\Xi_2, \ldots, \Xi_s$. Мы докажем теперь, что симплексы $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s$ являются искомыми, т. е. они попарно не перекрываются и составляют в совокупности весь многогранник M (рис. 123).

В самом деле, если бы два симплекса Ξ_i и Ξ_j имели общую внутреннюю точку, то общую внутреннюю точку должны были бы иметь и «основания» Δ_i, Δ_j, что, однако, места не имеет. Далее, пусть B—произвольная внутренняя точка многогранника M. Прямая AB, проходящая через внутреннюю точку B многогранника M, пересекает его границу в двух точках. Одной из них является вершина A; вторую обозначим через C. Точка C не может принадлежать n-мерной грани, содержащей вершину A (так как иначе весь отрезок AC лежал бы в этой грани и не содержал бы внутренних точек). Следовательно, точка C принадлежит одной из граней $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, а потому принадлежит одному из симплексов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. Но если точка C принадлежит симплексу Δ_i, то точка B, лежащая на отрезке AC, принадлежит симплексу Ξ_i (рис. 124). Поэтому все внутренние точки многогранника M покрываются симплексами $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s$, откуда и вытекает, что весь многогранник M покрывается этими симплексами. Теорема доказана.

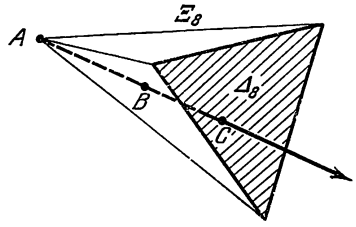


Рис. 124.

5.4. Строение выпуклой оболочки. На стр. 216—218 мы рассмотрели теорему, которая дает описание выпуклой оболочки фигуры на плоскости, т. е. в пространстве двух измерений. Аналогичная теорема справедлива в n-мерном евклидовом пространстве для любого n.

Теорема. *Пусть F—некоторое (замкнутое и ограниченное) тело, расположенное в n-мерном пространстве. Точка M в том и только в том случае принадлежит выпуклой оболочке F^* тела F, если существуют такие $n+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$ тела F и такие $n+1$ неотрицательных чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что*

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1 \text{ и } \overline{OM}=\lambda_0\cdot\overline{OA}_0+\lambda_1\cdot\overline{OA}_1+\ldots+\lambda_n\cdot\overline{OA}_n \qquad (**)$$

(O—произвольная точка n-мерного пространства).

Доказательство. Обозначим через $\tilde{F}$ множество всех точек M, удовлетворяющих соотношению (**) с неотрицательными $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Нетрудно понять, что фигура $\tilde{F}$ целиком содержится в F^*. В самом деле, если точка M удовлетворяет соотношению (*), то она, согласно сформулированной на стр. 241 теореме, принадлежит выпуклой оболочке точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$, а значит, принадлежит телу F^* (ибо выпуклая оболочка точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$ тела F содержится в выпуклой оболочке всего тела F). Иными словами, всякая точка M тела $\tilde{F}$ принадлежит телу F^*, т. е. $\tilde{F}$ содержится в теле F^*.

Докажем, что и, наоборот, тело F^* содержится в $\tilde{F}$. Для этого, очевидно, достаточно установить, что тело $\tilde{F}$ выпукло и содержит F. Если A_0—произвольная точка тела F, то, выбрав точки $A_1, \ldots, A_n$ в теле произвольно, мы можем написать: $\overline{OA}_0=1\cdot\overline{OA}_0+0\cdot\overline{OA}_1+\ldots+0\cdot\overline{OA}_n$, откуда видно, что точка A_0 принадлежит телу $\tilde{F}$. Таким образом, $\tilde{F}$ содержит любую точку тела F, т. е. содержит целиком тело F.

Остается доказать, что тело $\tilde{F}$ выпукло. Пусть M и N—две точки тела $\tilde{F}$; тогда существуют такие точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$; $B_0, B_1, \ldots, B_n$ и

такие неотрицательные числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$; $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, что

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1, \quad \overline{OM}=\lambda_0\cdot\overline{OA}_0+\lambda_1\cdot\overline{OA}_1+\ldots+\lambda_n\cdot\overline{OA}_n;$$
$$\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_n=1, \quad \overline{ON}=\mu_0\cdot\overline{OB}_0+\mu_1\cdot\overline{OB}_1+\ldots+\mu_n\cdot\overline{OB}_n.$$

Обозначим через P выпуклый n-мерный многогранник [1]), представляющий собой выпуклую оболочку точек $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n$. Написанные выше соотношения показывают (в силу теоремы на стр. 241), что обе точки M, N принадлежат многограннику P. Поэтому любая точка L отрезка MN также принадлежит этому выпуклому многограннику. В силу предыдущей теоремы, многогранник P можно разбить на несколько симплексов с вершинами в некоторых из точек $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n$. Точка L принадлежит одному из этих симплексов, скажем, симплексу с вершинами $C_0, C_1, \ldots, C_n$, где каждая из точек C_i совпадает с одной из точек $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n$, и, значит, принадлежит телу F. Так как точка L принадлежит симплексу с вершинами $C_0, C_1, \ldots, C_n$, то найдутся такие неотрицательные числа $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n$, что $\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_n=1$ и $\overline{OL}=\nu_0\cdot\overline{OC_0}+\nu_1\cdot\overline{OC_1}+\ldots+\nu_n\cdot\overline{OC_n}$. Но это и означает, что точка L принадлежит телу $\tilde{F}$. Итак, произвольная точка L отрезка MN принадлежит телу $\tilde{F}$, т. е. это тело выпукло. Этим и завершается доказательство теоремы.

Смысл доказанной теоремы заключается в том, что *для получения выпуклой оболочки F^* тела F, расположенного в n-мерном пространстве, достаточно присоединить к F все n-мерные симплексы с вершинами в точках множества F* (здесь предполагается, что тело F является «существенно n-мерным», т. е. не лежит целиком в одной гиперплоскости). Такое присоединение n-мерных симплексов можно заменить n-кратным присоединением отрезков с концами в точках полученного ранее тела (ср. стр. 217—218).

5.5. Объемы. В заключение рассмотрим вопросы, связанные с измерением объемов и поверхностей n-мерных выпуклых тел. Прежде всего укажем, что понятие *отклонения* $\sigma(F_1, F_2)$ переносится на случай n-мерных выпуклых тел без существенных изменений. Дословно так же, как в двумерном или трехмерном случае, определяется понятие *сходящейся последовательности* выпуклых тел в n-мерном пространстве. Всякое n-мерное выпуклое тело можно представить как предел последовательности выпуклых n-мерных многогранников.

Теперь понятие объема n-мерного выпуклого тела и понятие $(n-1)$-мерного объема его границы (которое обобщает понятия периметра плоской фигуры и площади поверхности трехмерного выпуклого тела) определяются следующим образом. Каждому n-мерному симплексу приписывается определенным образом его n-мерный объем (см. стр. 381—382 этого тома ЭЭМ). Далее, так как всякий n-мерный многогранник M можно разбить на не перекрывающиеся симплексы, то объем многогранника M можно определить как сумму n-мерных объемов составляющих его не перекрывающихся симплексов (при этом можно доказать, что полученная сумма не зависит от способа разбиения многогранника M на симплексы). Итак, понятие n-мерного объема определено для всех n-мерных выпуклых многогранников. Так как граница n-мерного выпуклого многогранника M составляется из конечного числа $(n-1)$-мерных выпуклых многогранников (граней), то, складывая их $(n-1)$-мерные объемы, мы получаем число, называемое $(n-1)$-мерным объемом границы многогранника M.

---

[1]) Может случиться, что многогранник P будет иметь размерность, меньшую чем n (если все точки $A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_n$ лежат в одной гиперплоскости). Дальнейшее доказательство от этого не изменится.

Наконец, для произвольного n-мерного выпуклого тела F его *n-мерный объем* $v(F)$ и *$(n-1)$-мерный объем* его *границы* $s(F)$ определяются с помощью предельного перехода дословно так же, как на стр. 231—233.

Мы не будем формулировать всех свойств этих объемов — они аналогичны тем, которые мы имели при $n=2$ и $n=3$. Отметим лишь, что *если выпуклое тело F' подобно выпуклому n-мерному телу F с коэффициентом подобия k, то n-мерные объемы этих тел и $(n-1)$-мерные объемы их границ связаны соотношениями* $v(F')=k^n\cdot v(F)$, $s(F')=k^{n-1}\cdot s(F)$.

Если, в частности, мы рассмотрим шар радиуса 1 в n-мерном пространстве и обозначим через v_n его n-мерный объем, а через s_n — $(n-1)$-мерный объем его границы, то *для n-мерного шара E_r радиуса r мы получим следующие формулы*: $v(E_r)=v_n\cdot r^n$, $s(E_r)=s_n\cdot r^{n-1}$.

На основании сказанного в этом параграфе можно лишь утверждать, что v_n и s_n — *какие-то* константы, делающие написанные формулы справедливыми для всех n-мерных шаров. Но для *вычисления* этих констант приходится привлекать иные методы, например интегральное исчисление.

Замечательно, что константы v_n и s_n опять-таки выражаются через число π, с которым мы имели дело при вычислении длины окружности и площади круга; однако в выражения этих констант входят степени числа π. А именно,

$$v_{2k}=\frac{1}{k!}\pi^k, \qquad v_{2k+1}=\frac{2^{2k+1}\cdot k!}{(2k+1)!}\pi^k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots);$$

$$s_{2k}=\frac{2}{(k-1)!}\pi^k, \qquad s_{2k+1}=\frac{2^{2k+1}\cdot k!}{(2k)!}\pi^k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Например, объем четырехмерного шара равен $\frac{1}{2}\pi^2r^4$, а трехмерный объем его границы равен $2\pi^2r^3$.

§ 6. Некоторые задачи комбинаторной геометрии

6.1. Теорема Хелли. В заключение мы остановимся на нескольких вопросах, связанных с взаимным расположением нескольких выпуклых фигур или с разбиением выпуклых фигур на части. Это направление в последние годы получило название *комбинаторной геометрии*.

Одна из наиболее ярких теорем комбинаторной геометрии была найдена в 1913 году немецким математиком Э. Хелли (находившимся в то время в лагере для немецких военнопленных в России). Первое доказательство теоремы Хелли было опубликовано в 1921 году австрийцем И. Радоном, который узнал эту теорему от Хелли, второе — немецким математиком Д. Кёнигом (1922 г.), узнавшим эту теорему у Радона, и лишь третье — автором теоремы (см. статью Э. Хелли, входящую в указанный в списке литературы на стр. 268 цикл [9] статей по наглядной геометрии). В настоящее время известны десятки разных доказательств этой замечательной теоремы.

Теорему Хелли мы сформулируем и докажем сначала для выпуклых фигур *на плоскости*, а затем рассмотрим ее для выпуклых тел в *n-мерном пространстве* (см. § 5 настоящей статьи).

Теорема. *Если на плоскости задано конечное число выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая всем этим фигурам.*

Доказательство. Прежде всего установим, что если число фигур равно четырем, то эти фигуры имеют общую точку. В самом деле, пусть F_1, F_2, F_3, F_4 — данные фигуры. Обозначим через A_1 общую точку фигур F_2, F_3, F_4, через A_2 — общую точку фигур F_1, F_3, F_4 и т. д. Рассмотрим четыре полученные точки A_1, A_2, A_3, A_4. При этом могут представиться следующие три случая:

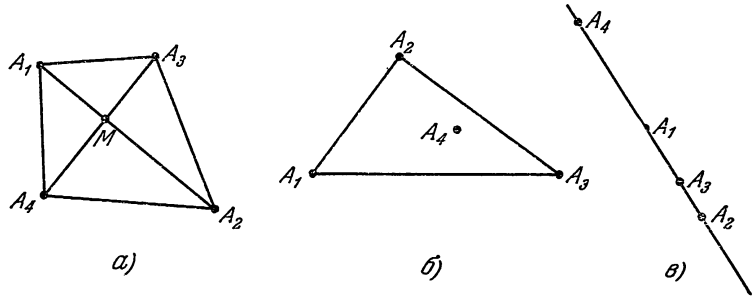


Рис. 125.

1) точки A_1, A_2, A_3, A_4 являются вершинами выпуклого четырехугольника (рис. 125, *а*); 2) три из этих точек, скажем A_1, A_2, A_3, являются вершинами треугольника, а четвертая точка лежит внутри или на стороне этого треугольника (рис. 125, *б*); 3) все четыре точки лежат на одной прямой (рис. 125, *в*).

В случае 1) обозначим через M точку пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4. Так как точки A_2, A_3, A_4 принадлежат фигуре F_1, то весь треугольник $A_2A_3A_4$ принадлежит этой фигуре, а следовательно, и точка M, лежащая на одной из сторон этого треугольника, принадлежит фигуре F_1. Точно так же показывается, что точка M принадлежит каждой из фигур F_2, F_3, F_4, т. е. все четыре фигуры F_1, F_2, F_3, F_4 имеют общую точку M.

В случае 2) точки A_1, A_2, A_3 принадлежат фигуре F_4. Поэтому весь треугольник $A_1A_2A_3$ принадлежит этой фигуре, а значит, и точка A_4 принадлежит фигуре F_4. Кроме того, по определению, точка A_4 принадлежит каждой из фигур F_1, F_2, F_3. Таким образом, все четыре фигуры F_1, F_2, F_3, F_4 имеют общую точку A_4.

Наконец, в случае 3) две точки, скажем A_1 и A_3, лежат на отрезке с концами в двух других точках. Легко видеть, что точка A_1 (или A_3) принадлежит в этом случае всем четырем фигурам.

Далее проведем индукцию по числу рассматриваемых фигур. Пусть теорема уже доказана для m фигур, где $m \geqslant 4$. Докажем,

что она справедлива для $m+1$ фигур $F_1, F_2, \ldots, F_m, F_{m+1}$. Обозначим через Φ_1 пересечение фигур F_1 и F_{m+1} (рис. 126), через Φ_2 — пересечение фигур F_2 и F_{m+1} и т. д. Мы получаем m фигур $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$, причем каждые т р и из них имеют общую точку (например, Φ_1, Φ_2, Φ_3 имеют общую точку, ибо, в силу доказанного выше, четыре фигуры F_1, F_2, F_3 и F_{m+1} имеют общую точку). По предположению индукции, существует точка M, принадлежащая всем фигурам $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$. Ясно, что эта точка M принадлежит всем фигурам $F_1, F_2, \ldots, F_m, F_{m+1}$. Теорема доказана.

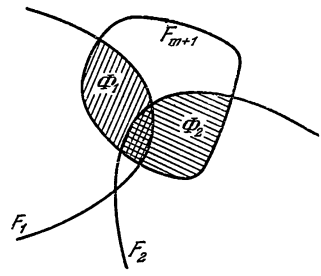


Рис. 126.

В проведенном доказательстве (а именно, при доказательстве теоремы для случая ч е т ы р е х фигур) существенно использовалась выпуклость. Для невыпуклых фигур теорема уже не будет справедливой: например, на рис. 127 изображены четыре фигуры, каждые три из которых имеют общую точку; однако все эти фигуры общей точки не имеют.

Пусть теперь на плоскости дано б е с к о н е ч н о м н о г о выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку. В силу доказанной теоремы, любое конечное число этих фигур имеет общую часть (которая может состоять из одной точки). Однако, вообще говоря, отсюда еще не следует, что все заданные фигуры имеют общую точку. Рассмотрим, например, совокупность всех «верхних полуплоскостей», ограниченных снизу всевозможными горизонтальными прямыми. Каждые три такие полуплоскости имеют общую часть (рис. 128); любое конечное число полуплоскостей также имеет

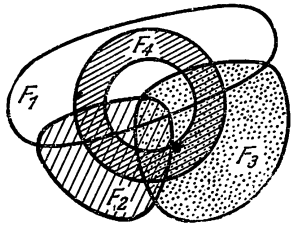


Рис. 127.

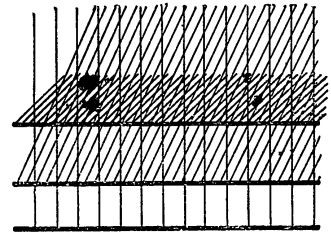


Рис. 128.

общую часть. Но если мы будем присоединять к какой-либо совокупности таких полуплоскостей полуплоскости, расположенные все выше и выше, то эта общая часть будет все более и более удаляться вверх, так что всякая точка плоскости останется, в конце концов, вне общей части полуплоскостей. Таким образом, не существует

точки, которая принадлежала бы всем верхним полуплоскостям одновременно.

Однако, если хотя бы одна из рассматриваемых фигур ограничена, то при присоединении все новых и новых фигур к некоторой их совокупности общая часть не сможет «уходить в бесконечность»: она все время будет оставаться в ограниченной части плоскости. Таким образом, теорема Хелли остается справедливой и для бесконечного числа (замкнутых) выпуклых фигур, если хотя бы одна из фигур ограничена.

В n-мерном евклидовом пространстве теорема Хелли формулируется следующим образом:

Теорема. *Если в n-мерном евклидовом пространстве задано конечное число выпуклых тел, каждые $n+1$ из которых имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая всем этим телам.*

Доказательство. Предположим прежде всего, что мы имеем $n+2$ тела $F_1, F_2, \ldots, F_{n+2}$. Выберем какую-нибудь общую точку, принадлежащую всем рассматриваемым телам, кроме F_i, и обозначим ее через A_i (здесь i может быть равно 1, 2, ..., $n+2$). Мы получаем $n+2$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$. Рассмотрим векторы $e_1=\overline{A_{n+2}A_1}$, $e_2=\overline{A_{n+2}A_2}$, ..., $e_{n+1}=\overline{A_{n+2}A_{n+1}}$. Поскольку эти $n+1$ векторов расположены в n-мерном пространстве, они линейно зависимы, т. е. существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ (не все равные нулю), что $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_{n+1}e_{n+1}=0$. Выберем теперь в n-мерном пространстве какую-либо точку O и обозначим векторы $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \ldots, \overline{OA_{n+1}}, \overline{OA_{n+2}}$ через $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}, r_{n+2}$. Тогда, очевидно,

$$e_1=\overline{A_{n+2}A_1}=\overline{OA}_1-\overline{OA}_{n+2}=r_1-r_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots$$
$$e_{n+1}=\overline{A_{n+2}A_{n+1}}=\overline{OA}_{n+1}-\overline{OA}_{n+2}=r_{n+1}-r_{n+2}.$$

Поэтому написанное выше соотношение можно переписать в виде $\alpha_1(r_1-r_{n+2})+\alpha_2(r_2-r_{n-2})+\ldots+\alpha_{n+1}(r_{n+1}-r_{n+2})=0$, или $\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+\ldots$ $\ldots+\alpha_{n+1}r_{n+1}-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+1})\,r_{n+2}=0$. Иначе говоря, имеет место соотношение $\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+\ldots+\alpha_{n+1}r_{n+1}+\alpha_{n+2}r_{n+2}=0$ (где $\alpha_{n+2}=-(\alpha_1+$ $+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+1})$, причем среди коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}$ имеются отличные от нуля, а сумма всех этих коэффициентов равна нулю.

Перенесем теперь в последнем соотношении в правую часть все члены, у которых коэффициенты отрицательны. Пусть для определенности $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0, \ldots, \alpha_k\geqslant 0$, а дальнейшие коэффициенты отрицательны, так что мы получим соотношение $\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+\ldots+\alpha_k r_k=(-\alpha_{k+1})\,r_{k+1}+\ldots$ $\ldots+(-\alpha_{n+2})\,r_{n+2}$, где все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, (-\alpha_{k+1}), \ldots, (-\alpha_{n+2})$ неотрицательны и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=(-\alpha_{k+1})+\ldots+(-\alpha_{n+2})$. Так как число $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ положительно, то обе части последнего векторного равенства можно разделить на это число. Мы получим соотношение $\beta_1 r_1+\beta_2 r_2+\ldots+\beta_k r_k=\beta_{k+1}r_{k+1}+\ldots+\beta_{n+2}r_{n+2}$ или $\beta_1\cdot\overline{OA}_1+\ldots$ $\ldots+\beta_k\cdot\overline{OA}_k=\beta_{k+1}\cdot\overline{OA}_{k+1}+\ldots+\beta_{n+2}\cdot\overline{OA}_{n+2}$ $\left(\text{где } \beta_1=\frac{\alpha_1}{\gamma}, \ldots, \beta_k=\frac{\alpha_k}{\gamma};\right.$ $\left.\beta_{k+1}=\frac{-\alpha_{k+1}}{\gamma}, \ldots, \beta_{n+2}=\frac{-\alpha_{n+2}}{\gamma}\right)$. Ясно, что все коэффициенты $\beta_1, \ldots$ $\ldots\ \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_{n+2}$ неотрицательны и

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k=\beta_{k+1}+\ldots+\beta_{n+2}=1.$$

Пусть M—такая точка, что $\overrightarrow{OM}=\beta_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\beta_k\cdot\overrightarrow{OA_k}=\beta_{k+1}\cdot\overrightarrow{OA_{k+1}}+\ldots$ $\ldots+\beta_{n+2}\cdot\overrightarrow{OA_{n+2}}$. Тогда, в силу теоремы на стр. 241, точка M принадлежит выпуклой оболочке точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и, кроме того, она принадлежит выпуклой оболочке точек $A_{k+1}, \ldots, A_{n+2}$. Но каждое из (выпуклых!) тел $F_{k+1}, \ldots, F_{n+2}$ содержит все точки $A_1, A_2, \ldots, A_k$, а значит, и точку M; каждое из тел $F_1, \ldots, F_k$ содержит все точки $A_{k+1}, \ldots, A_{n+2}$, а значит, и точку M. Таким образом, все тела $F_1, F_2, \ldots, F_{n+2}$ содержат общую точку M.

Далее проведем индукцию по числу рассматриваемых тел. Пусть теорема уже доказана для m тел, где $m\geqslant n+2$. Докажем, что она справедлива и для $m+1$ тел $F_1, F_2, \ldots, F_{m+1}$. Пересечение тел F_i и F_{m+1} обозначим через Φ_i $(i=1, \ldots, m)$. Мы получаем m тел $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$, каждые $n+1$ из которых имеют общую точку; следовательно, и все эти тела имеют общую точку. Но это означает, что существует точка, принадлежащая всем телам $F_1, F_2, \ldots, F_{m+1}$. Теорема доказана.

6.2. Чебышевские приближения. Теорема Хелли имеет много интересных приложений как в геометрии, так и в других областях математики. В статье «Геометрические задачи на максимум и минимум» читатель найдет две красивые геометрические теоремы (теорема Юнга и теорема Бляшке), которые доказываются с помощью теоремы Хелли. Много научных работ, посвященных различным обобщениям и приложениям теоремы Хелли, продолжает появляться и в настоящее время.

Здесь мы рассмотрим применение теоремы Хелли для вывода классических результатов выдающегося русского математика П. Л. Чебышева о приближении функций многочленами.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма. *Если m параллельных между собой отрезков на плоскости обладают тем свойством, что каждые три из них можно пересечь одной прямой, то существует прямая, пересекающая все эти отрезки. Аналогичное утверждение справедливо и для бесконечного числа параллельных отрезков, если только все они расположены в ограниченном куске плоскости.*

Доказательство. Введем в плоскости прямоугольную систему координат x, y, ось ординат которой параллельна заданным отрезкам. Пусть концами i-го отрезка являются точки

$$M_i'(x_i, y_i') \quad \text{и} \quad M_i''(x_i, y_i''), \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Если прямая l, имеющая уравнение $y=kx+b$, пересекает i-й отрезок (рис. 129), то точка (x_i, y_i') находится ниже этой прямой (или на самой прямой), а точка (x_i, y_i'') выше ее, и потому $y_i'\leqslant kx_i+b$, $y_i''\geqslant kx_i+b$.

Обозначим через L точку с координатами (k, b). Рассмотрим уравнение $y_i'=xx_i+y$ (т. е. $y=-x_ix+y_i'$). Оно определяет на

плоскости (x, y) некоторую прямую m_i' (рис. 130), и соотношение $y_i' \leqslant kx_i + b$ (т. е. $b \geqslant -x_i \cdot k + y_i'$) показывает, что точка L расположена выше этой линии (или на ней). Точно так же уравнение $y_i'' = xx_i + y$ определяет прямую m_i'', параллельную m_i', и соотношение $y_i'' \geqslant kx_i + b$ показывает, что точка L расположена ниже прямой m_i'' (или на ней). Иными словами, точка L расположена в полосе P_i между параллельными прямыми m_i' и m_i'' (рис. 130).

Так как, по предположению, для каждых трех отрезков существует пересекающая их прямая (очевидно, не параллельная оси ординат, т. е. имеющая уравнение $y = kx + b$), то *каждые три из*

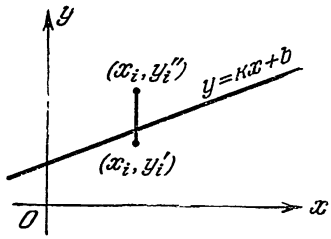


Рис. 129.

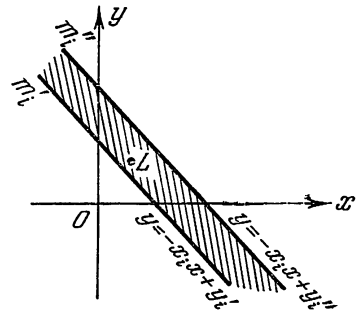


Рис. 130.

полос $P_1, P_2, \ldots, P_m$, *отвечающих нашим* m *отрезкам, имеют хотя бы одну общую точку* L. Далее, так как полосы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ являются выпуклыми фигурами, то, в силу теоремы Хелли, все полосы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ имеют некоторую общую точку L_0 с координатами (k_0, b_0). Но это означает, что прямая l_0, имеющая уравнение $y = k_0x + b_0$, пересекает все рассмотренные отрезки.

Для случая бесконечного множества отрезков проходит то же самое утверждение. Достаточно лишь заметить, что полосы, соответствующие различным отрезкам, не параллельны (ибо у двух различных отрезков абсциссы различны, а именно абсцисса точек отрезка, взятая с обратным знаком, является угловым коэффициентом прямых, ограничивающих соответствующую полосу). Поэтому уже две различные полосы имеют ограниченное пересечение, а в таком случае теорема Хелли применима и к бесконечному числу неограниченных фигур (ср. стр. 250). Лемма доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению чебышевских приближений. Говорят, что *прямая* $y = kx + b$ *приближает функцию* $y = f(x)$ *на отрезке* $p \leqslant x \leqslant q$ *с точностью до* ε, *если для любого* x *на этом отрезке справедливо неравенство* $|f(x) - (kx + b)| \leqslant \varepsilon$ (рис. 131). Далее, мы будем говорить, что прямая $y = kx + b$ при-

ближает функцию $y=f(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с точностью до ε, если абсолютная величина разности $f(x)-(kx+b)$ не превосходит ε при каждом из значений $x=x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Из доказанной выше леммы вытекает, что *если для каждых трех точек, взятых из отрезка* $p\leqslant x\leqslant q$, *существует прямая, приближающая в этих точках функцию* $f(x)$ *с точностью до* ε, *то существует также прямая, приближающая функцию* $f(x)$ *на всем отрезке* $p\leqslant x\leqslant q$ *с той же точностью*. В самом деле, если прямая $y=kx+b$ приближает функцию $y=f(x)$ на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$ с точностью до ε, то она пересекает каждый из отрезков с концами $(x, f(x)+\varepsilon)$ и $(x, f(x)-\varepsilon)$, где $p\leqslant x\leqslant q$. Но мы знаем, что для того, чтобы существовала такая прямая, достаточно, чтобы существовала прямая, пересекающая каждые три из этих отрезков.

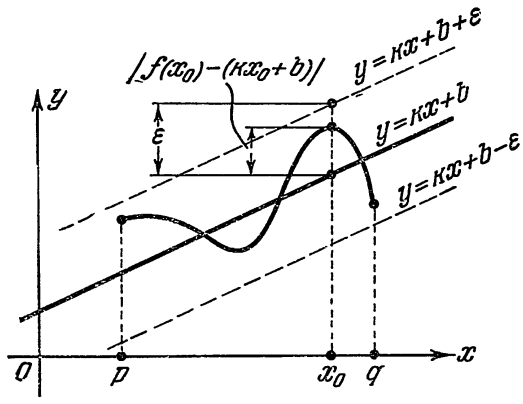


Рис. 131.

Этот результат позволяет сделать некоторые заключения о поведении прямой, «наилучшим образом» приближающей функцию $f(x)$ на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$. Обозначим через ε_0 *наименьшее* из положительных чисел ε, для которых существует прямая, приближающая функцию $f(x)$ на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$ с точностью до ε. (Нетрудно доказать, что такое наименьшее число обязательно должно существовать.) Прямую, которая приближает функцию $f(x)$ на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$ с точностью до ε_0, назовем *наилучшим линейным приближением* функции $f(x)$ на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$. Из сказанного выше можно заключить, что если прямая l с уравнением $y=kx+b$ является наилучшим линейным приближением функции $f(x)$ на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$, то для любого положительного числа $\varepsilon<\varepsilon_0$ найдутся такие три точки x', x'', x''' на рассматриваемом отрезке, что не существует прямой, приближающей функцию $f(x)$ в этих точках с точностью до ε. Более того, *существуют такие три точки* x', x'', x''', *что никакая прямая не может приближать функцию* $f(x)$ *в этих трех точках лучше, чем прямая* l (которая приближает $f(x)$ с точностью до ε_0).

Выберем такие три точки x', x'', x''', и пусть для определенности они расположены на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$ в следующем порядке: $p\leqslant x'<x''<x'''\leqslant q$. Из сказанного выше вытекает, как мы сейчас

покажем, что справедливы равенства

$$|f(x')-(kx'+b)|=|f(x'')-(kx''+b)|=$$
$$=|f(x''')-(kx'''+b)|=\varepsilon_0, \quad (*)$$

причем знаки разностей $f(x')-(kx'+b)$, $f(x'')-(kx''+b)$, $f(x''')-(kx'''+b)$ чередуются, т. е. первая и третья разности имеют один и тот же знак, а вторая — противоположный знак (рис. 132). В самом деле, если бы соотношения (*) не выполнялись, например, если бы мы имели $|f(x')-(kx'+b)|=|f(x'')-(kx''+b)|=\varepsilon_0$, $|f(x''')-(kx'''+b)|<\varepsilon_0$, то при совпадении знаков разностей $f(x')-(kx'+b)$ и $f(x'')-(kx''+b)$ мы могли бы найти прямую, лучше приближающую $f(x)$, чем l, сдвигая прямую параллельно самой себе (рис. 133,*а*). В случае же несовпадения знаков этих разностей мы могли бы получить лучшее приближение функции $f(x)$ в точках x', x'', x''', поворачивая прямую l вокруг лежащей на ней точки с абсциссой

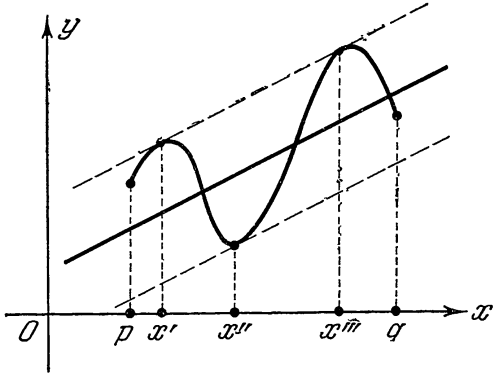


Рис. 132

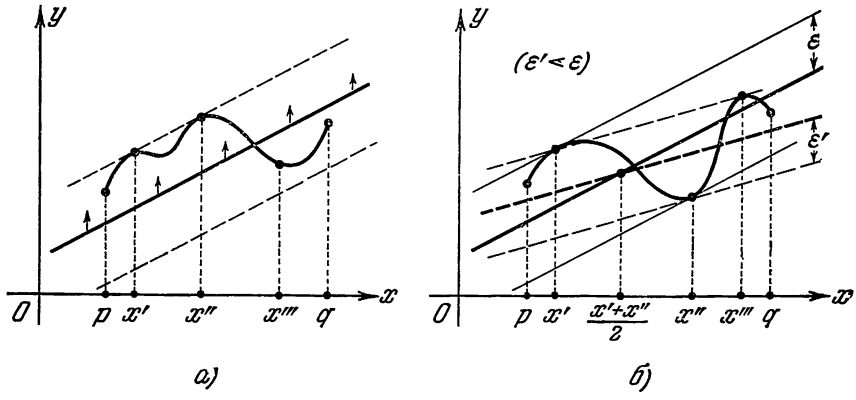


Рис. 133.

$\frac{x'+x''}{2}$ (рис. 133, *б*). Еще проще показать, что две или три из величин $|f(x)-(kx+b)|$ в точках x', x'', x''' не могут быть меньше ε_0. Аналогично можно показать и то, что знаки разностей $f(x')-(kx'+b)$, $f(x'')-(kx''+b)$, $f(x''')-(kx'''+b)$ должны чередоваться.

Полученные факты могут помочь при оценке величины ε_0 (которая показывает, насколько хорошо функция $f(x)$ может быть приближена прямой линией) и при нахождении наилучшего линейного приближения $y=kx+b$. Очевидно, что для нахождения прямой $y=kx+b$, которая дает наилучшее приближение функции $y=f(x)$ в трех заданных точках x', x'', x''' (где $p\leqslant x'<x''<x'''\leqslant q$), достаточно решить следующую систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными k, b и ε:

$$\left.\begin{aligned} f(x') &= kx'+b+\varepsilon,\\ f(x'') &= kx''+b-\varepsilon,\\ f(x''') &= kx'''+b+\varepsilon \end{aligned}\right\}$$

(здесь ε может быть положительным или отрицательным). Абсолютное значение числа ε, найденного из этой системы (для каких-то заданных точек x', x'', x'''), дает оценку искомой величины ε_0, а именно $\varepsilon_0\geqslant|\varepsilon|$. Искомая величина ε_0 совпадает с *наибольшим значением*, которое может принять $|\varepsilon|$ при всевозможном выборе трех точек x', x'', x'''. Если мы сумеем найти три точки x', x'', x''', соответствующие наибольшему значению $|\varepsilon|$, то из указанной выше системы мы найдем также коэффициенты k и b, определяющие прямую l, являющуюся наилучшим линейным приближением функции $y=f(x)$.

Аналогичным образом можно получить более общие результаты, касающиеся приближения некоторой функции *многочленами* произвольной степени. Так, например, чтобы найти параболу $y=ax^2+bx+c$, наилучшим образом приближающую функцию $y=f(x)$ на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$ («наилучшее квадратичное приближение»), нужно искать параболы, которые наилучшим образом приближают функцию во всевозможных четверках точек отрезка. Именно, если парабола $y=ax^2+bx+c$ является *наилучшим квадратичным приближением* функции $y=f(x)$ (т. е. $|f(x)-(ax^2+bx+c)|\leqslant\varepsilon_0$ при $p\leqslant x\leqslant q$, но не существует параболы $y=a_1x^2+b_1x+c_1$, для которой $|f(x)-(a_1x^2+b_1x+c_1)|<\varepsilon_0$ при $p\leqslant x\leqslant q$), то найдутся на отрезке $p\leqslant x\leqslant q$ такие четыре точки x', x'', x''', x'''' (где $p\leqslant x'<x''<x'''<x''''\leqslant q$), что разность $f(x)-(ax^2+bx+c)$ принимает при $x=x'$, x'', x''', x'''' значения, равные ε_0 по абсолютной величине и имеющие чередующиеся знаки (рис. 134).

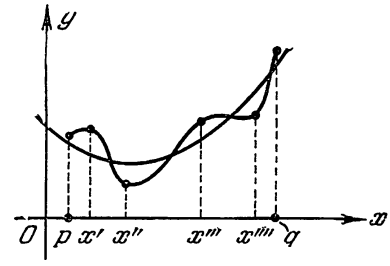


Рис 134.

Этот результат вытекает из следующего предложения, доказываемого аналогично лемме на стр. 251 с применением теоремы Хелли для выпуклых тел в $(n+1)$-мерном пространстве: *если каждые* $n+2$ *из* m *рассматриваемых вертикальных отрезков можно пересечь параболой* n*-й степени* (т. е. графиком функции $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$; в нашем случае следует положить $n=2$), *то существует парабола* n*-й степени, пересекающая все рассматриваемые отрезки.*

6.3. Теорема Минковского. Последующие два пункта посвящены вопросам, связанным с расположением фигур и тел относительно целочисленной решетки. Для случая плоскости представление о такой решетке может доставить листок бумаги «в клетку», вроде тех, которые встречаются в ученических тетрадях. Плоскую решетку можно определить как множество точек, имеющих в некоторой прямоугольной декартовой системе координат целочисленные координаты (рис. 135); с этим обстоятельством и связано название «целочисленная решетка». Таким образом, если считать решетку

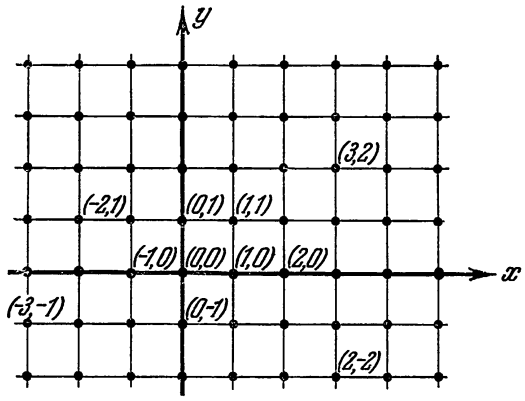


Рис. 135.

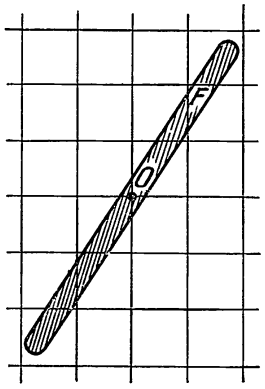


Рис. 136.

образованной узлами, в которых пересекаются горизонтальные и вертикальные линии, нанесенные на листке, вырванном из тетради «в клетку», то придется считать, что за единицу измерения принята сторона нанесенных на листке квадратиков («квадратов решетки», как мы будем говорить впоследствии). Подобную (только уже кубическую) решетку можно себе представить и в пространстве [1]). Точечные решетки такого рода играют значительную роль в современной математике — как в «чистой» (теория чисел), так и в «прикладной» (математическая кристаллография).

Самая важная теорема, касающаяся расположения выпуклых фигур и тел относительно целочисленной решетки, была установлена знаменитым немецким математиком Г. Минковским. Мы сформулируем и докажем ее для случая плоскости.

Теорема. *Пусть на плоскости, на которой задана целочисленная решетка, имеется центрально-симметричная выпуклая фигура F, центр O которой совпадает с узлом решетки* (рис. 136).

---

[1]) Более того, и в n-мерном евклидовом пространстве можно задать решетку, образованную вершинами равных между собой n-мерных кубов, полностью покрывающих пространство.

Если при этом внутри фигуры F нет отличных от O узлов решетки, то ее площадь не превосходит 4 (напоминаем, что за единицу площади принимается площадь квадрата решетки).

Доказательство. Рассмотрим всевозможные узлы решетки, расстояния которых от проходящих через точку O сторон l и m квадратов решетки выражаются четными числами. Построим все

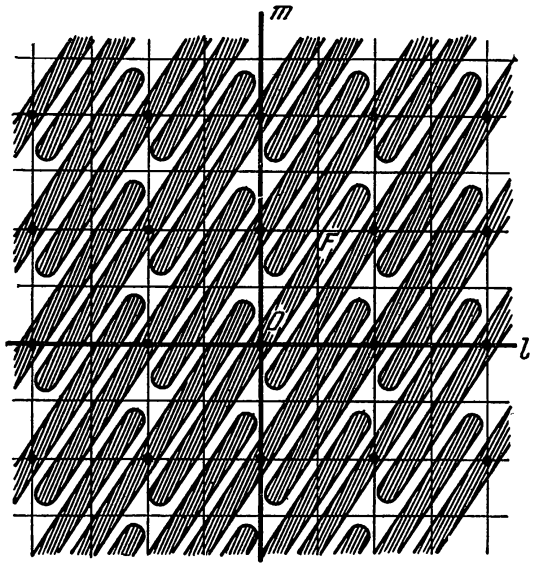


Рис. 137.

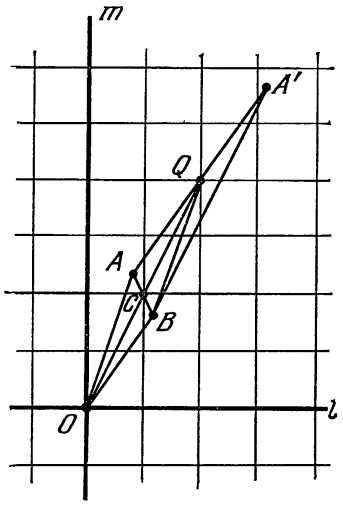


Рис. 138.

фигуры, равные F и параллельно F расположенные (т. е. получающиеся из F параллельным переносом), центрами которых служат эти точки (рис. 137).

Мы утверждаем, что *ни одна из этих фигур не пересечет фигуры* F. В самом деле, допустим, что фигура F_Q с центром в точке Q пересекает фигуру F; пусть A есть какая-то общая внутренняя точка этих двух фигур (рис. 138). Обозначим через A' точку фигуры F_Q, симметричную точке A относительно центра симметрии Q этой фигуры. Фигура F получается из фигуры F_Q параллельным переносом на вектор $\overline{QO}$; следовательно, точке A' фигуры F_Q отвечает такая точка B фигуры F, что $\overline{A'B}=\overline{QO}$. При этом четырехугольник $A'BOQ$ будет параллелограммом, и поэтому $\overline{A'Q}=\overline{BO}$; но в таком случае также имеем $\overline{QA}=\overline{BO}$. А последнее означает, что четырехугольник $QBOA$ — тоже параллелограмм; следовательно, середина C его диагонали QO является также серединой диагонали AB. Но так как A и B — две внутренние точки выпуклой фигуры F, то весь отрезок AB состоит из внутренних точек этой фигуры (ср.

выше, стр. 186); значит, и точка C является внутренней точкой фигуры F. Ясно, что расстояния от точки C до сторон l и m проходящих через O квадратов решетки ровно вдвое меньше расстояний до этих сторон от точки Q; а так как расстояния от Q до l и до m по условию четны, то расстояния от C до l и до m выражаются целыми числами, т. е. точка C является узлом решетки. Таким образом, если бы какая-либо из рассматриваемых фигур пересекала фигуру F, то F обязательно содержала бы внутри отличный от O узел C решетки, что, однако, противоречит условию теоремы.

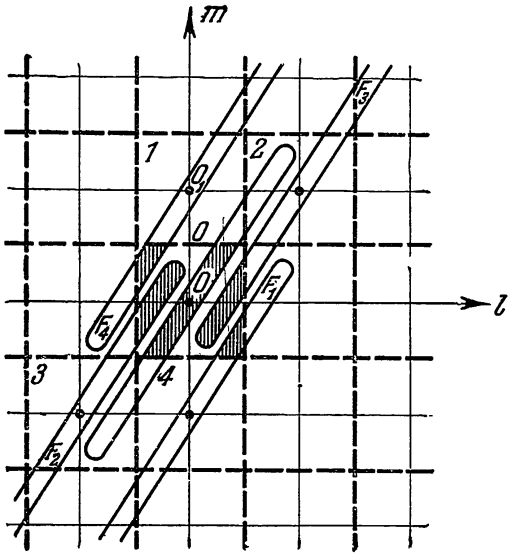


Рис. 139.

Рассмотрим теперь прямые, расстояния которых от прямых l и m выражаются целыми нечетными числами (на рис. 139 эти прямые обозначены пунктиром). Эти прямые образуют на плоскости решетку из более крупных квадратов, площади которых равны 4. Фигура F может пересекаться с рядом из этих квадратов; так, на рис. 139 она пересекается с квадратами, помеченными номерами *0* (это есть квадрат с центром O), *1*, *2*, *3* и *4*. Перенесем теперь параллельно фигуру F на вектор $\overrightarrow{O_1O}$, где O_1 — центр квадрата *1*. Так как расстояния от O_1 до прямых l и m, очевидно, четные, то фигура F совместится при этом с одной из рассмотренных выше фигур; обозначим эту фигуру через F_1 (заметим, что центр фигуры F_1 не совпадает с центром квадрата *1*). В частности, кусок фигуры F, расположенный внутри квадрата *1*, совместится с куском фигуры F_1, расположенным внутри квадрата *0* (ибо квадрат *1* перейдет в квадрат *0*, а фигура F — в фигуру F_1). Таким образом, мы видим, что *среди рассмотренных нами фигур найдется такая фигура* F_1, *что кусок этой фигуры, расположенный внутри квадрата 0, равен куску фигуры* F, *расположенному внутри квадрата 1*. Точно так же показывается, что существуют такие фигуры F_2, F_3 и F_4, куски которых, расположенные внутри квадрата *0*, равны соответственно кускам фигуры F, расположенным внутри квадратов *2*, *3* и *4*. Отсюда следует, что *общая площадь всех тех кусков рассматриваемых фигур, которые помещаются внутри квадрата 0, в точности*

равна площади фигуры F. А так как наши фигуры, по доказанному выше, не пересекаются между собой, то площадь всех этих кусков — а значит, и площадь фигуры F! — не может быть больше площади квадрата 0, т. е. 4. Это рассуждение и завершает доказательство теоремы.

Ясно, что площадь рассматриваемой фигуры F может быть равна 4, — чтобы убедиться в этом достаточно предположить, что F совпадает с квадратом 0.

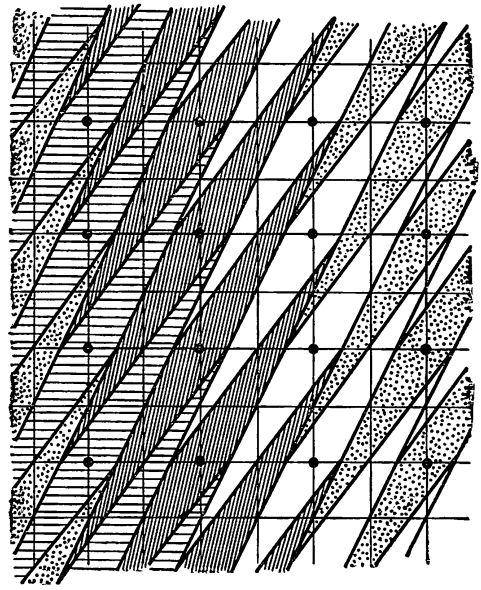


Рис. 140.

Из доказательства теоремы следует, что *для того, чтобы площадь рассматриваемой фигуры F была равна 4, необходимо и достаточно*, чтобы куски рассматриваемых фигур полностью заполняли квадрат 0, или, поскольку картина, наблюдаемая в любом другом из наших «больших» квадратов, полностью подобна картине, наблюдаемой в квадрате 0, — *чтобы рассматриваемые фигуры полностью (т. е. без пробелов) покрывали всю плоскость* (рис. 140). Из теоремы Минковского следует также, что *всякая центрально-симметричная фигура F, центр которой совпадает с узлом O решетки, имеющая площадь, большую четырех, обязательно содержит внутри себя отличные от O узлы решетки* (в силу центральной симметрии фигуры F мы можем быть даже уверены, что эта фигура содержит внутри себя минимум д в а симметричных относительно O отличных от O узла).

Аналогично этому можно доказать, что *объем центрально-симметричного выпуклого тела с центром в узле O трехмерной целочисленной решетки, не содержащего отличных от O узлов решетки, не превосходит* 8 [1]).

В качестве примера использования теоремы Минковского рассмотрим следующую задачу. *Предположим, что имеется круглый сад радиуса* 50, *деревья в котором расположены в узлах целочисленной решетки; в центре сада расположена беседка B* (рис. 141). *Пока деревья* (которые мы считаем

[1]) Для n-мерного пространства такое тело будет иметь n-мерный объем, не превосходящий 2^n.

круглыми и имеющими одинаковую толщину) *достаточно тонки, они не будут заслонять вид из беседки* (т. е. будут существовать проведенные из центра сада лучи, не задевающие ни одного из деревьев); *однако когда деревья вырастут, они полностью заслонят вид из беседки. Требуется оценить наименьшую толщину деревьев, при которой вид будет полностью заслонен.*

Докажем прежде всего, что *если радиус* ρ *деревьев превосходит* $1/50=0{,}02$, *то вид из беседки будет полностью заслонен.* Проведем из центра B сада

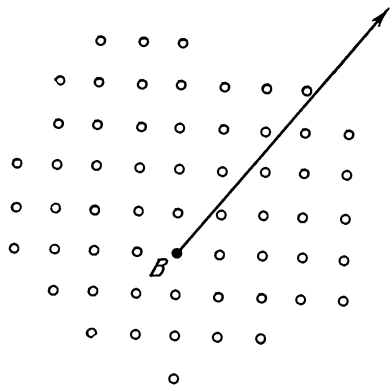


Рис. 141.

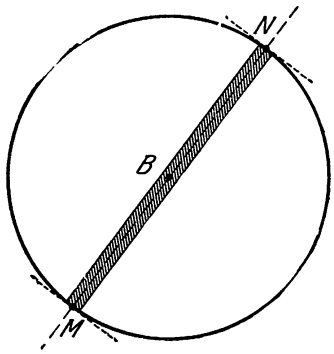


Рис. 142.

произвольную прямую MN, пересекающую границу сада в точках M и N, и покажем, что ни в направлении BM, ни в направлении BN наблюдатель из беседки не увидит просвета. Проведем касательные к ограничивающей сад окружности в точках M и N и две прямые, параллельные MN и отстоящие на расстоянии ρ от этой прямой (рис. 142). Мы получим прямоугольник, площадь которого равна $100\cdot 2\rho=4\cdot 50\rho$, т. е. больше 4 (так как $\rho>1/50$). В силу теоремы Минковского, отсюда вытекает, что внутри прямоугольника имеются два симметричные относительно беседки B узла P и Q решетки, образованной центрами деревьев. Растущие в этих двух точках деревья радиуса ρ обязательно пересекут лучи BM и BN, откуда и следует, что наблюдатель не увидит просвета ни в направлении BM, ни в направлении BN.

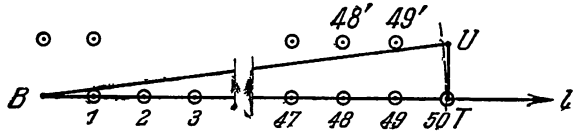


Рис. 143.

Покажем, теперь, что *если* $\rho<\dfrac{1}{\sqrt{2501}}\left(\approx\dfrac{1}{50{,}01}\approx 0{,}0199996\right)$, *то просветы обязательно будут существовать.* Пусть l — проходящая через центр сада прямая решетки квадратов, T — точка пересечения этой прямой с границей сада, TU — отрезок касательной к границе сада в точке T, имеющий длину 1 (рис. 143). Ясно, что точка U лежит вне сада и является ближайшим к T узлом нашей решетки; далее $BU=\sqrt{BT^2+TU^2}=\sqrt{50^2+1^2}=\sqrt{2501}$. Но если r — радиус окружности с центром в ближайшем к B узле l решетки, касающейся луча BU, то, в силу подобия прямоугольных

треугольников с острым углом B и катетами r и TU, $\frac{r}{B1}=\frac{TU}{BU}$, т. е. $r=B1\cdot\frac{TU}{BU}=1\frac{1}{\sqrt{2501}}=\frac{1}{\sqrt{2501}}$. Тому же равен радиус r окружности с центром в ближайшем к U узле 49′ решетки, касающейся BU. А так как о радиусах ρ деревьев мы знаем, что $\rho<\frac{1}{\sqrt{2501}}=r$, то луч BU не заденет ни одного дерева, т. е. вид в направлении луча BU ничем не будет заслонен.

6.4. Теорема Блихфельда. Теорема Минковского утверждает, что если центр выпуклой фигуры F, площадь которой превосходит 4, совпадает с узлом O целочисленной решетки, то эта фигура содержит внутри себя и отличные от O узлы. Если же центр фигуры F не совпадает с узлом решетки, то фигура F сколь угодно большой площади может не содержать внутри себя ни одного узла,— для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть узкий прямоугольник, расположенный между соседними параллельными прямыми, образованными сторонами квадратов решетки (рис. 144).

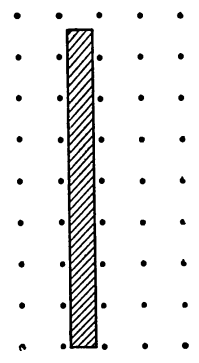


Рис. 144.

Это обстоятельство делает интересной следующую теорему Блихфельда:

Теорема. *Если площадь фигуры F* (может быть невыпуклой!) *больше целого числа n, то эту фигуру можно сдвинуть* (т. е. параллельно перенести) *так, чтобы она покрыла не менее $n+1$ узлов решетки.*

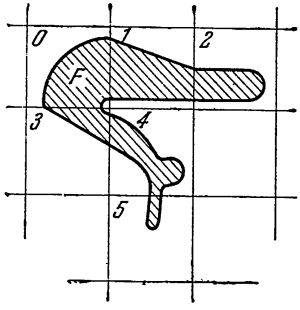


Рис. 145.

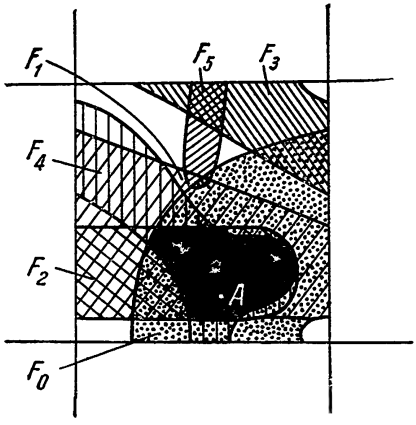


Рис. 146.

Доказательство. Разобьем фигуру F на части, расположенные в отдельных квадратах нашей решетки; так, на рис. 145 фигура F имеет части, расположенные в квадратах, помеченных

числами *0*, *1*, *2*, *3*, *4* и *5*. Перенесем теперь параллельно квадраты *1*, *2*, *3*, *4* и *5* так, чтобы они совпали с квадратом *0*; при этом квадрат *0* окажется покрытым частями F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 и F_5 фигуры F (рис. 146). Так как общая площадь всех этих частей (равная площади фигуры F) превосходит n, то ясно, что квадрат *0* покрыт этими частями более чем n-кратно, т. е. что существует такая точка A квадрата *0*, которая покрыта $n+1$ из наших частей. На рис. 146, где $n=3$, часть квадрата, покрытая четырьмя фигурами (F_0, F_1, F_2, F_4), залита черным, а внутри этой части показана белая точка A. Проткнем теперь все наши квадраты, наложенные на квадрат *0*, в точке A иглой. При этом будут отмечены $n+1$ точек фигуры F, расположенных внутри всех квадратов *0*, *1*, *2*, *3*, *4* и *5*, принадлежащих соответствующим частям фигуры F (см. рис. 147, где $n=3$). В первоначальном положении квадратов *1*, *2*, *3*, *4* и *5* эти точки отвечают точкам, принадлежащим фигуре F и получаемым из точки A параллельным переносом, переводящим квадрат *0* в соответствующий квадрат. Поэтому если мы сдвинем фигуру так, чтобы точка A совпала с узлом решетки, то и все эти точки совпадут с некоторыми узлами решетки, что и доказывает теорему.

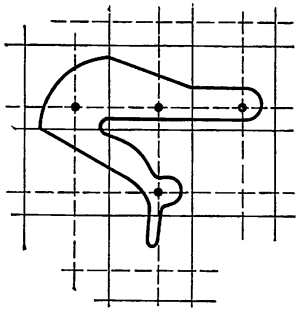


Рис. 147.

Следствие. *Если площадь фигуры F меньше* 1, *то ее можно сдвинуть так, чтобы фигура F не покрыла ни одного узла решетки.*

Доказательство. Обозначим через K квадрат $ABCD$ с (достаточно большой) стороной целой длины n, заключающий внутри себя фигуру F. Пусть при этом стороны квадрата K параллельны сторонам квадратов решетки (рис. 148). Ясно, что внутри K не может заключаться более n^2 узлов решетки: в самом деле, не более n из прямых, на которых расположены параллельные AB стороны квадратов решетки, могут проходить внутри K и каждая такая прямая содержит не более n узлов решетки, являющихся внутренними точками квадрата K. Обозначим теперь через $\overline{F}$ фигуру, получаемую из квадрата K, если вырезать из него фигуру F (на рис. 148 фигура $\overline{F}$ заштрихована). Так как площадь квадрата K равна n^2, а площадь фигуры F меньше 1, то площадь фигуры $\overline{F}$ превосходит n^2-1; поэтому,

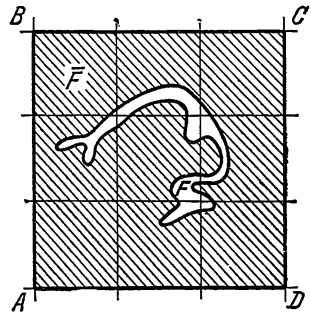


Рис. 148.

в силу теоремы Блихфельда, эту фигуру можно сдвинуть так, чтобы внутри нее находилось n^2 узлов решетки. Но это означает, что все n^2 узлов решетки, заключенных внутри квадрата K, будут принадлежать фигуре $\overline{F}$ и, значит, внутри фигуры F не будет находиться ни одного узла.

Это доказательство можно еще несколько уточнить и показать, что и в том случае, когда площадь фигуры F равна 1, эту фигуру можно сдвинуть так, что внутри нее не будет лежать ни одного узла решетки.

Теорему Блихфельда (и следствие из нее) нетрудно перенести и на случай пространственных (или даже n-мерных) тел; мы здесь на этом не остановимся.

6.5. Задачи о разбиении выпуклых фигур на части. В этом, заключительном, пункте статьи мы расскажем о некоторых комбинаторных задачах, связанных главным образом с разбиением выпуклых фигур на «меньшие» части.

Первая и наиболее известная из таких задач была поставлена в 1933 году видным польским математиком К. Борсуком. Она заключается в следующем. Пусть F — некоторая выпуклая фигура диаметра d. Будем каким-либо способом разбивать эту фигуру на части, имеющие меньший диаметр. Наименьшее число частей, которые для этого потребуются, обозначим через $a(F)$. Задача заключается в том, чтобы *определить, какие значения может принимать величина $a(F)$ для различных фигур*. Эту задачу можно рассматривать для плоских выпуклых фигур; можно ее также рассматривать для пространственных выпуклых тел или для n-мерных тел.

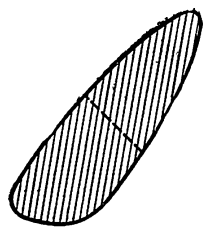


Рис. 149.

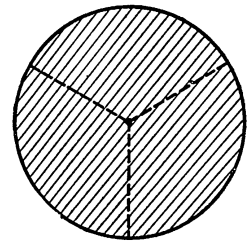


Рис. 150.

Обратимся сначала к случаю *плоских* выпуклых фигур. Разумеется, существуют фигуры, которые можно разбить на две части меньшего диаметра (рис. 149), т. е. фигуры F, для которых $a(F)=2$. Однако с первого взгляда ясно, что круг, по-видимому, невозможно разбить на две части меньшего диаметра. Несложное рассуждение подтверждает эту догадку: ведь хоть одна из двух частей круга наверное будет содержать две диаметрально противоположные точки, расстояние между которыми равно диаметру круга. В то же время на три части меньшего диаметра круг разбить можно (рис. 150). Таким образом, если F — круг, то $a(F)=3$. Если F — равносторон-

ний треугольник, то тоже, как легко видеть, $a(F)=3$. Возникает вопрос, нельзя ли найти плоскую выпуклую фигуру F, для которой $a(F)>3$, т. е. фигуру, для разбиения которой на части меньшего диаметра нельзя обойтись тремя частями, а потребуется четыре или большее число частей? Оказывается, что на самом деле трех частей всегда достаточно: *всякая плоская фигура F диаметра d может быть разбита на три части диаметра $<d$*, т. е. $a(F)\leqslant 3$.

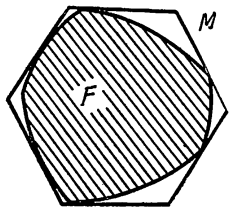


Рис. 151.

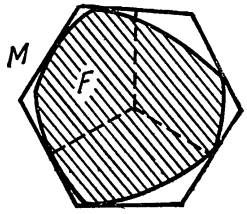


Рис. 152.

Эта теорема, установленная Борсуком, имеет очень красивое доказательство, идею которого мы сейчас изложим. Пусть F — плоская фигура диаметра d. Оказывается, далее, что *всякая фигура диаметра d может быть заключена в правильный шестиугольник M, у которого расстояние между противоположными сторонами равно d* (рис. 151; доказательство этого утверждения, впервые установленного венгерским математиком Й. Палом, можно найти на стр. 180—182 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского [1], указанной в списке литературы в конце статьи). Таким образом, всякая плоская выпуклая фигура диаметра d может быть заключена в шестиугольник M. Но шестиугольник M можно разрезать на три части, диаметр каждой из которых будет меньше d (рис. 152); вместе с тем разрежется на три части диаметра $<d$ и фигура F, заключенная в шестиугольнике M. Этим доказательство и завершается.

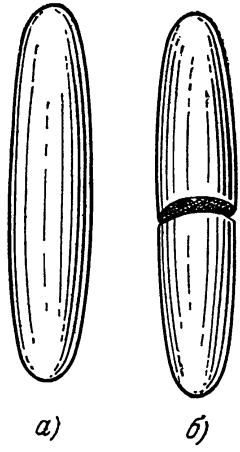


Рис. 153.

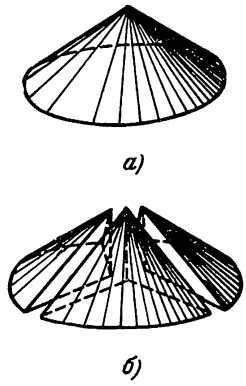


Рис. 154.

Таким образом, для плоских выпуклых фигур вопрос о том, какие значения может принимать величина $a(F)$, решен полностью. В пространстве также существуют тела, для которых $a(F)=2$ (рис. 153) или $a(F)=3$ (рис. 154). Однако там существуют и тела, для которых $a(F)=4$; примером может служить шар или правильный тетраэдр. Вообще n-мерный шар или n-мерный правильный

симплекс являются примерами таких n-мерных выпуклых тел, для которых $a(F)=n+1$. (Для шара это было доказано советскими математиками Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом и польским математиком К. Борсуком.) Но при $n=2$ «двумерный шар» (т. е. круг) является одной из фигур, требующих максимального числа частей, т. е. одной из фигур, для которых в неравенстве $a(F)\leqslant 3$ достигается равенство. Естественно предположить, что такое положение вещей сохраняется и при всех больших значениях n. Эта гипотеза и была сформулирована Борсуком в 1933 году:

Гипотеза Борсука. *Всякое тело F диаметра d, расположенное в n-мерном пространстве, может быть разбито на $n+1$ частей меньшего диаметра, т. е. в n-мерном пространстве справедливо неравенство $a(F)\leqslant n+1$.*

На доказательство справедливости этой гипотезы были направлены усилия многих математиков мира. Однако даже для $n=3$, т. е. для тел, расположенных в обычном пространстве, полное решение этой проблемы долго не удавалось получить. Это решение (для $n=3$) было получено только в 1955 году английским математиком Г. Эгглстоном. Он доказал, что в *трехмерном пространстве предположение Борсука действительно справедливо, т. е. $a(F)\leqslant 4$ для любого трехмерного выпуклого тела.*

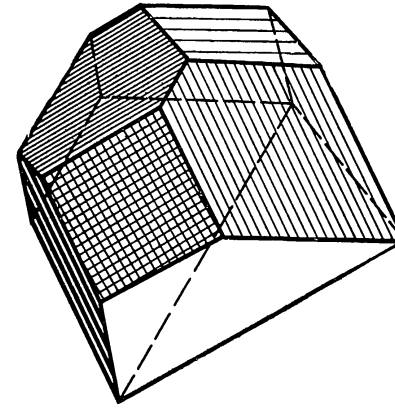


Рис. 155.

Затем, в 1957 году, израильский математик Б. Грюнбаум дал более простое доказательство этого утверждения [1]). Для $n>3$ (т. е. уже для четырехмерных выпуклых тел) полное решение проблемы Борсука неизвестно до сих пор. Известно лишь, что *гипотеза Борсука справедлива для n-мерных тел, граница которых не имеет особых точек* (т. е. для таких n-мерных тел

$$a(F)\leqslant n+1;$$

это было установлено в 1946 году швейцарским геометром Г. Хадвигером). Имеются и другие результаты, но все они носят частный характер.

---

[1]) Доказательство Грюнбаума близко к изложенному выше доказательству для плоских фигур (с разбиением шестиугольника M). Именно, Грюнбаум доказал, что каждое выпуклое трехмерное тело диаметра d может быть заключено в некоторый многогранник K (общий вид которого показан на рис. 155), и установил, что этот многогранник можно разрезать на четыре части диаметра $<d$ (диаметр частей у Грюнбаума получился равным $\approx 0{,}9887\,d$).

Другая, несколько менее известная, задача о разбиении выпуклых фигур на части была независимо рассмотрена немецким математиком Ф. Леви и советскими математиками И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом. Эта задача заключается в следующем. Дана выпуклая ограниченная фигура F. Будем рассматривать «уменьшенные копии» фигуры F, т. е. фигуры, получающиеся из F при помощи некоторой гомотетии с коэффициентом k, где $0<k<1$. Требуется найти наименьшее

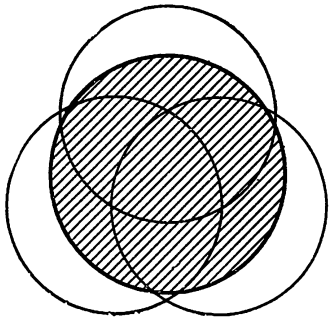


Рис. 156.

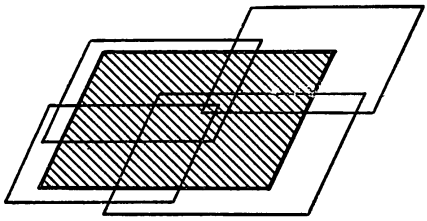


Рис. 157.

число «уменьшенных копий» фигуры F, которыми можно покрыть всю эту фигуру. Это наименьшее число обозначим через $b(F)$. Задача заключается в том, чтобы *определить, какие значения может принимать величина $b(F)$ для различных фигур.*

Легко видеть, что круг можно покрыть тремя меньшими кругами (рис. 156), но нельзя покрыть двумя, т. е. в случае круга $b(F)=3$. Однако, если F — параллелограмм, то $b(F)=4$ (рис. 157); в самом деле, никакой параллелограмм, гомотетичный F с коэффициентом гомотетии $k<1$, не может содержать сразу двух вершин параллелограмма F, и потому четыре вершины параллелограмма F должны принадлежать четырем различным «уменьшенным копиям».

Оказывается, что среди всех плоских выпуклых фигур только для параллелограммов выполняется равенство $b(F)=4$. Именно, *для любой двумерной ограниченной выпуклой фигуры F, не являющейся параллелограммом, справедливо равенство $b(F)=3$; если F — параллелограмм, то $b(F)=4$.* Эта теорема доказана в 1960 году И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом.

Рассмотрим теперь эту задачу для пространственных тел. В случае параллелепипеда $b(F)=8$ (каждая из восьми вершин параллелепипеда должна покрываться отдельной «уменьшенной копией»). Основываясь на предыдущей теореме, естественно предположить, что *из всех пространственных выпуклых тел величина $b(F)$ принимает свое наибольшее значение для параллелепипедов,*

т. е. $b(F) \leqslant 8$ для любого пространственного выпуклого тела. Однако правильно ли это предположение — до сих пор неизвестно. Вообще, естественно предположить, что для любого n-мерного тела F справедливо неравенство $b(F) \leqslant 2^n$; верна ли эта гипотеза при $n \geqslant 3$ — неизвестно.

Интересно, что с задачей вычисления величины $b(F)$ тесно связана *задача освещения*, поставленная одним из авторов настоящей статьи. Она заключается в том, чтобы *найти наименьшее число параллельных световых пучков, которыми можно «осветить» всю границу выпуклой фигуры* F (рис. 158). Это наименьшее число световых пучков обозначим через $c(F)$. Оказывается, что, несмотря на полное внешнее несходство этой задачи с предыдущей, *для любой выпуклой фигуры* F *справедливо равенство* $b(F) = c(F)$ (фигура F может иметь любое число измерений). Отмеченные выше нерешенные проблемы теперь могут быть сформулированы следующим образом: *верно ли, что поверхность любого n-мерного выпуклого тела может быть освещена* 2^n *параллельными световыми пучками?* В частности, *верно ли, что поверхность любого трехмерного выпуклого тела может быть освещена восемью параллельными световыми пучками?* (Во избежание недоразумений уточним, что «скользящие» по поверхности тела лучи, т. е. опорные лучи, не освещают точек соприкосновения с поверхностью.)

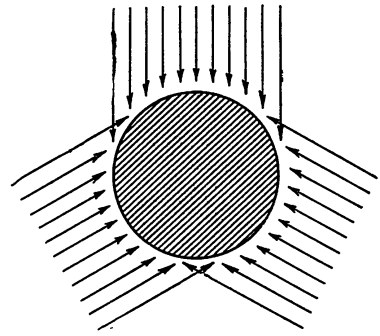


Рис. 158.

Известно, что $a(F) \leqslant b(F) = c(F)$ для любых выпуклых фигур (любого числа измерений) и что для n-мерных тел, не имеющих особых точек, справедливо равенство $b(F) = c(F) = n + 1$. Других результатов сколько-нибудь общего характера не известно. Подробнее о комбинаторных задачах этого типа можно прочитать в указанной на стр. 268 книге В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

В этой книге в форме задач, сопровождаемых кратким текстом и подробными решениями, изложены основные понятия общей теории выпуклых фигур на плоскости, а также ряд более специальных вопросов. Большое внимание уделено в книге теореме Хелли и ее применениям, фигурам постоянной ширины и их обобщениям, задачам на максимум и минимум, связанным с выпуклыми фигурами, и т. д. Книга

рассчитана на начинающих и не предполагает никаких знаний по математике, выходящих за рамки программы средней школы.

[2] Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, М., Гостехиздат, 1956.

Популярная книга, содержащая большой и разнообразный материал, затрагивающий ряд разделов учения о выпуклых телах. Изложение элементарно; лишь доказательство неравенства Брунна—Минковского (ср. п. **4.6** настоящей статьи) проводится средствами интегрального исчисления.

[3] А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Обстоятельная монография, с исключительной полнотой освещающая все стороны учения о выпуклых многогранниках.

[4] Г. Буземан, Выпуклые поверхности, перев. с англ., М., «Наука», 1964.

Серьезная монография, излагающая современное состояние теории выпуклых тел. Изложение не элементарно.

[5] Г. Хадвигер и Г. Дебруннер, Комбинаторная геометрия на плоскости, перев. с нем., М., «Наука», 1965.

[6] В. Г. Болтянский и И. Ц. Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., «Наука», 1965.

Небольшие книги [5] и [6], рассчитанные на начинающих, весьма широко освещают область комбинаторной геометрии. Очень многие из затронутых в этих книгах тем тесно связаны с учением о выпуклых фигурах и телах. Книга [6] завершается интересным списком нерешенных задач по комбинаторной геометрии.

[7] Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, перев. с нем., М., Физматгиз, 1958.

Эта книга посвящена так называемой «дискретной геометрии»—интересному разделу геометрии, родственному «комбинаторной геометрии». Содержание книги имеет много точек соприкосновения с теорией выпуклых фигур и тел.

[8] Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, перев. с нем., М., Гостехиздат, 1951.

В главе «плоские точечные системы» этой замечательной книги обсуждается теорема Минковского (см. п. **6.3** настоящей статьи) и приводятся интересные ее применения к теории чисел.

[9] Цикл статей по геометрии в вып. II журнала «Успехи математических наук», 1936.

К теме настоящей статьи непосредственно относятся статьи: Б. Н. Делоне, Доказательство теоремы Брунна—Минковского; Л. А. Люстерник, Применение неравенства Брунна—Минковского к экстремальным задачам и Э. Хелли, О совокупностях выпуклых тел с общими точками. (Впрочем, и остальные три статьи этого цикла по теме связаны с учением о выпуклых телах.)

[10] T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934.

Эта небольшая книжка по своему характеру приближается к энциклопедическим изложениям предмета; она с необычайной полнотой сообщает о всех результатах в области теории выпуклых тел, полученных к 1934 г. Доказательства в большинстве случаев авторами опускаются; однако книга содержит весьма обширную библиографию.

[11] W. Blaschke, Kreis und Kugel, Berlin, 1956. (В. Бляшке, Круг и шар; русский перевод книги готовится к изданию издательством «Наука»).

Книга знаменитого немецкого геометра, в основной своей части посвященная теории выпуклых тел (с особым упором на разбор связанных с выпуклыми телами задач на максимум и минимум).

[12] H. Hadwiger, Altes und Neues über konvexe Körper, Basel—Stuttgart, 1955.

Небольшая, но исключительно содержательная книга видного швейцарского геометра, излагающая современное состояние не связанных с дифференциальной геометрией разделов теории выпуклых тел.

[13] H. G. Eggleston, Convexity, Cambridge, 1958.

Небольшая, со вкусом написанная книга, содержащая основные понятия теории выпуклых тел и некоторые относящиеся к этой теории более специальные вопросы (теорема Хелли и ее обобщения, тела постоянной ширины и т. д.).

[14] H. G. Eggleston, Problems in Euelidean spase: Application of Convexity, London—New York—Paris—Los-Angeles, 1957.

Книга содержит подробное обсуждение десяти достаточно разнообразных задач, относящихся к учению о выпуклых фигурах и телах.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Наибольшие и наименьшие значения функций 270
1.1. Функции одного переменного 270
1.2. Примеры 276
1.3. Функции нескольких переменных 278
1.4. Условные максимумы и минимумы 285
1.5. Примеры 286
1.6. Метод Лагранжа 294
1.7. Функции прямых линий 296
1.8. Примеры 300
§ 2. Знаменитые геометрические задачи 307
2.1. Точка Торричелли 307
2.2. Вариант задачи о точке Торричелли 312
2.3. Некоторые общие вопросы учения о наибольших и наименьших значениях геометрических величин 313
2.4. Треугольник Шварца 321
2.5. Вписанный четырехугольник наименьшего периметра 326
2.6. Вписанные и описанные многоугольники 329
2.7. Изопериметрическая задача для многоугольников 335
§ 3. Задачи на максимум и минимум, связанные с выпуклыми фигурами 338
3.1. Изопериметрическая задача для произвольных фигур 338
3.2. Теоремы Юнга и Бляшке 340
3.3. Зависимость между основными характеристиками выпуклых фигур 344
Литература 347

§ 1. Наибольшие и наименьшие значения функций

1.1. Функции одного переменного. Пусть $y=f(x)$ — произвольная функция переменного x. Аргумент x и значения функции y мы будем здесь считать вещественными числами. Функция $f(x)$ может быть определена не для любого вещественного аргумента x; множество тех значений x, для которых функция $f(x)$ определена, называется *областью определения* функции. Например, областью задания функции $y=\log_2 x$ является полупрямая $x>0$ (при этом концевая точка $x=0$ не принадлежит области определения, т. е. эта область представляет собой открытую полупрямую);

областью определения функции $y=\sqrt{1-x^2}$ служит отрезок $-1\leqslant x\leqslant 1$ (отметим, что этот отрезок содержит свои концевые точки, т. е. является замкнутым); область определения функции $y=\lg\sin x$ состоит из бесконечного числа интервалов $\ldots$, $(-4\pi, -3\pi)$, $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(4\pi, 5\pi)$, $\ldots$ Графики трех рассмотренных функций изображены на рис. 1.

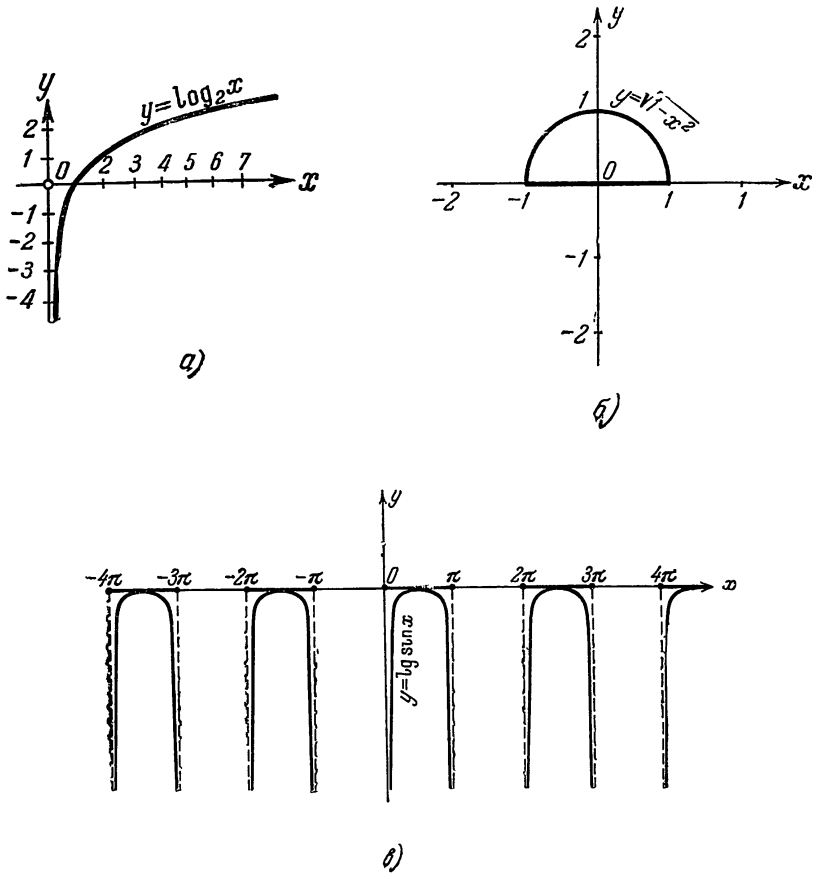


Рис. 1.

В математике рассматриваются функции с любыми, сколь угодно сложно устроенными областями определения. Мы, однако, в дальнейшем будем встречаться лишь с функциями, имеющими сравнительно «простые» области определения: отрезок, интервал, полуинтервал, луч (открытый или замкнутый) или всю прямую.

Пусть x_1 — некоторая точка, принадлежащая области определения функции $y=f(x)$. Говорят, что функция y достигает в точке

x_1 своего *наибольшего значения*, или *максимума* [1]), если для любого x из области определения функции справедливо неравенство $f(x_1) \geqslant f(x)$. Аналогично говорят, что функция $y=f(x)$ достигает в точке x_2 (принадлежащей ее области определения) своего *наименьшего значения*, или *минимума*, если для любого x из области определения функции справедливо неравенство $f(x_2) \leqslant f(x)$. Заметим, что функция может достигать максимума или

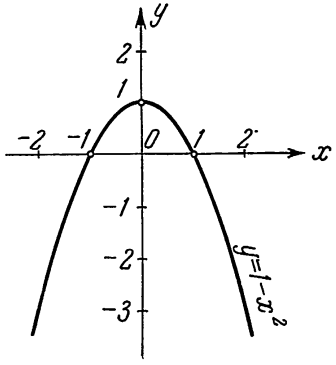


Рис. 2.

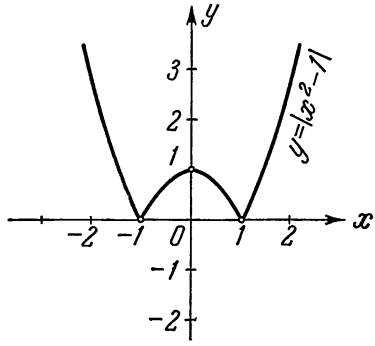


Рис. 3.

минимума более чем в одной точке (и даже в бесконечном множестве точек). Например, функция $y=1-x^2$ достигает максимума в одной точке $x=0$ (рис. 2); функция $y=|x^2-1|$ достигает минимума в двух точках $x=\pm 1$ (рис. 3); функция же $y=\sin x$ (рис. 4) достигает максимума в бесконечном числе точек $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ и достигает минимума также в бесконечном числе точек $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Может случиться, что функция ни в одной точке своей области определения не достигает своего максимума (или минимума). Так, функция $y=1-x^2$ (рис. 2), определенная на всей вещественной прямой, нигде не достигает минимума; функция $y=|x^2-1|$ (рис. 3) нигде не достигает максимума; функция же $y=\log_2 x$ (рис. 1, *а*) не достигает ни максимума, ни минимума в своей области определения.

Одна из важных теорем анализа (см. ЭЭМ, кн. III, стр. 218) утверждает, что *если функция $y=f(x)$ непрерывна и ее областью определения является отрезок* (замкнутый, т. е. содержащий обе концевые точки!), *то эта функция обязательно достигает максимума и минимума*. Рис. 5, *а—г* иллюстрируют содержание этой теоремы. При этом свое наибольшее значение функция может

[1]) Понятие локального максимума или минимума мы здесь не рассматриваем.

принимать как в концевой точке (рис. 5, *а*), так и во внутренней точке отрезка, являющегося областью определения функции (рис. 5, *б*). То же относится и к наименьшему значению; например, функция, график которой изображен на рис. 5, *г*, в двух точках принимает наименьшее значение — в концевой и во внутренней.

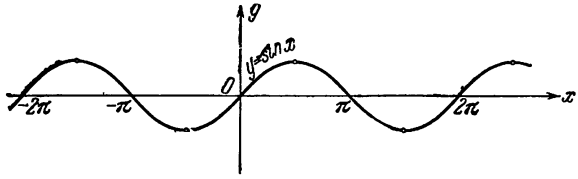


Рис. 4.

Если область определения непрерывной функции не является отрезком, то сформулированная выше теорема, вообще говоря, места не имеет; иными словами, рассматриваемая функция может в этом случае не достигать максимума или минимума. Так, функция $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, определенная на интервале $-1<x<+1$, ни в одной точке не достигает максимума (рис. 6), а функция $y=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right)$,

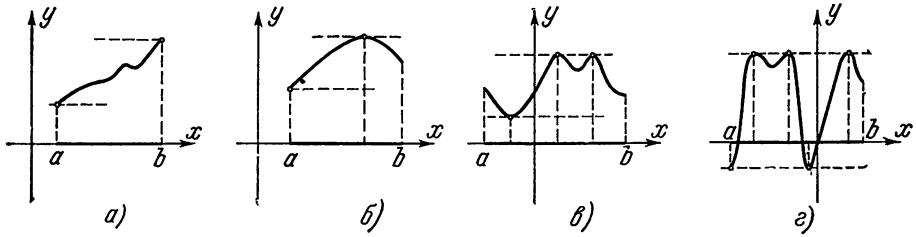


Рис. 5.

определенная на интервале $0<x<1$, не достигает на этом интервале ни максимума, ни минимума (рис. 7). Однако в некоторых случаях можно гарантировать существование наибольших или наименьших значений также и у функций, определенных не на отрезках. Пусть, например, функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на интервале $a<x<b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to b} f(x)=0$. В таком случае, если функция $f(x)$ хотя бы в одной точке интервала $a<x<b$ принимает положительное значение, то она непременно достигает максимума (рис. 8, *а*), а если она хотя бы в одной точке принимает отрицательное значение, то непременно достигает минимума (рис. 8, *б*). Разумеется, такая функция может достигать и максимума и минимума (рис. 8, *в*). То же справедливо для функций,

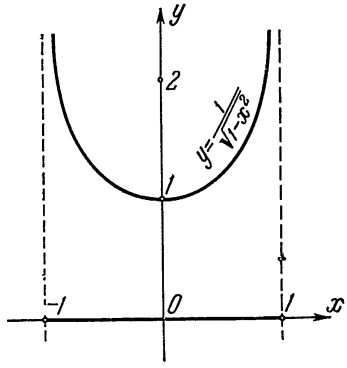


Рис. 6.

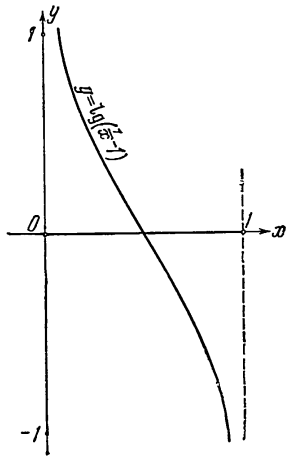


Рис. 7.

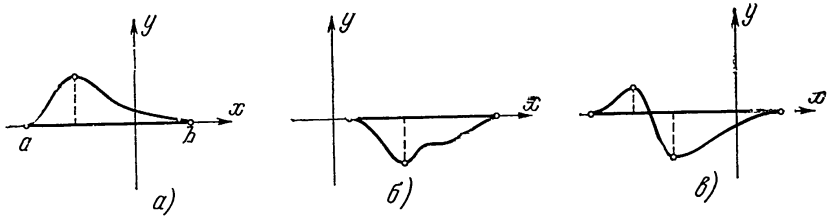


Рис. 8.

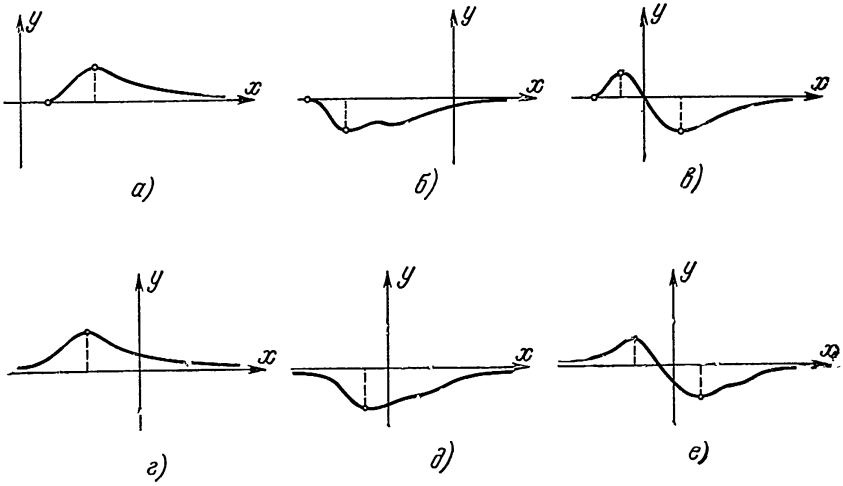


Рис 9.

определенных на открытом луче или на всей прямой (рис. 9). Отметим еще, что если функция, непрерывная на интервале $a<x<b$, удовлетворяет условиям $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty$, то она непременно достигает минимума (рис. 6).

Пусть функция $y=f(x)$ достигает в точке x_0 своего наибольшего значения, которое мы обозначим через y_0: $y_0=f(x_0)$. Рассмотрим график этой функции и проведем на том же чертеже прямую $y=y_0$ (рис. 10). Тогда по определению наибольшего значения

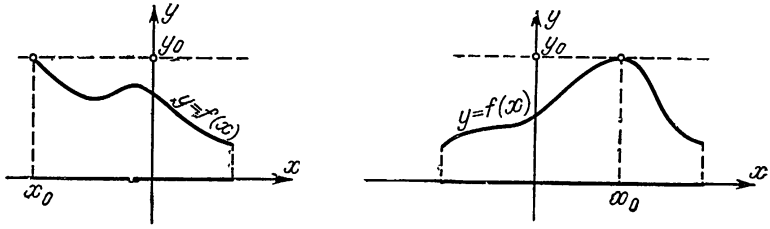


Рис. 10.

ни одна точка графика функции $y=f(x)$ не лежит выше проведенной прямой. Иными словами, весь график лежит ниже прямой $y=y_0$, за исключением тех точек, в которых достигается максимум. Таким образом, прямая $y=y_0$ является опорной прямой графика $y=f(x)$, т. е. эта прямая имеет с графиком хотя бы одну общую точку и весь график лежит по одну сторону от прямой $y=y_0$ (ср. стр. 187 этого тома ЭЭМ).

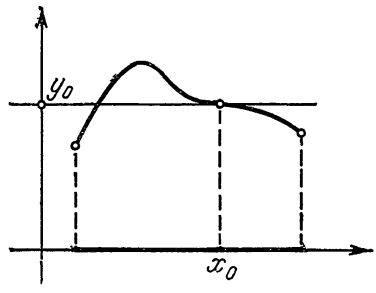


Рис. 11.

Если при этом точка x_0 является внутренней точкой области определения функции и кривая $y=f(x)$ имеет в точке (x_0, y_0) касательную (рис. 10, *б*), то эта касательная должна совпадать с прямой $y=y_0$. Отсюда следует, что *если график функции* $y=f(x)$ *имеет в каждой точке касательную, то внутренняя точка* x_0 *области определения функции лишь в том случае может быть точкой максимума, когда касательная в соответствующей точке графика горизонтальна* (т. е. параллельна оси x). Читатель, знакомый с понятием производной, легко сможет придать этому геометрическому утверждению (некогда именовавшемуся принципом Ферма) следующую аналитическую формулировку: *для того чтобы дифференцируемая функция* $y=f(x)$ *принимала наибольшее значение во внутренней точке* x_0 *ее области*

определения, необходимо выполнение равенства

$$f'(x_0) = 0.$$

Ясно, что это условие не является достаточным (ср. рис. 11). К концевой точке области определения сформулированное условие неприменимо (т. е. функция может достигать в концевой точке x_0 наибольшего значения и не удовлетворять условию $f'(x_0) = 0$; см. рис. 10, *а*).

Все сказанное выше о наибольших значениях применимо также и к наименьшим значениям.

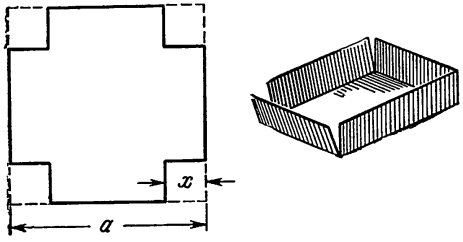


Рис. 12.

1.2. Примеры. Сказанное в предыдущем пункте мы проиллюстрируем здесь двумя примерами.

Задача 1. *Из листа жести, имеющего форму квадрата со стороной a, изготовляется открытая прямоугольная коробка, для чего в углах листа жести делаются квадратные вырезы* (рис. 12). *При каком размере вырезов объем полученной коробки будет наибольшим?*

Решение. Обозначим сторону каждого из вырезаемых квадратов через x. Тогда в основании полученной коробки будет лежать квадрат со стороной $a - 2x$, а высота коробки будет равна x. Следовательно, объем $f(x)$ коробки будет выражаться формулой

$$f(x) = (a-2x)^2 x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

Ясно, что функция $f(x)$ определена на интервале $0 < x < a/2$ (при $x = 0$ никакой коробки не получается, а при $x = a/2$ от листа жести ничего не остается). При этом функция $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to a/2} f(x) = 0.$$

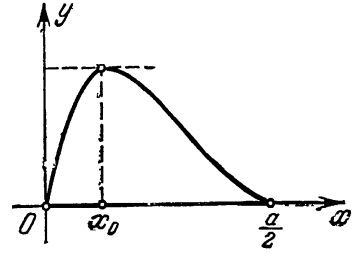


Рис. 13.

Так как, кроме того, значения функции $f(x)$ положительны, то эта функция обязательно достигает своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке x_0 области определения (рис. 13). Согласно сказанному выше, в точке x_0 производная функции $f(x)$ должна обращаться в нуль.

Так как

$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2,$$

то искомая точка максимума x_0 является одним из корней уравнения

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0.$$

Но корни этого уравнения имеют вид $x_1 = a/6$, $x_2 = a/2$, а так как точка $x = a/2$ не принадлежит области определения функции $f(x)$, то у нас остается единственная внутренняя точка области определения, которая удовлетворяет необходимому условию, указанному на стр. 275—276, а именно точка $x = a/6$.

Итак, функция $y = f(x)$ должна достигать максимума в некоторой внутренней точке области определения. Но она может достигать максимума только в точке $x = a/6$. Следовательно, рассматриваемая функция достигает максимума в точке $x = a/6$ (и только в этой точке, ср. рис. 13). Объем получающейся наибольшей коробки оказывается равным

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - 2 \cdot \frac{a}{6}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27} a^3.$$

Задача 2. *Из всех цилиндров заданного объема v найти тот, у которого полная поверхность минимальна.*

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через x, а высоту через h. Тогда

$$v = \pi x^2 h,$$

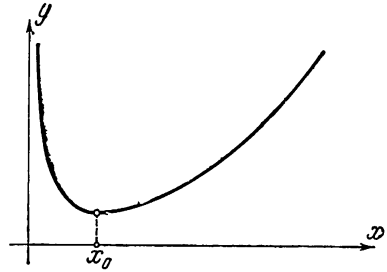


Рис. 14.

и потому $h = v/\pi x^2$. Полная поверхность цилиндра равна

$$2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + \frac{2v}{x}.$$

Таким образом, искомая поверхность полностью определяется величиной x; обозначим ее через $f(x)$:

$$f(x) = 2\pi x^2 + \frac{2v}{x}.$$

Функция $f(x)$ определена на полупрямой $x > 0$. Она непрерывна и, очевидно, удовлетворяет условиям

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Отсюда вытекает, что рассматриваемая функция достигает минимума в некоторой внутренней точке x_0 своей области определения (рис. 14). Согласно сказанному на стр. 275—276, в точке x_0 производная $f'(x)$ должна равняться нулю. Но

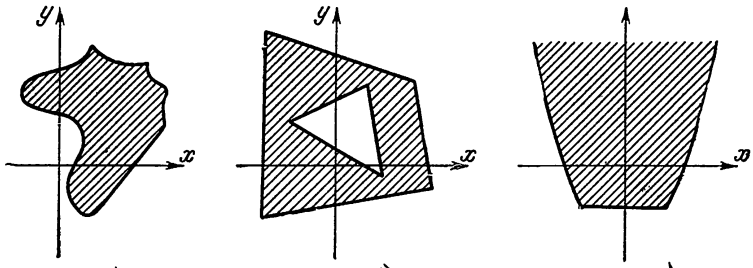
$$f'(x) = 4\pi x - \frac{2v}{x^2}.$$

Приравнивая производную нулю, получаем уравнение

$$4\pi x - \frac{2v}{x^2} = 0,$$

которое имеет единственный вещественный корень $x = \sqrt[3]{v/2\pi}$.

Итак, функция $y = f(x)$ должна достигать минимума в некоторой внутренней точке области определения. А так как может



а) б) в)

Рис. 15.

достигать минимума она только в точке $x = \sqrt[3]{v/2\pi}$, то она достигает минимума именно в этой точке. Таким образом, наименьшая полная поверхность цилиндра объема v равна

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right) = 2\pi\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{2/3} + \frac{2v}{\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{1/3}} = 3\sqrt[3]{2\pi v^2}.$$

1.3. Функции нескольких переменных. Рассмотрим теперь функцию $z = f(x, y)$ двух переменных x, y. Множество пар чисел (x, y), для которых эта функция определена, называется ее *областью определения*. Примем x и y за координаты точки на плоскости; в таком случае область определения функции $f(x, y)$ будет геометрически изображаться некоторым множеством точек на плоскости, т. е. будет представлять собой некоторую фигуру. В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с функциями, области определения которых устроены сравнительно просто. Именно, область определения каждой рассматриваемой функции будет представлять собой часть плоскости, ограниченную одной или несколькими гладкими [1]) дугами (рис. 15). При этом иногда область определения будет *открытой*, т. е. не содержащей ни одной точки ограничивающего контура, а иногда *замкнутой*, т. е. включающей все точки ограничивающего контура.

Например, если $s = f(x, y)$ есть площадь прямоугольника со сторонами x, y, то областью определения этой функции является

[1]) То есть имеющими непрерывно меняющуюся касательную.

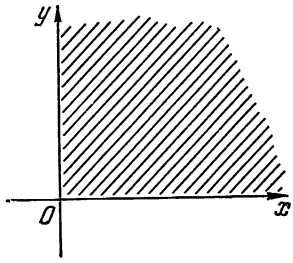


Рис. 16.

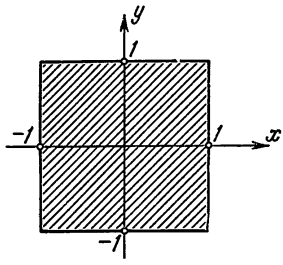
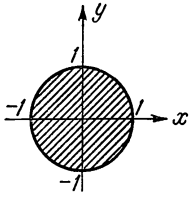
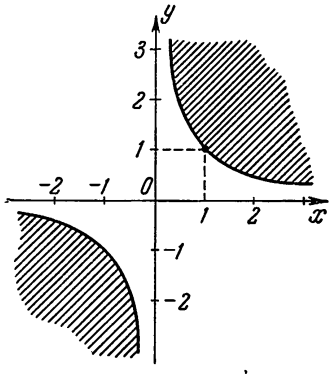


Рис. 17.



а)



б)

Рис. 18.

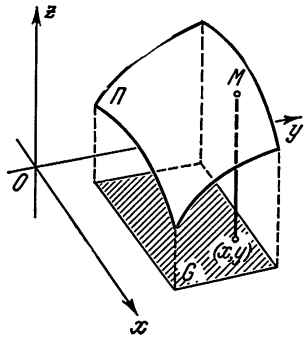
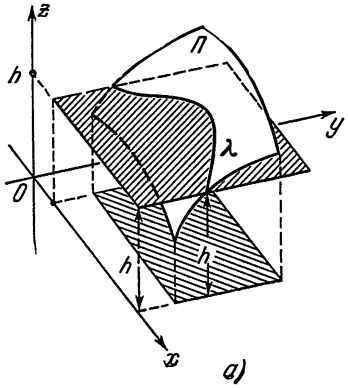
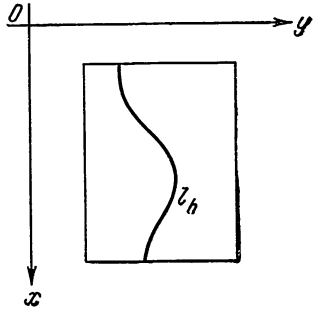


Рис. 19.



а)



б)

Рис. 20.

открытый угол (рис. 16), определяемый в плоскости x, y неравенствами $x>0$, $y>0$ (поскольку длины сторон любого прямоугольника положительны). Областью определения функции

$$f(x, y)=\lg(1-x^2)+\lg(1-y^2)$$

служит открытый квадрат (рис. 17). Функции же

$$f_1(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad f_2(x, y)=\sqrt{xy-1}$$

имеют замкнутые области определения, ограниченные соответственно окружностью и гиперболой (рис. 18, *а*, *б*).

Рассматриваемые функции будут всегда предполагаться *непрерывными*, т. е. такими, что значения функции $z=f(x, y)$ мало меняются при малом изменении аргументов x, y. (По поводу понятия непрерывности функций нескольких переменных см. любой курс математического анализа.)

Для геометрического представления функции $z=f(x, y)$ условимся принимать числа x, y, z за прямоугольные координаты точки в трехмерном пространстве. В таком случае каждой точке x, y, принадлежащей области определения G функции $z=f(x, y)$ будет соответствовать точка M пространства с координатами x, y, z (рис. 19). Множество всех получаемых таким образом точек M представляет собой некоторую поверхность Π, проекция которой на плоскость (x, y) совпадает с областью определения G. Эту поверхность Π принято называть *графиком* функции $z=f(x, y)$.

Другим часто применяемым способом геометрического изображения функций является система ее *линий уровня*. Пусть h — некоторое действительное число. Плоскость $z=h$ пересекает график Π функции $z=f(x, y)$ по некоторой линии λ (рис. 20, *а*). Проекция l_h линии λ на плоскость x, y и называется линией уровня функции $z=f(x, y)$, соответствующей значению h (рис. 20, *б*). Иными словами, линия уровня l_h есть множество таких точек (x, y), для которых $f(x, y)=h$, т. е. соотношение

$$f(x, y)=h$$

является уравнением линии уровня l_h. Ясно, что если указать в области определения G достаточно много линий уровня, проставив около каждой числовую отметку, указывающую значение функции в точках этой линии уровня, то мы получим достаточно полное представление о поведении функции. Так, например, из рассмотрения рис. 21 видно, что функция $z=f(x, y)$ возрастает от края области определения к ее внутренности (причем это возрастание является более быстрым там, где линии уровня расположены гуще) и имеет внутри области определения две вершины. Такой способ изображения поверхностей применяется в топографии.

Пусть (x_1, y_1) — некоторая точка, принадлежащая области определения функции $z=f(x, y)$. Говорят, что функция z достигает в точке (x_1, y_1) своего *наибольшего значения*, или *максимума*, если для любой точки (x, y) из области определения функции справедливо неравенство

$$f(x_1, y_1) \geqslant f(x, y).$$

Аналогично определяется *наименьшее значение* (или *минимум*). Как и в случае функций от одного переменного, функция $z=f(x, y)$ может достигать максимума (или минимума) более чем в одной точке и даже в бесконечном множестве точек. Например, функция $z=|1-x^2-y^2|$ достигает минимума (равного нулю) во всех точках некоторой линии, а именно, во всех точках окружности $x^2+y^2=1$.

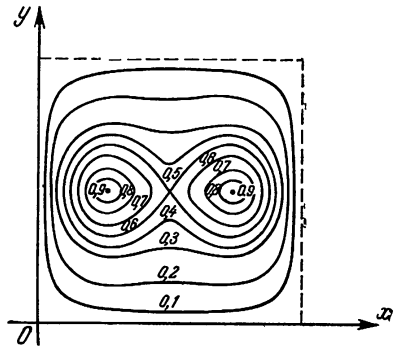


Рис. 21.

Может также случиться, что функция $z=f(x, y)$ ни в одной точке своей области определения не достигает максимума (или минимума).

Приведенная на стр. 272 теорема сохраняет свою силу и для функций от двух переменных и формулируется в этом случае следующим образом. *Если функция $z=f(x, y)$ непрерывна и ее область определения является замкнутой и ограниченной, то эта функция обязательно достигает максимума и минимума.* При этом свое наибольшее значение функция может принимать как во внутренней точке области определения, так и в ее граничной точке (т. е. в точке, принадлежащей граничному контуру области определения). То же относится и к наименьшему значению.

В некоторых случаях можно гарантировать существование наибольших или наименьших значений также и у функций, области определения которых не являются замкнутыми и ограниченными. Пусть, например, область определения G непрерывной функции $z=f(x, y)$ открыта и ограничена, причем значения функции $f(x, y)$ приближаются к нулю, когда точка (x, y) произвольным образом приближается к границе области G. В таком случае, если функция $f(x, y)$ хотя бы в одной точке области принимает положительное значение, то она непременно достигает максимума, а если она хотя бы в одной точке принимает отрицательное значение, то непременно достигает минимума. Аналогичное утверждение верно и для неограниченных областей. Именно, пусть $z=f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в неограниченной открытой

области G, причем если точка (x, y) приближается к границе области G или «уходит в бесконечность» по любой линии, лежащей в области G, то значения функции $f(x, y)$ приближаются к нулю. В таком случае, если функция $f(x, y)$ хотя бы в одной точке области определения принимает положительное (отрицательное) значение, то она обязательно достигает максимума (минимума).

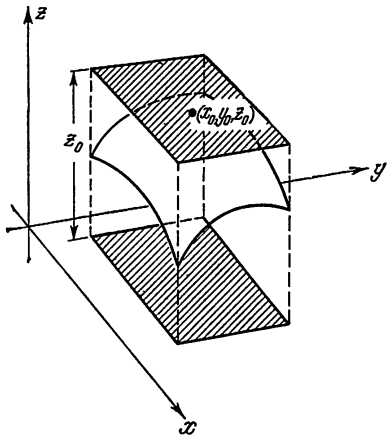


Рис. 22.

Отметим еще, что если $\lim f(x, y) = +\infty$, когда точка (x, y) приближается к границе области G или «уходит в бесконечность», то функция $f(x, y)$ непременно достигает минимума.

Пусть функция $z = f(x, y)$ достигает в точке (x_0, y_0) своего наибольшего значения, которое мы обозначим через z_0:

$$z_0 = f(x_0, y_0).$$

Рассмотрим плоскость $z = z_0$ (параллельную плоскости x, y). По определению наибольшего значения, ни одна точка графика функции $z = f(x, y)$ не лежит выше этой плоскости. Другими словами, плоскость $z = z_0$ является опорной плоскостью графика функции $z = f(x, y)$ (ср. стр. 192 этой книги ЭЭМ). Если при этом точка (x_0, y_0) является внутренней точкой области определения функции, а поверхность, служащая графиком функции $z = f(x, y)$, имеет в точке (x_0, y_0, z_0) касательную плоскость, то эта касательная плоскость должна совпадать с плоскостью $z = z_0$ (рис. 22). Читатель, знакомый с уравнением касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) (оно имеет вид $z - z_0 = k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0)$, где $k_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$, $k_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$), легко выведет отсюда следующее важное предложение: *для того чтобы дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ принимала наибольшее значение во внутренней точке (x_0, y_0) ее области определения, необходимо выполнение равенств*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0.$$

Эти условия можно вывести и другим путем. В самом деле, если функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения во внутренней точке (x_0, y_0) своей области определения, то $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ для любой точки (x, y), принадлежащей области определения. В частности, $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y_0)$, если только точка (x, y_0) принадлежит области определения. Но это означает, что функция $\varphi(x) = f(x, y_0)$, зависящая только от одного перемен-

ного x, принимает в точке $x=x_0$ наибольшее значение. Следовательно, $\varphi'(x_0)=0$, а это и означает, что выполнено равенство $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)}=0$. (Заметим, что график функции $z=\varphi(x)$ получается сечением графика функции $z=f(x,\ y)$ плоскостью $y=y_0$ (рис. 23); из этого также видно, что функция $\varphi(x)$ достигает в точке x_0 наибольшего значения.) Аналогично устанавливается равенство $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,\ y_0)}=0$.

Разумеется, выполнение условий $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ во внутренней точке $(x_0,\ y_0)$ (т. е. требование, чтобы касательная плоскость была параллельна плоскости x, y) является лишь необходимым, но не достаточным, условием для того,

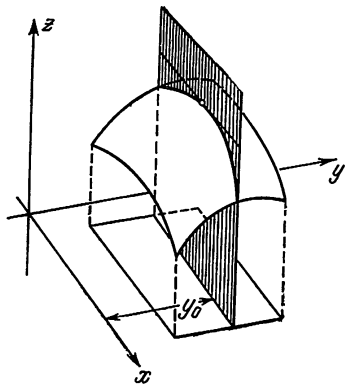


Рис. 23.

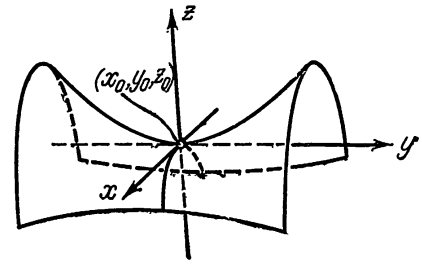


Рис. 24.

чтобы функция $f(x,\ y)$ достигала в точке $(x_0,\ y_0)$ наибольшего значения (ср. рис. 24).

Все вышеизложенное применимо также и к наименьшим значениям.

В заключение отметим, что все сказанное выше о функциях одного и двух переменных обобщается на функции произвольного числа переменных. Читатель, знакомый с понятием многомерного пространства (см. статью «Многомерные пространства» в этой книге ЭЭМ), легко сделает это самостоятельно. Если же не пользоваться геометрическим языком, то можно сказать, что область определения функции

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

есть множество всех таких наборов n чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, для которых значение функции y определено. Например, функция

$$y=x_1+x_2+\ldots+x_n$$

определена для любых наборов $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$. Функция

$$y=\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}$$

определена для наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$$

(«n-мерный шар»; см. стр. 373 этого тома ЭЭМ). Функция же

$$y = \lg(1 - x_3) + 5\lg(x_3 - x_1^2 - x_2^2)$$

трех переменных x_1, x_2, x_3 определена в области, описываемой неравенствами

$$x_3 < 1, \quad x_3 > x_1^2 + x_2^2$$

(рис. 25).

Вообще, мы условимся рассматривать только такие функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, области определения которых определяются конечным числом неравенств вида

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0,$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0, \ldots, \Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$$

(*открытая область*) или вида

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0,$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0, \ldots, \Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0$$

(*замкнутая область*), где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ — некоторые непрерывные функции. В случае замкнутой области G точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *граничной*, если хотя бы в одном из неравенств $\Phi_1 \leqslant 0$, $\Phi_2 \leqslant 0, \ldots, \Phi_k \leqslant 0$ имеет место точное равенство, и *внутренней*, если все неравенства — строгие. Аналогично определяются граничные точки открытой области (они ей не принадлежат). Наконец, область G называется *ограниченной*, если существует такое положительное число M, что для каждой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой области справедливо неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < M.$$

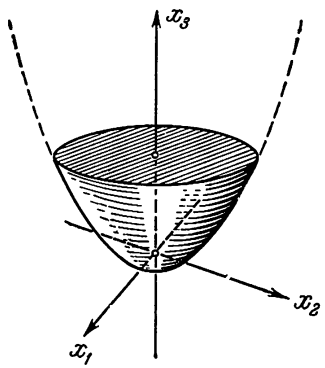


Рис. 25.

Если функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна и ее область определения является замкнутой и ограниченной, то эта функция обязательно достигает максимума и минимума. В случае же открытой области определения часто бывает полезным следующее утверждение. Пусть непрерывная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная в открытой области G, такова, что $\lim f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$, когда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к границе области G или «уходит в бесконечность»; тогда если

функция f хотя бы в одной точке принимает положительное (отрицательное) значение, то она достигает максимума (минимума). Аналогично, если $\lim f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = +\infty$, когда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к границе области G или «уходит в бесконечность», то функция f достигает минимума. Наконец, *если дифференцируемая функция* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *достигает максимума или минимума во внутренней точке ее области определения, то в этой точке все частные производные*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

обращаются в нуль.

1.4. Условные максимумы и минимумы. В различных вопросах математики и, в частности, в геометрии часто встречаются задачи следующего рода. В области определения G непрерывной функции f дана некоторая линия (или поверхность) L; требуется из всех точек линии L выбрать такую, в которой функция f принимает наибольшее (или наименьшее) значение. Иными словами, требуется найти максимум (или минимум) функции f, рассматривая не все точки ее области определения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторому дополнительному условию (условию принадлежности данной линии или поверхности). Поэтому задачи такого рода называются задачами на условный максимум или минимум.

Общую постановку задачи об отыскании условного максимума или минимума мы проиллюстрируем следующим примером. Пусть на плоскости заданы (гладкая!) линия L и не лежащая на ней точка A. *Требуется на линии* L *найти ближайшую к* A *точку* X.

Для решения этой задачи обозначим через (a, b) координаты точки A, а через (x, y) — координаты произвольной точки X. Тогда расстояние AX выразится формулой

$$AX = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Таким образом, нам требуется найти минимум функции

$$f(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

при условии, что точка (x, y) находится на заданной линии L.

Это — типичная задача на условный минимум. Для ее решения мы поступим следующим образом. Множество всех точек (x, y), находящихся на расстоянии h от точки A, т. е. линия уровня l_h функции $f(x, y)$, представляет собой *окружность* радиуса h с центром в точке A. При малом h эта окружность не имеет общих точек с линией L (рис. 26). Будем увеличивать h до тех пор, пока окружность l_h не заденет линию L. Иными словами, мы рассмотрим окружность l^* наименьшего радиуса, имеющую

общую точку с линией L. При этом возможны два случая: либо общей точкой X линий L и l^* является конец линии L (рис. 27, *а*), либо же общая точка X линий L и l^* является внутренней точкой линии L (рис. 27, *б*). Ясно, что во втором случае окружность l^* и линия L касаются друг друга в точке X.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению: *ближайшая к A точка X линии L либо является концевой точкой этой линии, либо обладает тем свойством, что проходящая через X линия уровня l^*, т. е. окружность с центром A, касается линии L.* В частности, если линия L — прямая (рис. 28), то самой близкой к A точкой этой линии является, как известно, основание перпендикуляра AX, опущенного на эту прямую (ибо перпендикуляр короче наклонной). Следовательно, по указанному выше, окружность с центром A, проходящая через точку X, касается прямой L. Таким образом, мы получаем хорошо известный факт: *касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

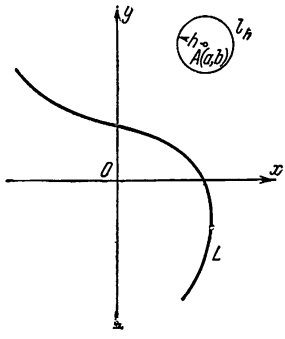
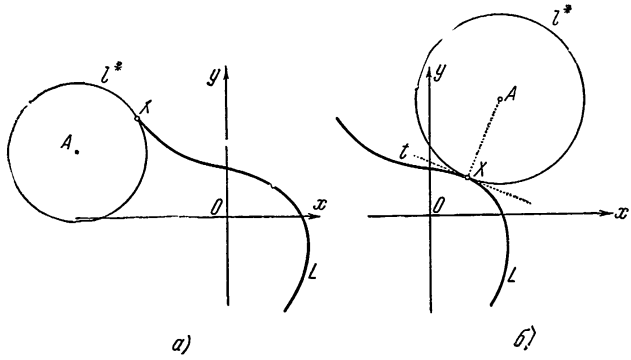


Рис. 26.

Вернемся теперь к случаю произвольной кривой L. Поскольку окружность с центром A касается кривой L в точке X (рис. 27, *б*), то радиус AX окружности, перпендикулярный, по доказанному, к общей касательной t линий L и l^*, проведенной в точке X, является *нормалью* в точке X к кривой L. Итак, *ближайшая к A точка X линии L либо является концевой точкой этой линии, либо обладает тем свойством, что AX — нормаль к кривой L, проведенная в точке X* (рис. 29, *а*, *б*).

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, если X — наиболее удаленная от A точка ограниченной линии L (рис. 30). Хорошей иллюстрацией может служить известная задача о нахождении ближайшей к A и наиболее удаленной от A точки окружности L (рис. 31). Из сказанного вытекает также, что *если L_1 и L_2 — две гладкие линии, а X_1X_2 — кратчайшее расстояние между их точками, то либо X_1 — концевая точка линии L_1, либо X_1X_2 — нормаль к L_1 в точке X_1, и аналогичное утверждение справедливо для точки X_2* (рис. 32). Такое же утверждение справедливо для отрезка Y_1Y_2, реализующего наибольшее расстояние между точками линий L_1 и L_2. На рис. 33 показаны наибольшее и наименьшее расстояния между точками двух окружностей.

1.5. Примеры. Рассуждения, проведенные в предыдущем пункте при решении задачи о наименьшем или наибольшем расстоянии



а) б)

Рис. 27.

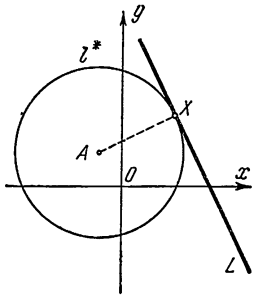
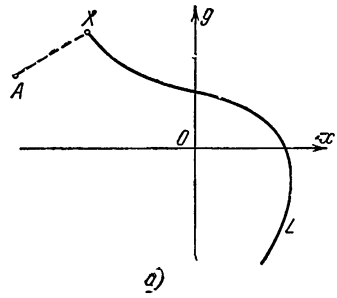
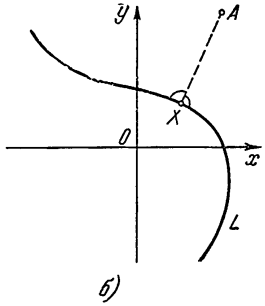


Рис. 28.



а)



б)

Рис. 29.

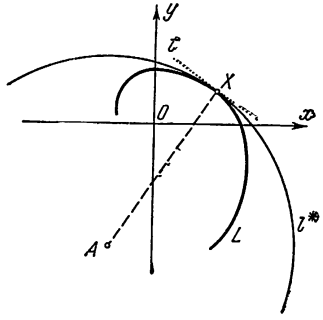


Рис 30.

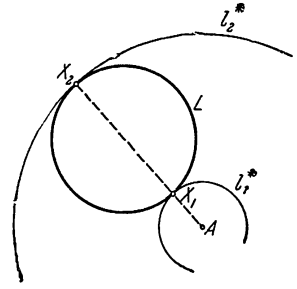


Рис. 31.

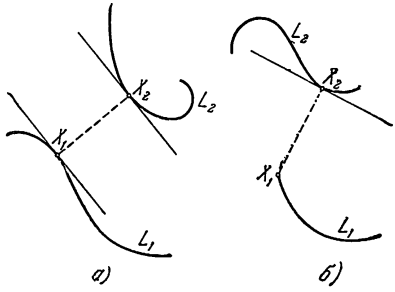


Рис. 32.

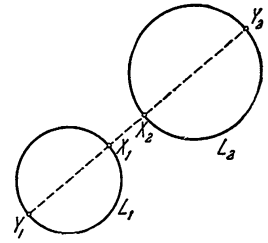


Рис. 33.

от точки до кривой, являются типичными для решения задач на условный максимум или минимум. Мы рассмотрим здесь еще несколько примеров подобных задач.

Задача 1. *На плоскости дан отрезок AB и не пересекающая его гладкая линия L; требуется найти точку X линии L, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.*

Для решения этой задачи выберем произвольную (не лежащую на прямой AB) точку X с координатами (x, y) и обозначим через $f(x, y)$ величину угла AXB, под которым из точки X виден отрезок AB[1]). Линия уровня l_h рассмотренной функции $f(x, y)$, т. е. множество всех тех точек (x, y), из которых отрезок AB

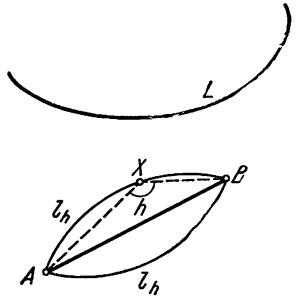


Рис. 34.

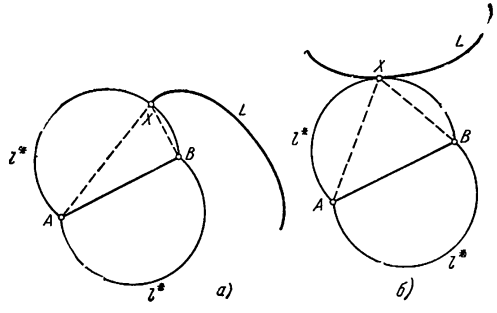


Рис. 35.

виден под углом h (в радианной мере), представляет собой «линзу», состоящую из двух равных дуг окружностей, вмещающих угол h (рис. 34). При h, близком к π, эта «линза» будет очень узкой и не пересечет линии l. Будем уменьшать h до тех пор, пока «линза» l_h не заденет линии L; иными словами, мы рассмотрим наименьшую линзу l^*, имеющую общую точку X с линией L. Точка X может быть либо концевой (рис. 35, *а*), либо внутренней точкой линии L (рис. 35, *б*). При этом во втором случае линза l^* и линия L касаются друг друга в точке X.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению: *точка X линии L, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом, либо является концевой точкой дуги L, либо обладает тем свойством, что проходящая через точку X линия уровня l^* функции $f(x, y)$ касается линии L.* Иными словами, внутренняя

---

[1]) Если точки A и B имеют соответственно координаты (a_1, a_2) и (b_1, b_2), то

$$f(x, y) = \arccos \frac{(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}\cdot\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}};$$

нам это выражение не понадобится.

точка X линии L лишь в том случае может удовлетворять требованию задачи, если проходящая через точки A, B, X окружность касается линии L в точке X.

В частности, если линия L представляет собой прямую, то концевых точек у нее нет, а окружностей, проходящих через точки A и B и касающихся прямой L, существует две (рис. 36). Поэтому точки касания X_1, X_2 этих окружностей лишь и могут

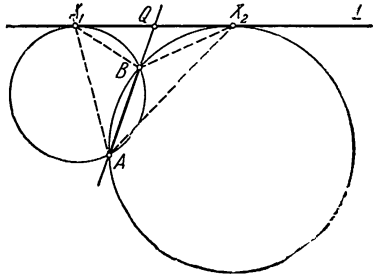


Рис. 36

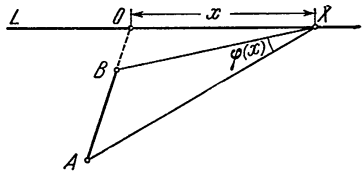


Рис. 37.

быть теми точками прямой L, из которых отрезок AB виден под наибольшим углом. С другой стороны, если точка X удаляется по прямой L в бесконечность (в ту или другую сторону), то угол AXB стремится к нулю. Поэтому функция $\varphi(x) = \angle AXB$ (рис. 37) непременно достигает максимума в какой-либо точке (см. стр. 273—275). Значит, в одной из точек X_1, X_2 угол AXB действительно принимает свое наибольшее значение. Нетрудно понять,

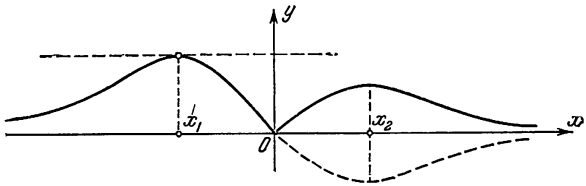


Рис. 38

что если угол AQX_1 острый (рис. 36), то из двух углов AX_1B, AX_2B большим будет угол AX_1B (поскольку окружность, проходящая через точки A, X_1, B, меньше окружности, проходящей через точки A, X_2, B). Вид функции $\varphi(x) = \angle AXB$ показан на рис. 38. Если $L \perp AB$, то функция $\varphi(x)$ достигает максимума в двух точках (рис. 39, *а*, *б*).

Аналогично решается задача об отыскании на (не пересекающей прямой AB!) линии L точки Y, из которой отрезок AB виден под наименьшим углом. На рис. 40 показаны точки X и Y кривой L, из которых отрезок AB виден под наибольшим и наименьшим углами.

Задача 2. *На плоскости даны две точки A и B и гладкая линия L, не пересекающая отрезка AB; требуется найти на линии L точку X, сумма расстояний которой от точек A и B наименьшая.*

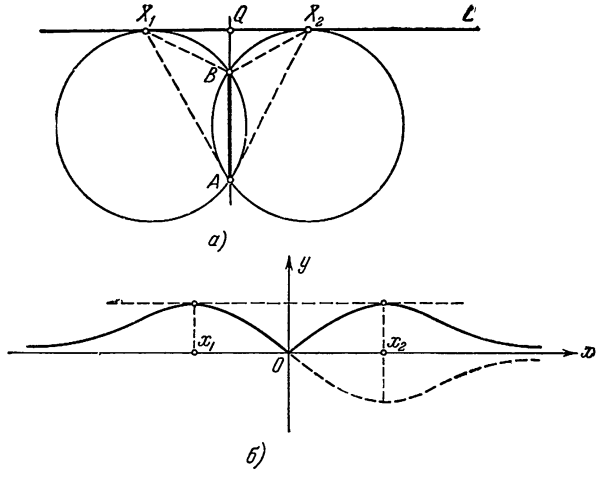


Рис. 39.

Для решения этой задачи обозначим для любой точки X с координатами x, y через $f(x, y)$ сумму расстояний XA и XB:

$$f(x, y) = AX + XB = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} + \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2},$$

где (a_1, a_2) и (b_1, b_2) — координаты точек A и B (рис. 41). Линия уровня l_h функции $f(x, y)$ определяется равенством $AX + XB = h$; т. е. представляет собой эллипс с фокусами A, B и большой осью h (см. стр. 564 и 575 этой книги ЭЭМ). При h, близком к длине отрезка AB, эллипс l_h близок к отрезку AB и потому не пересекает линии L (рис. 42). Будем увеличивать h до тех пор, пока эллипс l_h не заденет линии L. Иными словами, мы рассмотрим наименьший эллипс l^* (с фокусами A и B), имеющий общую точку X с линией L. Точка X может быть либо концевой (рис. 43, *а*), либо внутренней точкой дуги L (рис. 43, *б*), причем в последнем случае эллипс l^* и линия L касаются друг друга в точке X.

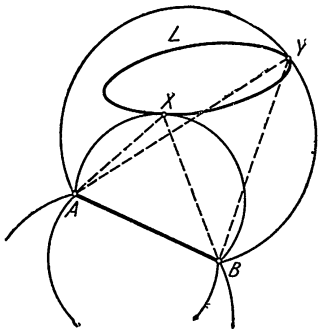


Рис. 40.

Таким образом, *точка X линии L, для которой сумма $XA + XB$ минимальна, либо является концевой точкой дуги L,*

либо обладает тем свойством, что проходящая через нее линия уровня l^* (т. е. эллипс с фокусами A, B), касается дуги L в точке X. В частности, если линия L — прямая, то искомая точка X (дающая минимум суммы $AX+XB$) совпадает, как известно, с точкой пересечения прямой L и прямой AB', где B' — точка, симметричная точке B относительно L (ибо отрезок

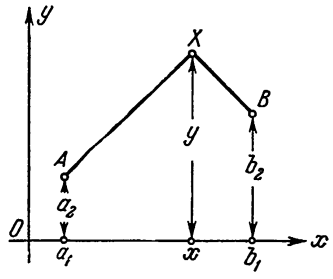


Рис. 41.

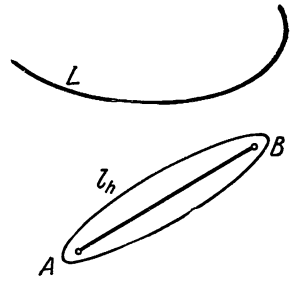


Рис. 42.

AXB' короче всякой ломаной AX_1B', рис. 44). Следовательно, по доказанному выше, эллипс с фокусами A, B, проходящий через точку X, касается прямой L (рис. 45). Заметив теперь, что $\angle AXM=\angle B'XN=\angle BXN$ (рис. 44), мы получаем следующую хорошо известную теорему: *прямая, касающаяся в точке X*

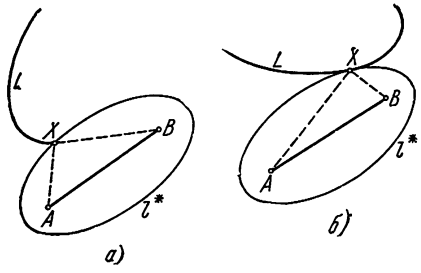


Рис. 43.

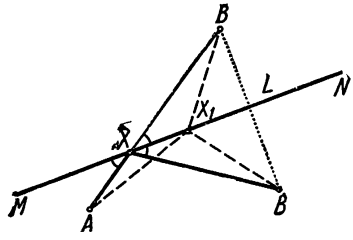


Рис. 44.

эллипса с фокусами A и B, образует равные углы с отрезками AX и BX (см. ниже, стр. 575). Возвращаясь теперь к общему случаю (ср. рис. 43, *б*), мы заключаем, что *если сумма $AX+XB$ достигает минимума во внутренней точке линии L, то отрезки AX и BX образуют равные углы с касательной t к линии L в точке X* (рис. 46). Иными словами, луч света AX, исходящий из точки A и отраженный «зеркалом» L по закону «угол падения равен углу отражения», пройдет через точку B. Мы видим, что световой луч, выходящий из точки A и попадающий в точку B

после отражения от «зеркала» L, «выбирает» кратчайший путь AXB. Этот факт является частным случаем известного

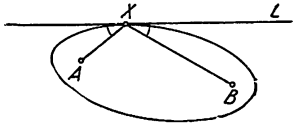


Рис. 45.

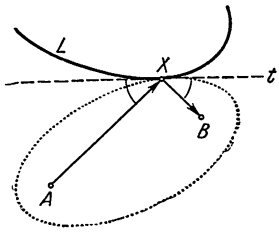


Рис. 46.

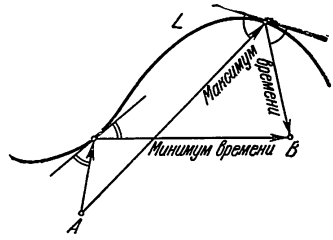


Рис. 47.

в оптике общего принципа Ферма, согласно которому свет всегда (при отражении, преломлении и т. д.) «выбирает» из всех возможных путей тот, который требует наименьшего [1]) времени прохождения.

Близкой к рассмотренной является следующая.

Задача 3. *На плоскости даны две точки A и B и гладкая линия L; на линии найти точку X, для которой абсолютная величина разности $AX-BX$ максимальна.*

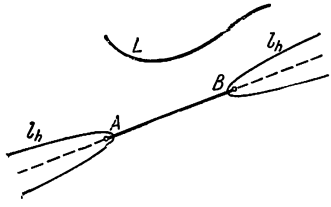


Рис. 48.

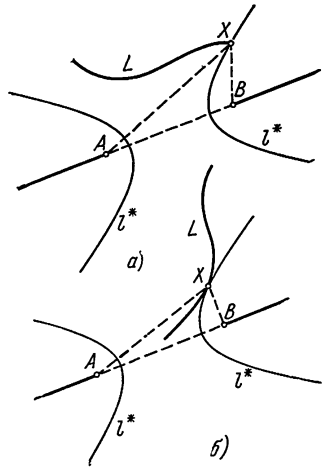


Рис. 49.

В этом случае (обозначая координаты точек A, B, X как и прежде) мы должны рассмотреть функцию

$$f(x, y)=\left|\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}-\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}\right|.$$

Задача заключается в нахождении на линии L точки $X=(x, y)$, в которой функция f принимает наибольшее значение.

---

[1]) Эта формулировка принципа Ферма не совсем точна: свет может также пойти по пути, осуществляющему локальный минимум (или даже максимум) времени прохождения; см. рис. 47.

Линия уровня l_h функции $f(x, y)$, определяется равенством $|AX-BX|=h$; она представляет собой гиперболу с фокусами A, B (см. стр. 564 и 591 этой книги ЭЭМ). Мы предположим, что линия L не пересекается с лучами, служащими продолжениями отрезка AB за его концы. Если h чуть-чуть меньше длины отрезка AB, то гипербола l_h близка к указанным двум лучам и потому не пересекает линии L (рис. 48). Будем уменьшать h до тех пор, пока мы не получим гиперболу l^*, имеющую общую точку X с линией L (рис. 49, *а*, *б*). Если точка X не является концевой точкой линии L, то линии L и l^* касаются друг друга в точке X (рис. 49, *б*).

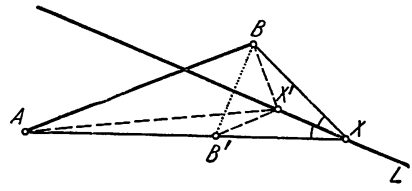


Рис. 50.

Пусть, в частности, L есть прямая, пересекающая отрезок AB (и, значит, не пересекающаяся с его продолжениями). В этом случае искомая точка X совпадает, как легко видеть, с точкой пересечения прямых L и AB', где B' — точка, симметричная B относительно L (рис. 50). В самом деле, для любой другой точки X' прямой L мы имеем

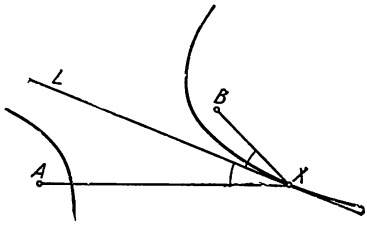


Рис. 51.

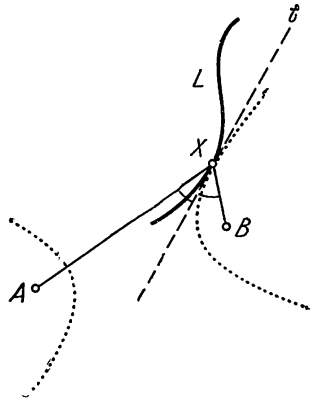


Рис. 52.

$$|AX'-BX'|=|AX'-B'X'|>AB'=|AX-B'X|=|AX-BX|.$$

Из доказанного следует (см. рис. 50), что прямая L является биссектрисой угла AXB. Но, по доказанному выше, гипербола с фокусами A и B, проходящая через точку X, касается прямой L. Таким образом, мы приходим к следующему известному свойству гиперболы: *прямая, касающаяся в точке X гиперболы с фокусами A и B, является биссектрисой угла AXB* (рис. 51). Возвращаясь к общему случаю (рис. 49, *б*), мы заключаем, что *если величина $|AX-BX|$ достигает максимума во внутренней*

точке X линии L, то касательная t к кривой L в точке X является биссектрисой угла AXB (ибо гипербола с фокусами A, B касается в точке X кривой L, рис. 52).

1.6. Метод Лагранжа. Все рассмотренные выше задачи можно объединить следующей аналитической формулировкой. *Дана некоторая функция $f(x, y)$ и в области ее определения G задана линия L, определяемая уравнением $\Phi(x, y)=0$; требуется на линии L найти точку (x, y), в которой функция f достигает наибольшего или наименьшего значения.* Иными словами, требуется среди всех точек (x, y), удовлетворяющих условию $\Phi(x, y)=0$, найти ту, в которой функция $f(x, y)$ достигает максимума (или минимума). Рассмотренные выше примеры подсказывают следующее решение этой аналитической задачи: *внутренняя точка (x^*, y^*) линии L лишь в том случае может являться решением поставленной задачи, если линия уровня l^* функции $f(x, y)$, проходящая через точку (x^*, y^*), касается в этой точке линии L* (рис. 53). Эта теорема, в самом деле, имеет место, если функции $f(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ дифференцируемы, причем в точках линии L частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ не обращаются одновременно в нуль.

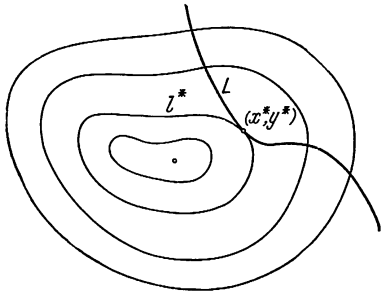


Рис. 53.

Действительно, отложим от точки (x^*, y^*) вектор $\boldsymbol{n}$ координатами

$$\left\{ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*,\ y^*)},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^*,\ y^*)} \right\}$$

(этот вектор называется *градиентом* функции f в точке (x^*, y^*)). Вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен к линии уровня l^* в точке (x^*, y^*) и направлен в сторону возрастания значений функции f. Иными словами, по одну сторону линии l^* (а именно, по ту сторону, в которую обращен вектор $\boldsymbol{n}$) значения функции $f(x, y)$ б о л ь ш е, чем на линии l^*, а по другую сторону — м е н ь ш е, чем на l^*. Если бы теперь линия L не касалась в точке (x^*, y^*) линии уровня l^*, а пересекала ее (рис. 54), то L заходила бы в о б е области, определяемые линией l^*, и потому в точке (x^*, y^*) линии L функция $f(x, y)$ не достигала бы ни максимума, ни минимума.

Доказанная теорема допускает и чисто аналитическую формулировку. Заметим, что вектор $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ направлен по нормали к линии l^*, а вектор $\boldsymbol{m}=\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right\}$ — по нормали к линии L. Так как обе линии касаются в точке (x^*, y^*), то векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ в этой точке направлены по одной прямой, т. е. существует такое число λ, что $\boldsymbol{n}=\lambda \boldsymbol{m}$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}\qquad \text{(в точке } (x^*, y^*)\text{)}.$$

Окончательно мы приходим к следующей теореме: *Если в точке (x^*, y^*) достигается максимум (или минимум) функции $f(x, y)$ при дополнитель-*

ном условии $\Phi(x, y)=0$, *то существует такое число* λ, *что обе частные производные функции*

$$F(x, y)=f(x, y)-\lambda\Phi(x, y)$$

обращаются в этой точке в нуль. Эта теорема (частный случай более общей теоремы Лагранжа) показывает, что для нахождения трех неизвестных x^*, y^*, λ мы имеем систему трех уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=0, \qquad \Phi=0.$$

Вспомогательное неизвестное λ называется *множителем Лагранжа.*

Читатель, владеющий основными представлениями n-мерной геометрии, легко обобщит сформулированную теорему Лагранжа (и приведенное ее доказательство) на случай функции $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ произвольного числа n переменных, связанных $k<n$ дополнительными условиями

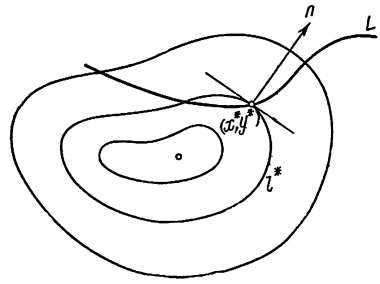


Рис. 54.

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \qquad i=1, 2, \ldots, k$$

(определяющими «$(n-k)$-мерную поверхность» в n-мерном пространстве). Именно, *если при указанных условиях функция* f *достигает в точке* $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *максимума или минимума, то существуют такие числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ («множители Лагранжа»), *что в этой точке все частные производные функции*

$$F=f-\lambda_1\Phi_1-\lambda_2\Phi_2-\ldots-\lambda_k\Phi_k$$

обращаются в нуль. Таким образом, для нахождения $n+k$ неизвестных $x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ мы имеем систему $n+k$ уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}=0, \quad \Phi_1=0, \quad \ldots, \quad \Phi_k=0.$$

Остановимся еще на вопросе о смысле оговорок «линия L, не пересекающая отрезка AB, ...», «линия L, не пересекающая прямой AB, ...» в разобранных выше задачах. Дело в том, что среди линий уровня l_h функции $f(x, y)$, минимум или максимум которой ищется, часто можно выделить «крайние», отвечающие наибольшему или наименьшему возможному значению функции f. Так, в случае, когда $f(x, y)$ выражает расстояние от точки A до точки X с координатами (x, y), наименьшему значению $f=0$ отвечает «линия уровня», вырождающаяся в одну точку (рис. 55, *а*); если $f(x, y)$ выражает угол, под которым виден из точки X отрезок AB, то наименьшему и наибольшему значениям 0 и π функции f отвечают линии уровня, представляющие собой отрезок и пару лучей (рис. 55, *б*); если $f(x, y)$—сумма расстояний от точки X до фиксированных точек A и B, то наименьшему значению функции f отвечает линия уровня, представляющая собой отрезок (рис. 55, *в*); аналогично, если величина функции $f(x, y)$ равна абсолютной величине разности расстояний от точки X до точек A и B, то наименьшему значению $f(x, y)=0$ отвечает

прямая, а наибольшему значению $f(x, y)=AB$ — пара лучей (рис. 55, *г*), а если $f(x, y)$ равно самой разности расстояний от точки X до точек A и B, то двум крайним значениям AB и $-AB$ функции $f(x, y)$ отвечают линии уровня, представляющие собой два луча. Ясно, что если подобная «крайняя» линия уровня $\tilde{l}$ встречает линию L, то в точке пересечения линий $\tilde{l}$ и L достигается минимум или максимум функции f, независимо от того, касаются или не касаются в этой точке линии $\tilde{l}$ и L. Поэтому, требуя касания линии L и линии уровня l^* функции $f(x, y)$, мы должны исключить из рассмотрения случай пересечения линий L и $\tilde{l}$. В аналитической трактовке наших выводов, связанной с рассмотрением множителей

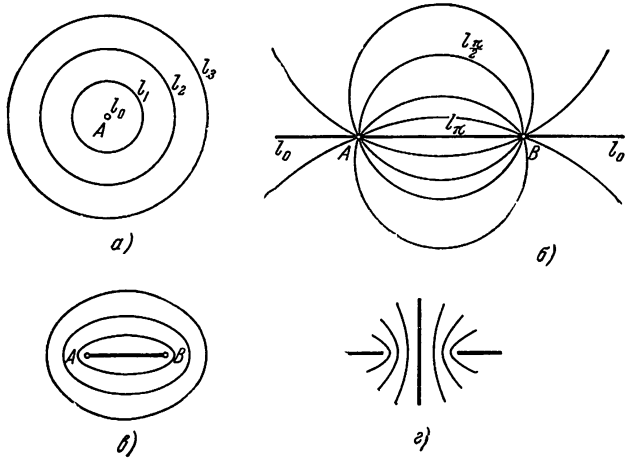


Рис. 55.

Лагранжа, исключение этого случая связано с оговоркой об отсутствии на линии L точек, в которых обобщаются в нуль обе частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{df}{dy}$; ведь ясно, что во всех точках «крайней» линии уровня $\tilde{l}$ градиент $\boldsymbol{n}$ функции $f(x, y)$ должен обращаться в нулевой вектор, поскольку здесь невозможно указать «сторону возрастания» (или убывания) функции f: при отклонении от линии $\tilde{l}$ в любом направлении функция f возрастает, если ее значение на этой линии — наименьшее, и убывает, если ее значение на линии $\tilde{l}$ — наибольшее.

1.7. Функции прямых линий. Во всех задачах предыдущего пункта требовалось найти на заданной линии L точку, в которой некоторая функция f принимает наименьшее или наибольшее значение. Часто встречаются другого рода задачи на максимум и минимум — задачи, в которых требуется найти прямую, придающую наибольшее или наименьшее значение некоторой геометрической величине. Мы рассмотрим следующую общую постановку задачи такого рода.

Задана некоторая функция f, которая каждой прямой линии a, расположенной на плоскости[1]*, придает некоторое числовое значение $f(a)$. Кроме того, задана на плоскости некоторая линия L. Требуется из всех прямых, касающихся*

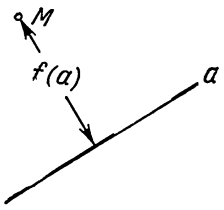


Рис. 56.

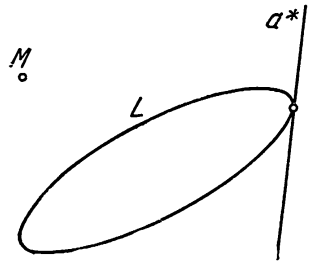


Рис. 57.

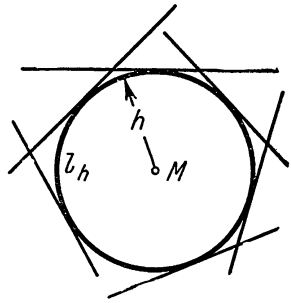


Рис. 58.

линии L, выбрать ту, для которой функция f принимает наибольшее (или наименьшее) значение.

Пусть, например, f есть расстояние прямой a от фиксированной точки M (рис. 56). Тогда сформулированная задача принимает следующий вид: *найти наиболее удаленную от M касательную a^* линии L* (рис. 57). Для решения задачи в этом частном случае мы поступим следующим образом. Рассмотрим все прямые a, для которых функция $f(a)$ принимает одно и то же значение h. Ясно, что все такие прямые касаются окружности l_h радиуса h с центром в точке M (рис. 58). Эту окружность мы назовем *линией уровня* рассматриваемой функции f. Таким образом, линии уровня функции $f(a)$ представляют собой систему концентрических окружностей с общим центром M (сама точка M также представляет собой одну из линий уровня: для каждой проходящей через нее прямой a мы имеем $f(a)=0$). Рассмотрим наибольшее значение $h=h^*$, при котором линия уровня $l_h=l^*$ еще имеет общую точку с L; иными словами, l^* — окружность с центром M, касающаяся линии L в некоторой точке Q^* и заключающая линию L внутри себя (рис. 59). Общую касательную линий L и l^*, прове-

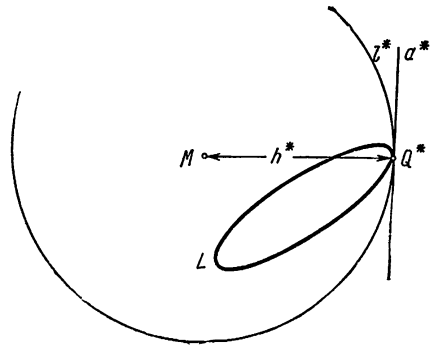


Рис. 59.

[1]) Можно таким же образом рассмотреть функции прямых линий в пространстве, функции плоскостей в пространстве и т. п. Мы на этих обобщениях не останавливаемся.

денную в точке Q^*, обозначим через a^*. Ясно, что a^* и является искомой касательной к линии L, придающей функции $f(a)$ наибольшее значение $f(a^*)=h^*$: ведь окружность еще большего радиуса содержит L строго внутри себя, и потому касательные к ней не имеют общих точек с L (и, значит, не могут касаться кривой L). Таким образом, наиболее удаленная от M касательная линии L касается L в такой точке Q^*, что *проходящая через Q^* линия уровня l^* нашей функции $f(a)$ также касается L в этой точке.*

Это положение вещей является совершенно типичным. Именно, возвращаясь к общему случаю, рассмотрим множество всех прямых a, для которых некоторая функция $f=f(a)$ принимает одно

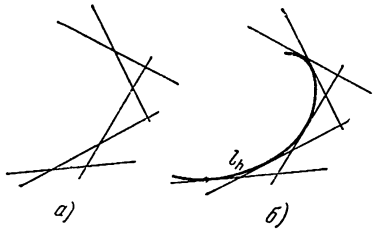


Рис. 60.

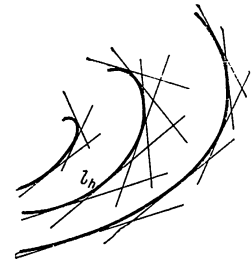


Рис. 61.

и то же значение h (рис. 60, *а*). Мы предположим, что все эти прямые касаются некоторой линии l_h (которая называется о г и б а ю щ е й рассматриваемого множества прямых; рис. 60, *б*). Иными словами, прямая a в том и только в том случае придает функции f значение h, если эта прямая к а с а е т с я линии l_h (рис. 60, *б*). Как и выше, будем называть l_h *линией уровня* функции f. Различным значениям h будут соответствовать различные линии уровня (рис. 61), причем по одну сторону линии l_h будут расположены линии уровня, соответствующие бо́льшим, чем h, значениям функции f, а по другую сторону — меньшим значениям [1]).

Обозначим теперь через h^* н а и б о л ь ш е е значение, которое принимает функция f на касательных к линии L, и пусть это значение принимается на прямой a^*, касающейся линии L в точке Q^*. Иными словами, прямая a^* является решением поставленной

---

[1]) Для справедливости последнего утверждения необходимо выполнение условия, аналогичного не обращению в нуль градиента функции. Мы на этом не останавливаемся, поскольку в дальнейшем нам встретятся лишь такие функции $f(a)$, которые монотонно возрастают (или убывают), когда мы последовательно переходим от одной линии уровня к другой. Кроме того, как линии уровня, так и линия L будут в ы п у к л ы м и, и это обеспечит корректность всех проводимых рассуждений.

задачи на максимум (для случая задачи на минимум рассуждения аналогичны). Предположим, что Q^* не является концевой точкой линии L. Так как $f(a^*)=h^*$, то прямая a^* касается линии уровня l_{h^*}, соответствующей значению $h=h^*$; эту линию уровня мы обозначим через l^*. Нетрудно видеть, что прямая a^* должна касаться линии уровня l^* в т о й ж е самой точке Q^* (рис. 62).

В самом деле, допустим, что прямая a^* касается линии уровня l^* в точке R^*, отличной от Q^* (рис. 63). Возьмем близкие к Q^* точки Q' и Q'', расположенные на линии L по разные стороны от Q. Легко понять, что касательные a' и a'', проведенные к линии L в этих точках, касаются линий уровня l' и l'', расположенных по разные стороны от l^*. Поэтому на одной

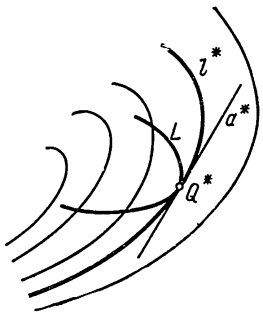


Рис. 62.

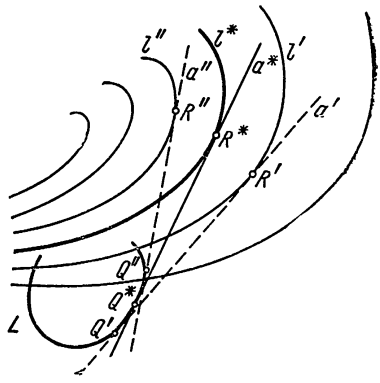


Рис. 63.

из прямых a', a'' функция f принимает значение, меньшее h^*, а на другой — большее, что, однако, противоречит максимальности значения $f(a^*)$.

Итак, *если a^* — та из касательных линии L, на которой функция $f(a)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение, то либо точка Q^* касания прямой a^* с линией L является концом линии L, либо же проходящая через Q^* линия уровня l^* функции f касается линии L в точке Q^**. Заметим, что теорема эта сохраняет свою силу и в том случае, когда линия L вырождается в одну точку Q^*. В этом случае вместо касательных к L рассматриваются всевозможные прямые, проходящие через Q^*, а условие касания линий l^* и a^* в точке Q^* сохраняется; условие касания линий l^* и L означает в этом случае, что *линия l^* проходит через точку L.*

Своеобразие рассматриваемых здесь задач заключается в том, что нам требуется найти не точку, а п р я м у ю, реализующую минимум определенной функции, зависящей от проведенной прямой a. Однако легко видеть,

что это отличие на самом деле имеет весьма несущественный характер. Условимся сопоставлять каждой прямой a определенную пару чисел ζ, η — «координат» этой прямой; так, например, можно задавать прямую a отрезками, высекаемыми прямой a на сторонах координатного угла XOY, или углом, образованным прямой a с осью OX, и ее расстоянием от начала координат. При этом наша задача состоит в том, чтобы из всех прямых a или (ζ, η), удовлетворяющих некоторому условию (например, заключающемся в том, что рассматриваемые прямые касаются фиксированной линии L), выбрать ту, для которой достигает минимума или максимума определенная функция $f(a)$ или $f(\zeta, \eta)$.

Мы можем свести эту задачу к знакомому нам типу, рассмотрев наряду с исходной плоскостью π вспомогательную «плоскость» Π с координатами (декартовыми) ζ, η точек этой плоскости. При этом множество прямых (ζ, η), касающихся линии L, определит некоторую «линию» $\bar{L}$ на плоскости Π, и нам надо будет отыскать на этой линии точку $\bar{A}$ (отвечающую искомой прямой a), реализующую минимум или максимум функции $f(\zeta, \eta)$. Но мы уже знаем, что если соответствующая точка линии $\bar{L}$ не является концевой, то в точке $\bar{A}$ линия $\bar{L}$ должна касаться линии уровня $\bar{l}^*$ функции f (рис. 64). Последнее условие означает, что если $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ — «близкие» к A точки линий $\bar{L}$ и $\bar{l}^*$, т. е. если $\bar{A}_1 \to \bar{A}$ и $\bar{A}_2 \to \bar{A}$, то прямые $\overline{\bar{A}\bar{A}_1}$ и $\overline{\bar{A}\bar{A}_2}$ стремятся к одной и той же прямой $\bar{t}$ (общей касательной линий $\bar{L}$ и $\bar{l}^*$ в точке $\bar{A}$). Возвращаясь теперь к исходной плоскости π, мы заключаем, что если касательные a_1 и a_2 линии L и «линии уровня» l^* функции прямых f стремятся к общей касательной a этих линий, то точки $a \times a_1$ и $a \times a_2$ пересечения этих касательных с a стремятся к одной и той же точке T. Но это означает, что линии L и l^* касаются прямой a в одной точке T, т. е. что в точке T эти линии касаются между собой (ср. выше, стр. 298).

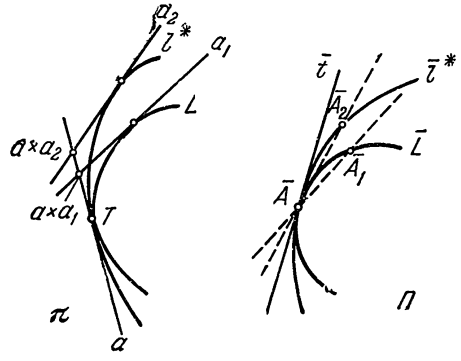


Рис. 64.

1.8. Примеры. Применим доказанную в предыдущем пункте теорему к рассмотрению нескольких геометрических задач на максимум и минимум.

Задача 1. *На плоскости даны угол AOB и линия L. Требуется определить ту из касательных к линии L, которая отсекает от угла AOB треугольник наименьшей (наибольшей) площади.*

В этой задаче мы должны рассмотреть функцию $f(a)$, равную площади треугольника, отсекаемого прямой a от угла AOB (рис. 65, *а*). Известно, что всевозможные прямые, отсекающие от угла AOB треугольники площади h (рис. 65, *б*), касаются гиперболы (точнее, одной ветви гиперболы), имеющей стороны угла AOB своими асимптотами (см. стр. 596 этой книги ЭЭМ). Таким образом, линиями уровня l_h функции f являются гиперболы с асимпто-

тами OA и OB. Согласно указанной выше общей теореме, касательная a^* линии L, отсекающая треугольник наименьшей (наибольшей) площади, должна в одной и той же точке Q^* касаться и линии L и линии уровня l^*, проходящей через точку Q^* (рис. 66, *а*). Итак, *касательная a^* к линии L, отсекающая от угла AOB треугольник наименьшей площади, должна касаться линии L*

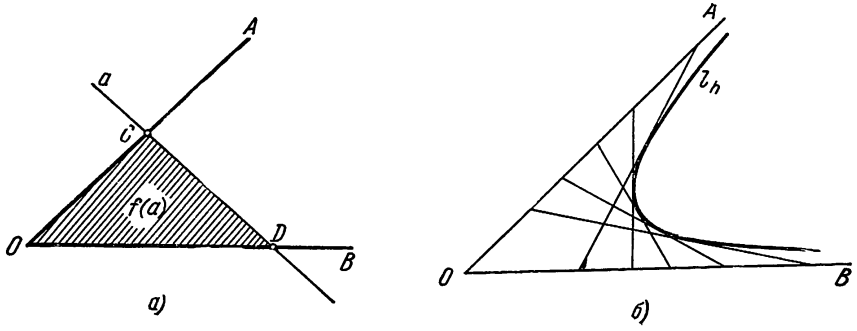


Рис. 65.

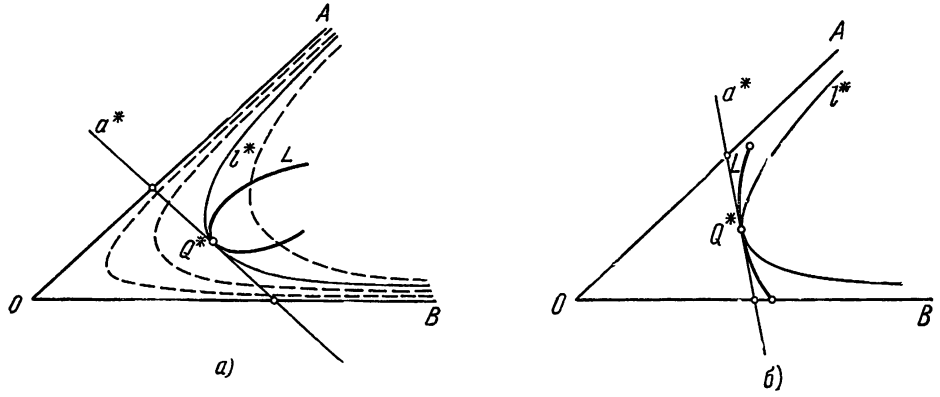


Рис. 66.

в точке Q^* касания линии L с гиперболой, асимптотами которой служат стороны угла AOB. То же справедливо и для касательной, отсекающей треугольник наибольшей площади (рис. 66, *б*).

Пусть, в частности, линия L вырождается в одну точку, лежащую внутри угла AOB. Нетрудно видеть, что *из прямых, проходящих через точку L, минимум площади отсекаемого треугольника дает та прямая a^*, отрезок которой, заключенный*

между сторонами угла, делится в точке L пополам (рис. 67) [1]. В самом деле, пусть a^* — прямая, обладающая указанным свойством, и a — другая прямая, проходящая через точку L и пересекающая стороны угла AOB в точках C и D. Тогда при обозначениях, указанных на рис. 68 (где $LE=LC$ и $\triangle LCC^*=\triangle LD^*E$):

$$S_{\Delta OCD}=S_{OCLD^*}+S_{DLD^*}>S_{OCLD^*}+S_{D^*LE}=$$
$$=S_{OCLD^*}+S_{C^*LC}=S_{\Delta OC^*D^*}$$

(если прямая a такова, что $LC>LD$, то доказательство аналогично). Итак, указанная прямая a^* действительно отсекает треугольник наименьшей площади. Но, согласно сказанному выше, отсекающая наименьший треугольник прямая должна в точке L касаться проходящей через L гиперболы с асимптотами OA и OB. Сопоставляя эти факты, мы приходим к следующему известному свойству гиперболы: *отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам* (рис. 69; ср. ниже стр. 597).

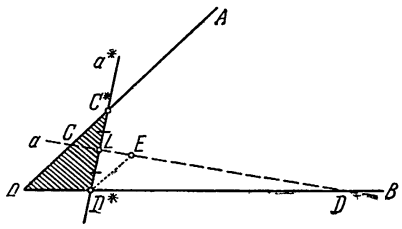


Рис. 67.

Возвращаясь теперь к случаю произвольной кривой L (см. рис. 66), мы заключаем, что *касательная a^* к линии L, отсекающая от угла AOB треугольник наименьшей (наибольшей) площади, касается линии L в такой точке Q^*, что отрезок прямой a^*,*

[1]) Существует только одна проходящая через L прямая a^*, отрезок которой, заключенный между сторонами угла AOB, делится в точке L пополам. Для построения этой прямой следует на прямой OL отложить отрезок $LK=OL$ и через точку K провести прямые, параллельные сторонам угла AOB (рис. 68).

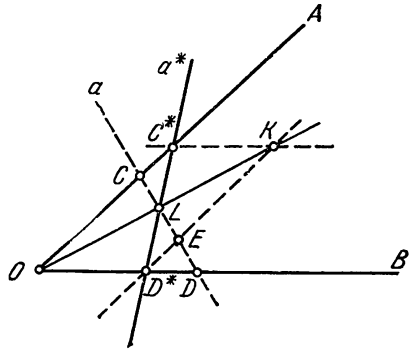


Рис. 68.

заключенный между сторонами угла AOB, делится в точке Q пополам.*

Рассмотрим еще один частный случай. Возьмем окружность, касающуюся сторон угла AOB в точках M и N, и обозначим через L *меньшую* из двух дуг с концами в точках M и N (рис. 70, *а*). Ясно, что касательная a к дуге L отсекает от угла AOB треугольник, площадь которого стремится к нулю, когда точка касания Q приближается к M или N. Следовательно, должен существовать максимум площади отсекаемого треугольника. Но, как легко видеть, существует только одна касательная a^*, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится в точке касания Q^* пополам, а именно, касательная, перпендикулярная к биссектрисе угла AOB (ибо если на рис. 70,*б* $CQ=DQ$, то, поскольку $OM=ON$ и $CM=CQ=DQ=DN$, мы имеем: $OC=OM-CM=ON-DN=OD$, откуда уже легко вытекает, что $OQ \perp CD$, т. е. OQ — биссектриса угла AOB). Следовательно, касательная a^* к дуге L, перпендикулярная к биссектрисе угла AOB, отсекает треугольник наибольшей площади.

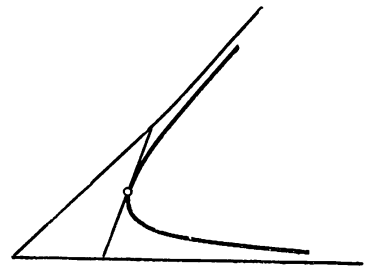


Рис. 69.

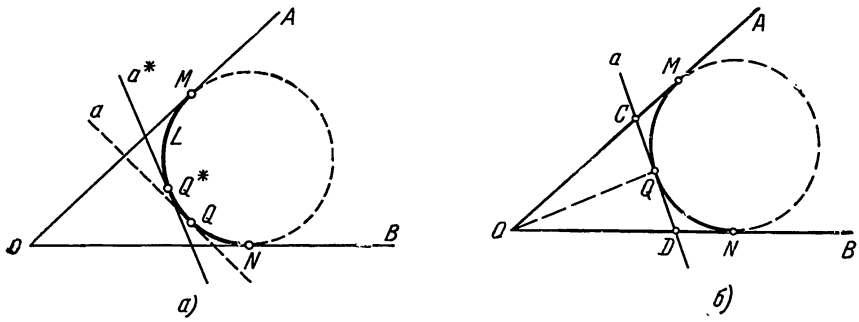


Рис. 70.

Аналогично, если за L принять бо́льшую из двух дуг MN (рис. 71), то из всех касательных к этой дуге наименьший по площади треугольник отсекает касательная, перпендикулярная к биссектрисе угла AOB.

Задача 2. *На плоскости даны угол AOB и линия L. Требуется определить ту из касательных к линии L, которая отсекает от угла AOB треугольник наименьшего (наибольшего) периметра.*

В этой задаче мы должны рассмотреть функцию $f(a)$, равную периметру треугольника, отсекаемого прямой a от угла AOB. Нетрудно доказать, что всевозможные прямые, отсекающие от угла AOB треугольник заданного периметра h, касаются одной окружности, а именно, окружности, касающейся сторон угла в таких точках M, N, что $OM=ON=h/2$; точнее говоря, все такие

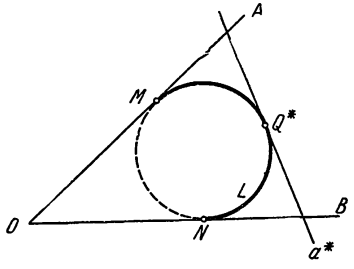


Рис. 71.

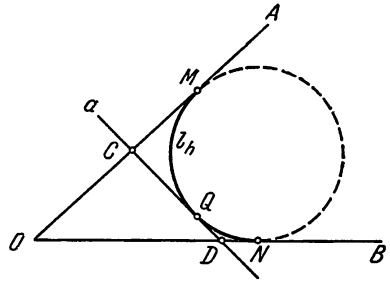


Рис. 72.

прямые касаются меньшей из двух дуг MN этой окружности (рис. 72). В самом деле, как видно из рис. 72, $CQ=CM$, $DQ=DN$, и потому

$$OC+OD+CD=OC+OD+CQ+DQ=OC+OD+CM+DN=$$
$$=OM+ON=\frac{h}{2}+\frac{h}{2}=h.$$

Таким образом, линиями уровня l_h рассматриваемой функции $f(a)$ служат дуги MN указанного вида.

Согласно указанной на стр. 299 общей теореме, *касательная a^* линии L, отсекающая треугольник наименьшего (наибольшего) периметра, должна в одной и той же точке Q^* касаться и линии L, и линии уровня l^*, проходящей через точку Q^** (рис. 73).

Как и в задаче 1, из этого общего утверждения вытекает ряд частных случаев. Укажем их здесь (без подробного обсуждения). Пусть L — точка, лежащая внутри угла AOB. Проведем через L бóльшую из двух окружностей, касающихся сторон угла AOB, и пусть a^* — касательная к этой окружности, проведенная в точке L (рис. 74). *Из всех прямых, проходящих через L, прямая a^* отсекает треугольник наименьшего периметра.*

Пусть, далее, L есть дуга MN, показанная на рис. 71. *Из всех прямых, касающихся дуги L, касательная a^*, перпендикулярная к биссектрисе угла AOB, отсекает треугольник наименьшего периметра.*

Отметим в заключение следующий вариант задачи 2, который нам понадобится в дальнейшем. Для произвольной прямой a, отсе-

кающей от угла AOB треугольник COD (ср. рис. 65, *а* на стр. 301), положим $f(a) = OC + OD - CD$; требуется из всех прямых, касающихся заданной линии L, выбрать ту, для которой функция f принимает наибольшее значение. Линиями уровня этой функции f служат большие дуги окружностей, касающихся сторон

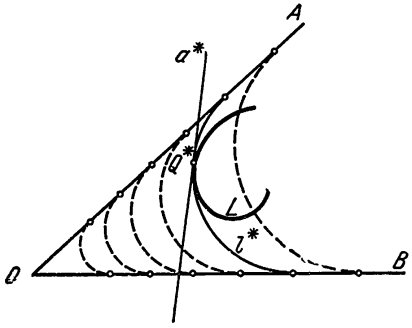


Рис. 73.

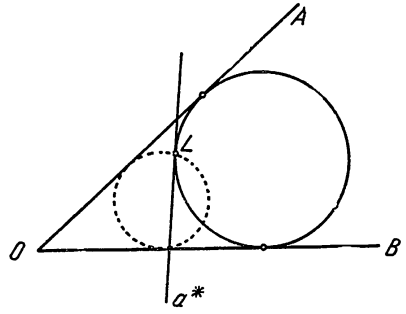


Рис. 74.

угла AOB (рис. 75)[1]). Как и в основном варианте задачи 2, *касательная* a^* *линии* L, *для которой* $f(a^*) = \max$, *должна в одной и той же точке* Q^* *касаться и линии* L, *и линии уровня, проходящей через точку* Q^*. Если, в частности, L есть дуга MN, изображенная на рис. 72, то *из всех прямых, касающихся дуги* L, *касательная* a^*, *перпендикулярная к биссектрисе угла* AOB, *придает функции* $f(a)$ *наибольшее значение.*

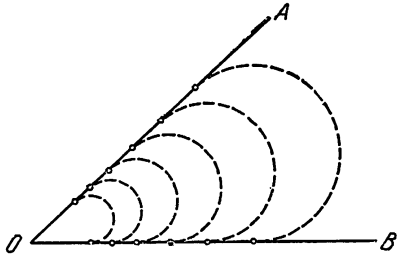


Рис. 75.

Поучительно взглянуть на задачи 1 и 2 с точки зрения тех соображений о замене прямых точками, о которых говорилось в конце п. **1.7.** Условимся характеризовать пересекающие стороны угла AOB прямые a, например, величинами ξ и η, обратными длинам отрезков OC и OD, высекаемых этими прямыми на сторонах угла (рис. 76, *а*). При этом множество касательных линии L исходной плоскости π можно представлять себе как множество пар чисел (ξ, η), т. е. некоторую линию $\bar{L}$ плоскости П, точки которой характеризуются (декартовыми) координатами ξ, η (рис. 76, *б*). Так как рассматриваемая в задаче 1 функция $f(a) = f(\xi, \eta)$ имеет, очевидно, вид $f(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\frac{1}{\xi}\frac{1}{\eta}\sin\alpha$, где $\alpha = \angle AOB$, то линии уровня функции $f(\xi, \eta)$ на плоскости П записываются уравнениями $\frac{\sin\alpha}{2\xi\eta} = h$, или $\xi\eta = \frac{\sin\alpha}{2h}$, т. е. представляют собой гиперболы (разумеется, то обстоятельство, что и на плоскости П и на плоскости π линии уровня функции $f(a)$ изобра-

[1]) Доказательство этого факта весьма близко к проведенному на стр. 304 (ср. рис. 72); оно предоставляется читателю.

жаются однотипными кривыми, является чисто случайным). Максимум или минимум функции $f(a)$ реализуется на плоскости π той касательной a^* линии L, которая касается L в точке касания линии L и линии уровня l^* функции $f(a)$ (гиперболы; см. рис. 76, *а*); на плоскости Π этой касательной отвечает точка $\overline{A}^*$ касания линии $\overline{L}$ и линии уровня $\overline{l}^*$ функции $f(\xi, \eta)$ (тоже гиперболы; рис. 76, *б*). В частности, если «линия» L представляет собой точку с координатами p, q, то все проходящие через эту точку

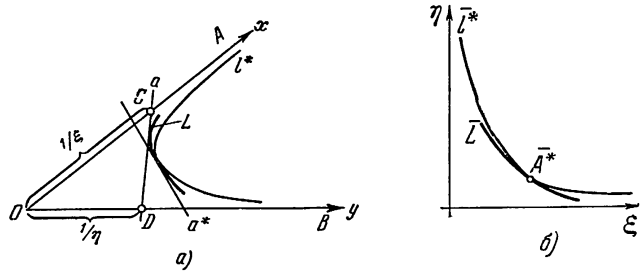


Рис. 76.

прямые a с уравнениями $\xi x+\eta y=1$ (т. е. прямые, высекающие на сторонах угла AOB отрезки $OC=\frac{1}{\xi}$ и $OD=\frac{1}{\eta}$; за оси координат мы здесь принимаем стороны угла AOB) удовлетворяют условию $\xi p+\eta q=1$, т. е. на плоскости Π «линии» L отвечает прямая $\overline{L}$ с уравнением $p\xi+q\eta=1$. Наибольшее (или наименьшее) значение функции $f(a)$ задается в этом случае касательной a^*, проходящей через точку L гиперболы l^*, или точкой $\overline{A}^*$ касания прямой $\overline{L}$ с гиперболой $\overline{l}^*$ (рис. 77).

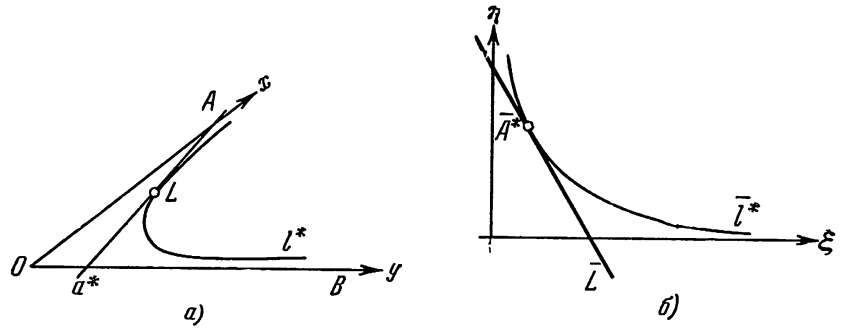


Рис. 77.

Аналогично этому обстоит дело и в случае задачи 2. Здесь линии уровня функции $f(a)$ на плоскости π представляют собой дуги окружностей (см. стр. 304). Если принять угол AOB прямым, то расстояние от центра $Q(m, n)$ окружности l_h до ее касательной a с уравнением $\xi x+\eta y=1$, как известно[1]) равно $\frac{|\xi m+\eta n-1|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$; поэтому если радиус окружности l_h

[1]) См., например, Я. С. Дубнов, Введение в аналитическую геометрию, М., Физматгиз, 1959, стр. 116—117.

равен r, то уравнение отвечающей ей линии $\overline{l}_h$ плоскости П будет иметь вид $(\xi m+\eta n-1)^2-r^2(\xi^2+\eta^2)=0$, т. е. $\overline{l}_h$—это дуга некоторой линии второго порядка [1]). Наибольшее или наименьшее значение $f(a)$ реализуется

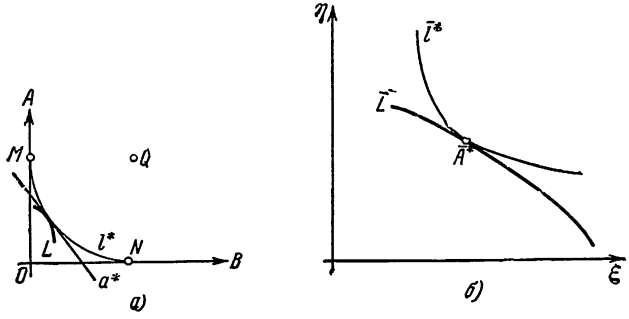


Рис. 78.

в этом случае той касательной a^* линии L, которая является одновременно и касательной к касающейся L окружности l^* (рис. 78, *а*); на плоскости П прямой a^* отвечает точка $\overline{A}^*$ касания линии $\overline{L}$, соответствующей линии L плоскости π, с линией уровня $\overline{l}^*$ функции $f(\xi, \eta)$ (рис. 78, *б*).

§ 2. Знаменитые геометрические задачи

2.1. Точка Торричелли. В этом параграфе мы рассмотрим несколько наиболее известных и важных геометрических задач на нахождение наибольших и наименьших значений. Первая из них формулируется следующим образом:

З а д а ч а. *Дан треугольник ABC; найти в его плоскости точку X, сумма расстояний которой до вершин треугольника минимальна*:

$$AX+BX+CX=\min.$$

Для решения этой задачи проведем а н а л и з. Пусть X^*—искомая точка. Точка X^* может либо совпадать с одной из вершин треугольника, либо лежать на одной из его сторон, либо же не принадлежать контуру треугольника. Рассмотрим эти три случая отдельно.

а) Пусть точка X^* с о в п а д а е т с в е р ш и н о й C. Проведем биссектрису CD треугольника ABC и возьмем на ней точку X на расстоянии $CX=h$ от вершины C (рис. 79). Применяя к треуголь-

---

[1]) В нашем случае, очевидно, $m=n=r=\frac{1}{2}h$ (ср. рис. 78, *а* с рис. 72); поэтому линия $\overline{l}_h$ будет являться дугой (ветвью) гиперболы $\left(\xi+\eta-\frac{2}{h}\right)^2=$ $=\xi^2+\eta^2$, или $\left(\xi-\frac{2}{h}\right)\left(\eta-\frac{2}{h}\right)=\frac{2}{h^2}$.

никам ACX и BCX теорему косинусов, находим:

$$AX^2 = AC^2 + h^2 - 2h \cdot AC \cdot \cos\frac{C}{2}, \qquad BX^2 = BC^2 + h^2 - 2h \cdot BC \cdot \cos\frac{C}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$AX^2 - AC^2 = h^2 - 2h \cdot AC \cdot \cos\frac{C}{2}, \qquad BX^2 - BC^2 = h^2 - 2h \cdot BC \cdot \cos\frac{C}{2},$$

и, значит,

$$AX - AC = \frac{h^2 - 2h \cdot AC \cdot \cos\frac{C}{2}}{AX + AC}, \qquad BX - BC = \frac{h^2 - 2h \cdot BC \cdot \cos\frac{C}{2}}{BX + BC}.$$

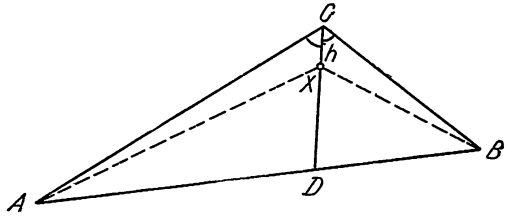


Рис. 79.

Складывая последние два равенства, находим:

$$(AX + BX) - (AC + BC) = \frac{h^2 - 2h \cdot AC \cdot \cos\frac{C}{2}}{AX + AC} + \frac{h^2 - 2h \cdot BC \cdot \cos\frac{C}{2}}{BX + BC}.$$

Но, поскольку $X^* = C$ — искомая точка,

$AC + BC \leqslant AX + BX + CX$, т. е. $(AX + BX) - (AC + BC) + h \geqslant 0$,

или

$$\frac{h^2 - 2h \cdot AC \cdot \cos\frac{C}{2}}{AX + AC} + \frac{h^2 - 2h \cdot BC \cdot \cos\frac{C}{2}}{BX + BC} + h \geqslant 0.$$

Сокращая это неравенство на h, получаем:

$$\frac{h - 2AC \cdot \cos\frac{C}{2}}{AX + AC} + \frac{h - 2BC \cdot \cos\frac{C}{2}}{BX + BC} + 1 \geqslant 0.$$

Будем теперь уменьшать отрезок h, приближая его к нулю. При этом $h \to 0$, $AX \to AC$, $BX \to BC$, и в пределе мы получаем:

$$\frac{-2AC \cdot \cos\frac{C}{2}}{AC + AC} + \frac{-2BC \cdot \cos\frac{C}{2}}{BC + BC} + 1 \geqslant 0,$$

т. е.

$$-2\cos\frac{C}{2} + 1 \geqslant 0, \qquad \cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Но это означает, что $\frac{C}{2} \geqslant 60°$, т. е. $\angle C \geqslant 120°$.

Итак, *если искомая точка X^* совпадает с вершиной C треугольника, то угол при этой вершине должен быть не меньше* 120°.

б) Пусть точка X^* лежит на стороне AB. Если отрезок CX^* не перпендикулярен к AB (рис. 80, *а*), то, взяв точку X на стороне AB, более близкую к основанию D высоты CD, чем X^*, мы найдем, что $CX^* > CX$, $AX^* + BX^* = AX + BX (= AB)$, и потому $CX^* + AX^* + BX^* > CX + AX + BX$. Но это противоречит тому, что $AX^* + BX^* + CX^* = \min$.

Пусть теперь точка X^* совпадает с основанием высоты (рис. 80, б). Возьмем на высоте CD точку X на расстоянии $DX = h$ от точки D.

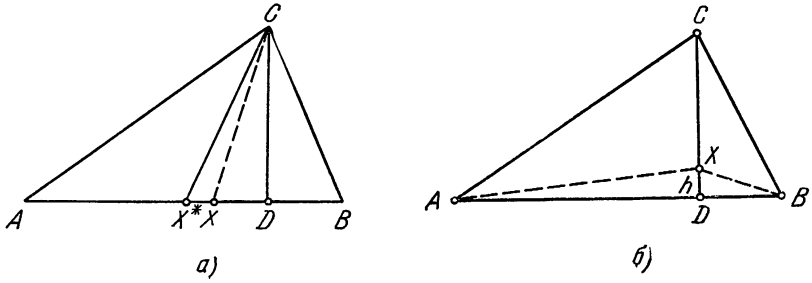


Рис. 80.

По теореме Пифагора $AX^2 - AD^2 = h^2$, $BX^2 - BD^2 = h^2$, и потому

$$AX - AD = \frac{h^2}{AX + AD}, \qquad BX - BD = \frac{h^2}{BX + BD}.$$

Поскольку $D \equiv X^*$ — искомая точка, то $AD + BD + CD \leqslant AX + BX + CX$, или $(AX - AD) + (BX - BD) \geqslant CD - CX = h$. Таким образом,

$$\frac{h^2}{AX + AD} + \frac{h^2}{BX + BD} \geqslant h,$$

или, после сокращения на h,

$$\frac{h}{AX + AD} + \frac{h}{BX + BD} \geqslant 1.$$

Будем теперь уменьшать отрезок h, приближая его к нулю. При этом $h \to 0$, $AX \to AD$, $BX \to BD$ и написанное неравенство принимает в пределе вид $0 \geqslant 1$. Противоречивость полученного неравенства показывает, что *искомая точка X^* не может лежать на стороне треугольника ABC.*

в) Пусть, наконец, искомая точка X^* не принадлежит контуру треугольника ABC (рис. 81). Проведем проходящую через X^* окружность S с центром в точке C. Для любой точки X в плоскости треугольника ABC справедливо неравенство $AX^* + BX^* + CX^* \leqslant AX + BX + CX$. В частности, это неравенство справедливо для любой точки X, принадлежащей окружности S.

Но для такой точки X имеет место равенство $CX^* = CX$, и потому $AX^* + BX^* \leqslant AX + BX$. Таким образом, X^* есть та точка X окружности S, для которой сумма расстояний $AX + BX$ минимальна. Выберем на окружности S дугу L, содержащую точку X^* и не пересекающую отрезка AB. Так как X^* — внутренняя точка дуги L и в этой точке сумма $AX + BX$ минимальна, то, согласно сказанному на стр. 291, *отрезки AX^* и BX^* должны образовывать одинаковые углы с касательной к дуге L в точке X^**, т. е. $\angle CX^*A = \angle CX^*B$ (рис. 82). Поменяв ролями точки A и C, мы точно так же получим равенство $\angle AX^*B = \angle AX^*C$. Таким образом, $\angle AX^*B = \angle AX^*C = \angle BX^*C$, откуда легко выводится, что каждый из этих трех углов равен 120° (рис. 83). Итак, *если искомая точка X^* не лежит на контуре треугольника* [1]) *ABC, то каждая из сторон треугольника видна из точки X^* под углом* 120° (откуда, в частности, следует, что точка X^* должна лежать внутри треугольника ABC). [Точка, из которой все стороны треугольника видны под равными углами, впервые рассматривалась известным итальянским физиком и математиком, учеником Галилея, Торричелли; по его имени она называется *точкой Торричелли*.]

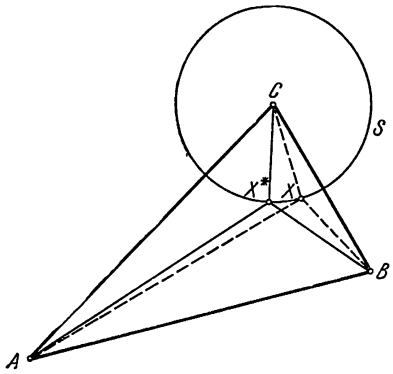


Рис. 81.

Легко видеть, что случай в) может представиться только тогда, когда *каждый из углов треугольника ABC меньше* 120°. В самом

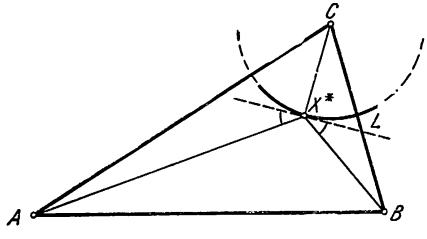


Рис. 82.

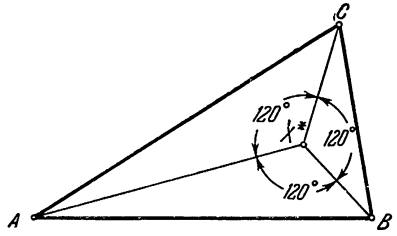


Рис. 83.

деле (рис. 84), по теореме о внешнем угле треугольника, $\angle ACM < \angle AX^*M = 60°$, $\angle BCM < \angle BX^*M = 60°$, и потому

[1]) Вдумчивый читатель сообразит, что это рассуждение может быть распространено и на случай, когда точка X^* лежит на одной из сторон треугольника (но не в его вершине!), так что указанный выше случай б) можно было бы отдельно не рассматривать.

$\angle C = \angle ACM + \angle BCM < 120°$. Аналогично $\angle A < 120°$, $\angle B < 120°$.

С другой стороны, если каждый из углов треугольника ABC меньше 120°, то существует, и притом только одна, точка X^*, из которой каждая сторона треугольника ABC видна под углом 120°: она получается в пересечении двух дуг $\smile AC$, $\smile BC$, вмещающих угол 120° (рис. 85) [1]).

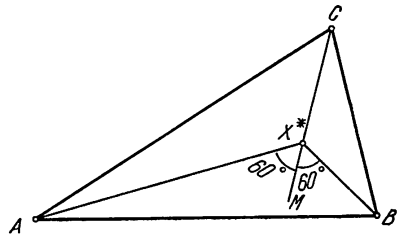


Рис. 84.

Сопоставляя рассмотренные выше случаи а) — в), мы заключаем, что для любого треугольника ABC имеется только одна точка X^*, в которой сумма $AX+BX+CX$ может достигать минимума: эта точка совпадает с вершиной угла, большего или равного 120°, если такой угол в треугольнике есть, и с точкой, из которой все стороны треугольника видны под углами 120°, если каждый из углов треугольника меньше 120°. Но достигается ли минимум суммы $AX+BX+CX$ в этой единственно возможной точке X^*? Легко видеть, что это действительно так. В самом

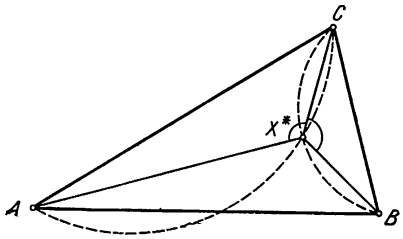


Рис. 85.

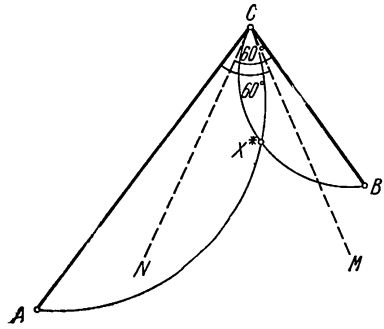


Рис. 86.

деле, если точка X удаляется в любом направлении в бесконечность, то сумма $AX+BX+CX$ неограниченно возрастает. Следовательно, функция $f(x, y)=AX+BX+CX$ (где x, y — координаты точки X), — а эта функция, очевидно, непрерывна, — должна до-

[1]) Пусть, например, $\angle C \geqslant 60°$ (угол, не меньший 60°, в треугольнике всегда есть). На сторонах AC и BC построим внутри угла ACB дуги, вмещающие угол 120° (эти дуги целиком заключены внутри угла ACB, поскольку касательные CM и CN к ним в точке C образуют с соответствующими сторонами угол, равный 60°, а угол ACB не меньше 60°, рис. 86). Так как $\angle C < 120°$ и потому $\angle BCM = \angle C - 60° < 60°$, то проведенные дуги пересекаются. Если X^* — точка пересечения дуг, то $\angle AX^*C = \angle BX^*C = 120°$, откуда следует (поскольку точка X^* лежит внутри угла ACB), что $\angle AX^*B = 120°$ и точка X^* лежит внутри треугольника ABC. Из построения также видно, что точка X^*, для которой $\angle AX^*B = \angle BX^*C = \angle CX^*A = 120°$, единственна.

стигать минимума в некоторой точке (см. стр. 282). Но может она достигать минимума лишь в одной найденной выше точке X^*. Следовательно, функция $f(x, y) = AX + BX + CX$ действительно достигает минимума в точке X^*.

2.2. Вариант задачи о точке Торричелли. С задачей п. **2.1** интересно сопоставить следующую близкую к ней задачу.

Задача. *Дан треугольник ABC; найти в его плоскости точку Y^*, для которой достигает минимума сумма расстояний от этой точки до двух*

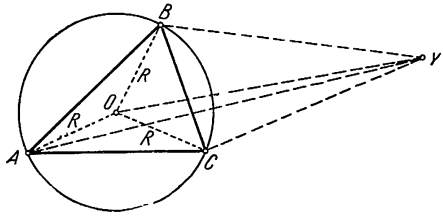


Рис. 87.

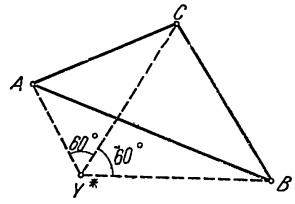


Рис. 88.

вершин треугольника, уменьшенная на расстояние до третьей вершины: $AY + BY - CY = \min$.

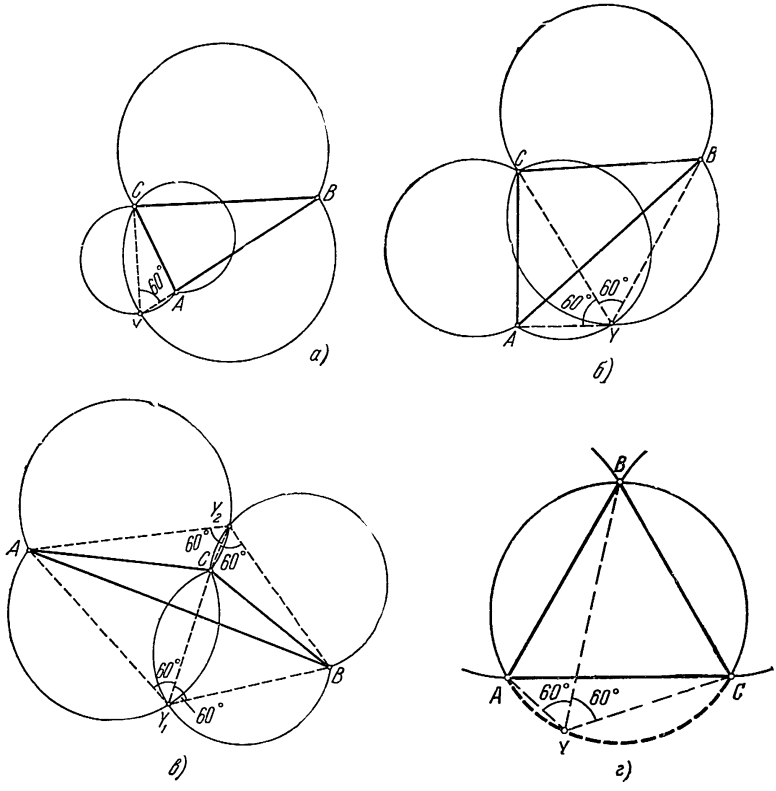


Рис 89.

Заметим прежде всего, что при неограниченном удалении точки Y от треугольника ABC выражение $AY + BY - CY$ неограниченно растет: в самом

деле, если O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности и R — ее радиус, то (рис. 87) $AY+BY-CY \geqslant (OY-AO)+(OY-BO)-(OY+CO) = OY-3R$. Поэтому в некоторой точке Y^* плоскости минимум выражения $AY+BY-CY$ достигается.

Рассуждение, аналогичное рассмотренному выше случаю в) и использующее результаты задач 2 и 3 п. **1.5**, показывает, что *если точка Y^* не совпадает ни с одной из вершин треугольника ABC, то из этой точки сторона AB треугольника видна под углом* 120°, *а стороны AC и BC — под углами* 60° (рис. 88).

Точка, из которой стороны видны под указанными углами, может не существовать (рис. 89, *а*; единственная точка пересечения «линз», вмещающих угол 60°, требованиям не удовлетворяет); она может быть единственной (рис. 89, *б*), а при $\angle C > 120°$ таких точек будет две (рис. 89, *в*). Особым здесь является случай правильного треугольника ABC; в этом случае

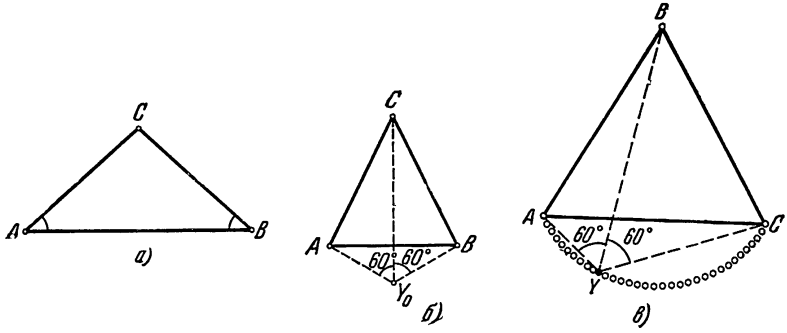


Рис. 90.

указанные точки заполняют дугу AB описанной около треугольника окружности (рис. 89, *г*). Добавив к указанным точкам вершины треугольника (легко видеть, что достаточно взять ту из вершин A, B, которая лежит против меньшей стороны), мы и получаем множество всех тех точек, в которых может достигаться минимум выражения $AY+BY-CY$. Однако вопрос о том, в какой именно из этих точек действительно достигается минимум, довольно сложен — все зависит от вида треугольника. Например, если треугольник ABC равнобедренный: $AC=BC$, то, как показывает несложный подсчет, минимум величины $AY+BY-CY$ при условии $\angle A < 60°$ достигается в двух точках, а именно в вершинах A и B (рис. 90, *а*); при условии $\angle A > 60°$ минимум достигается в единственной точке Y_0, из которой стороны видны под требуемыми углами (рис. 90, *б*); наконец, при $\angle A = 60°$ (равносторонний треугольник) искомые точки Y заполняют дугу AB описанной окружности (включая обе точки A, B; рис. 90, *в*).

2.3. Некоторые общие вопросы учения о наибольших и наименьших значениях геометрических величин. Задача п. **2.1.**, а также задачи, рассмотренные на стр. 276—278, были решены нами по одной и той же схеме. В этих задачах требовалось найти точку или фигуру, обладающую некоторым свойством минимальности или максимальности: коробку наибольшего объема, цилиндр наименьшей поверхности, точку с наименьшей суммой расстояний до вершин треугольника. Решение каждой из указанных задач состояло из двух частей. Одна часть решения (условимся называть ее

анализом) заключалась в получении необходимых условий, которым должна удовлетворять искомая максимальная (минимальная) фигура, а также в отыскании той фигуры, которая этим необходимым условиям удовлетворяет. Так, условие равенства нулю производной (являющееся необходимым для того, чтобы функция достигала во внутренней точке максимума или минимума) позволило в задачах на стр. 276—278 выделить единственную фигуру, удовлетворяющую этому условию, т. е. единственную фигуру, которая может обладать требуемым свойством минимальности или максимальности. В задаче Торричелли анализ был более сложным, но и в этом случае нам удалось показать, что существует только одна точка, которая может обладать требуемым свойством минимальности.

Однако одним анализом решение рассмотренных задач не ограничивалось. В каждом случае была еще и вторая часть решения, которую мы условимся называть доказательством существования. В этой части решения мы устанавливаем, что фигура, обладающая требуемым свойством максимальности или минимальности, непременно должна существовать. Наконец, после проведения обеих указанных частей решения мы говорили, что, поскольку имеется лишь одна фигура, которая может обладать требуемым свойством минимальности или максимальности, а с другой стороны, фигура, обладающая этим свойством, непременно существует, то, следовательно, найденная фигура действительно обладает требуемым свойством. Этим решение задачи на максимум или минимум и завершилось.

Итак, целью анализа является нахождение фигуры, которая может обладать требуемым свойством максимальности или минимальности[1]). Доказательство существования устанавливает, что фигура, обладающая требуемым свойством, непременно существует. Из этих двух частей (анализ и доказательство существования) состояло решение каждой из рассмотренных выше задач. По той же схеме будет построено и решение последующих задач.

Остановимся на вопросе о роли каждого из двух отмеченных этапов решения задачи на отыскание наибольших и наименьших значений. В большинстве случаев основные трудности при решении задачи представляет анализ; доказательство существования чаще всего вытекает естественным образом из хорошо известных общих теорем (теорема Больцано—Вейерштрасса, известная из курсов

---

[1]) Разумеется, может случиться, что существует не одна, а несколько фигур, обладающих требуемым свойством минимальности (или максимальности); в таком случае задача анализа заключается в выделении всех этих фигур.

математического анализа [1]), изложенные в п. 1.1 свойства непрерывных функций, теорема Бляшке о сходящихся последовательностях выпуклых фигур [2]) и т. д.). Но можно ли на этом основании пренебрегать доказательством существования? Или, в более полной формулировке, пусть в результате анализа установлено, что только одна фигура Φ_0 может обладать требуемым свойством минимальности или максимальности; можно ли на этом основании утверждать, что фигура Φ_0 действительно обладает этим свойством?

Нетрудно видеть, что ответ на поставленный вопрос является отрицательным: из того, что только фигура Φ_0 может обладать интересующим нас свойством, еще вовсе не следует, что она действительно им обладает. Для иллюстрации рассмотрим задачу о *нахождении наибольшего из всех натуральных чисел.* Анализ в этой задаче можно провести следующим образом. Если n — произвольное натуральное число, отличное от 1, то число n^2 (также принадлежащее множеству натуральных чисел), очевидно, больше n; поэтому число n заведомо не может быть наибольшим. Таким образом, наибольшим может оказаться лишь число 1; однако отсюда, разумеется, вовсе не следует, что это число является наибольшим: в самом деле, в нашем случае числа, обладающего требуемым свойством максимальности, вовсе не существует.

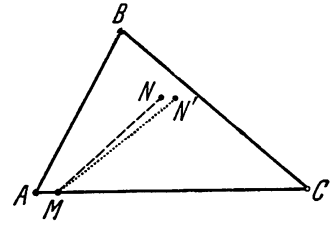


Рис. 91.

Аналогичным образом можно провести анализ и в задаче о *нахождении наименьшего числа в множестве N положительных дробей* $\frac{m}{n}$, *где* $m \leqslant n$. Здесь также, если $\frac{m}{n} \neq 1$, то $\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$, и поэтому никакая дробь, отличная от 1, не может быть наименьшей. Но это еще вовсе не доказывает, что дробь 1 на самом деле является наименьшей: наименьшей дроби множество N вовсе не содержит.

Наконец, в качестве геометрического примера можно рассмотреть, скажем, задачу о *нахождении самых далеких друг от друга точек изображенного на рис.* 91 *треугольника ABC, из числа точек которого исключена вершина C* (но не вершины A и B!). Легко видеть, что если пара точек M, N полученной таким образом фигуры Φ отлична от точек A, B, то можно слегка сдвинуть одну из этих точек так, чтобы расстояние между точками увеличилось. Таким образом, наибольшее расстояние между точками фигуры Φ может реализовать лишь пара точек A, B; однако эта пара

[1]) См. стр. 173 кн. III ЭЭМ.
[2]) См. стр. 226 этой книги ЭЭМ.

точек вовсе не является парой самых далеких друг от друга точек фигуры Ф, поскольку такой пары точек вовсе не существует.

Все сказанное достаточно убедительно демонстрирует роль доказательства существования в решении задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин. Однако одно лишь доказательство существования, не сопровождаемое исчерпывающим анализом, также не представляет особенно большой ценности. В качестве примера упомянем здесь о следующей интересной задаче, поставленной еще в 1914 году знаменитым французским математиком Анри Лебегом.

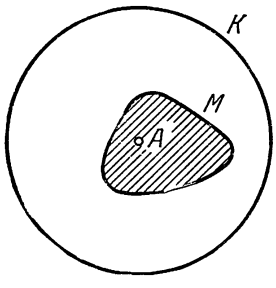


Рис. 92.

Назовем *универсальной покрышкой* такую фигуру F, которой можно покрыть любое множество M точек, никакие две из которых не находятся друг от друга на расстоянии, большем 1. Задача Лебега заключается в том, чтобы *найти универсальную покрышку наименьшей возможной площади*. Ясно, что универсальные покрышки существуют: таковой является, например, круг K радиуса 1, поскольку, совместив центр K круга с любой точкой A рассматриваемого множества, мы наверное покроем все множество (рис. 92). Далее, из теоремы Бляшке о множествах выпуклых тел (стр. 226) нетрудно вывести доказательство существования требуемой минимальной универсальной покрышки (похожие доказательства приводятся ниже на стр. 330 и 335—336). Однако какова эта покрышка? Сегодня мы знаем целый ряд сравнительно «экономных» универсальных покрышек: так, из теоремы Юнга (см. стр. 341 этой книги ЭЭМ) следует, что универсальной покрышкой является круг K_1 радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (рис. 93, *а*); можно доказать, что универсальной покрышкой является также правильный шестиугольник K_2, получаемый из круга K_1 отсечением от последнего шести сегментов (рис. 93, *б*); если вписать в шестиугольник K_2 окружность S и отсечь два несмежных и не противоположных угла этого шестиугольника при помощи перпендикулярных биссектрисам углов касательных окружности S, то полученная фигура K_3 (рис. 93, *в*) также будет являться универсальной покрышкой, причем все еще не минимальной, и т. д. Однако никакие пути для анализа задачи, позволяющие выделить одну или несколько фигур, которые только и могут явиться искомыми «минимальными» покрышками, пока не обнаружены; поэтому можно считать, что поставленная задача до сих пор остается почти столь же далекой от своего решения, как и во времена Лебега.

Таким образом, оба этапа решения задачи на максимум или минимум — анализ и доказательство существования — являются

совершенно необходимыми; если одно доказательство существования не доставляет нам никакой информации о виде решения, то пренебрежение анализом может привести к прямым ошибкам. При этом в большинстве случаев доказательство существования связано с рассуждениями и идеями, родственными математическому анализу; «геометрическая» часть решения задачи, напротив, связана с этапом анализа.

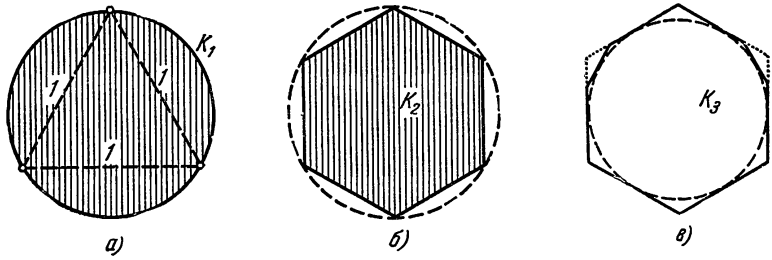


Рис. 93.

Разумеется, указать общие рецепты проведения анализа, годные абсолютно во всех случаях, совершенно невозможно. Мы здесь отметим два достаточно общих приема, которыми мы пользовались выше и которые будем применять в дальнейшем. Первый прием — использование линий уровня: если во внутренней точке X линии L функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение, то проходящая через точку X линия уровня функции f касается линии L (при этом предполагается, что в точке X градиент функции f отличен от нуля). Этим приемом мы пользовались на стр. 300—305, а также при рассмотрении случая в) в задаче Торричелли.

Второй прием, часто применяемый при проведении анализа,— так называемое геометрическое дифференцирование. Смысл его заключается в следующем. Произвольную фигуру Φ^* (из заданного класса $\mathfrak{A}$) мы включаем в семейство фигур, зависящее от некоторого параметра h, т. е. для каждого числа h (скажем, неотрицательного) мы определяем фигуру Φ_h, причем при $h=0$ мы получаем заданную фигуру $\Phi_0=\Phi^*$. Если заданная фигура $\Phi^*=\Phi_0$ обладает свойством минимальности

$$l(\Phi_0)\leqslant l(\Phi) \qquad (*)$$

для любой фигуры Φ класса $\mathfrak{A}$, то, в частности, $l(\Phi_0)\leqslant l(\Phi_h)$ для любого h, и потому, придавая h неотрицательные значения, приближающиеся к нулю, мы находим:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}} \frac{l(\Phi_h)-l(\Phi_0)}{h}\geqslant 0. \qquad (**)$$

При этом стараются подобрать семейство Φ_h таким образом, чтобы указанный предел мог быть несложно вычислен. В таком случае неравенство (**) представляет собой некоторое необходимое условие, которое должно выполняться, если фигура $\Phi_0\,(=\Phi^*)$ обладает свойством минимальности (см. (*)).

Как правило, удачно проведенное геометрическое дифференцирование позволяет сразу же отбросить огромное число фигур (не удовлетворяющих необходимому условию (**)), после чего остается одна или несколько фигур, которые только и могут быть минимальными. Мы пользовались методом геометрического дифференцирования при исследовании случаев а) и б) в задаче Торричелли. Например, в случае а) в качестве фигуры Φ_h мы взяли точку X, находящуюся на биссектрисе CD на расстоянии h от точки C, а минимизируемая величина $l\,(\Phi_h)$ определялась равенством

$$l\,(\Phi_h) = l\,(X) = AX + BX + CX =$$
$$= (AC + BC) + \frac{h^2 - 2h \cdot AC \cdot \cos\frac{C}{2}}{AC + AX} + \frac{h^2 - 2h \cdot BC \cdot \cos\frac{C}{2}}{BC + BX} + h.$$

Заметим еще, что часто в результате анализа оказывается выделенной не одна, а несколько фигур, удовлетворяющих необходимым условиям. Например, если в задаче о точке Торричелли ограничиться анализом, проведенным в случае в), то мы установим, что, когда все углы треугольника ABC меньше 120°, требуемым условиям может удовлетворять либо вершина наибольшего угла A треугольника, либо точка Торричелли X_0, и лишь рассмотрения, проведенные в случае а), позволяют установить, что в этом случае именно точка Торричелли доставляет нам решение задачи (ср. также п. **2.2**). Иногда геометрическое дифференцирование оказывается возможным заменить прямым сравнением между собой всех выделенных фигур, преследующим цель выяснить, какую из них следует предпочесть. Так, в п. **2.1** можно было бы провести лишь рассуждения пункта в), устанавливающие, что минимум расстояний до вершин треугольника может достигаться либо для вершины A наибольшего угла, либо для точки Торричелли X_0 (существующей лишь в треугольнике, все углы которого меньше 120°). Далее можно рассуждать следующим образом. Опустим из вершины A перпендикуляры AP и AQ на прямые CX_0 и BX_0 (рис. 94). Так как треугольники ACP и ABQ прямоугольные, то $AC > CP$ и $AB > BQ$.

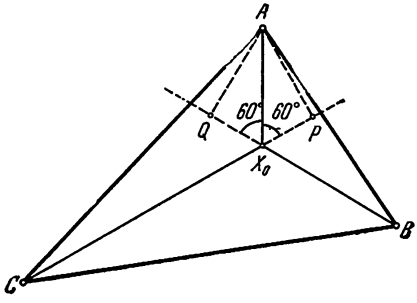


Рис. 94.

С другой стороны, так как $\angle AX_0P = \angle AX_0Q = 60°$, то $X_0P = AX_0/2$, $X_0Q = AX_0/2$ и, следовательно, $CP + BQ = CX_0 + BX_0 + (X_0P + X_0Q) = AX_0 + BX_0 + CX_0$. Поэтому

$$AC + AB > CP + BQ = AX_0 + BX_0 + CX_0,$$

откуда и вытекает, что точка A никак не может удовлетворять требуемому условию минимальности.

Указанная выше схема решения задачи на максимум или минимум (анализ + доказательство существования) не является единственно возможной. Пусть, например, выделен какой-либо класс геометрических фигур и мы ставим задачу найти в этом классе такую фигуру Ф, для которой некоторая геометрическая величина $l(\Phi)$ (скажем, длина определенной части фигуры, площадь или объем) принимает наименьшее возможное значение: $l(\Phi) = \min$.

Предположим, что в результате анализа мы выделили из класса $\mathfrak{A}$ единственную фигуру Φ_0, которая *может* оказаться минимальной. Ясно, что если бы мы обладали непосредственным доказательством того факта, что для *любой* фигуры Ф класса $\mathfrak{A}$ справедливо неравенство $l(\Phi_0) \leqslant l(\Phi)$, то решение поставленной задачи на минимум было бы завершено. В таком случае говорят, что мы имеем *прямое доказательство* минимальности фигуры Φ_0. Ясно, что всякое прямое доказательство содержит *больше*, чем доказательство существования. Ведь в результате доказательства существования мы лишь устанавливаем, что в классе $\mathfrak{A}$ существует *какая-то* минимальная фигура, в то время как прямое доказательство не только устанавливает существование минимальной фигуры, но и указывает, *какая именно* фигура минимальна: из неравенства $l(\Phi_0) \leqslant l(\Phi)$ для любой фигуры Ф класса $\mathfrak{A}$ мы видим, что можно указать вполне определенную минимальную фигуру, а именно Φ_0.

Поскольку прямое доказательство содержит больше, чем доказательство существования, можно ожидать, что получить прямое доказательство *труднее*, чем доказательство существования. Как правило, так и бывает; этим и объясняется тот факт, что решение задачи по схеме «анализ + доказательство существования» более предпочтительно, чем прямое доказательство. Однако доказательства существования нередко представляют для неподготовленного математика большие идейные и логические трудности, в связи с чем, если существует *несложное* прямое доказательство, ему обычно отдается предпочтение.

Пример прямого доказательства мы имели на стр. 291 (см. рис. 44). В качестве класса фигур $\mathfrak{A}$ там следовало взять всевозможные *точки*, лежащие на прямой L, и каждая такая точка X

характеризовалась величиной $l(X)=AX+BX$. На стр. 291 было непосредственно показано, что если в качестве X взять точку пересечения прямых l и AB', то для любой другой точки X_1 прямой L будет выполнено неравенство $l(X)\leqslant l(X_1)$; иными словами, там было проведено прямое доказательство минимального свойства точки X. Другие примеры прямого доказательства были приведены на стр. 293 и 301—302 (см. рис. 50 и 67).

Целый ряд прямых доказательств теоремы о точке Торричелли (а также и теоремы, составляющей содержание нижеследующего п. **2.4**) собран в книге И. М. Яглома [8] (см. список литературы в конце статьи). Много других прямых доказательств того же рода имеется и в указанной в том же списке литературы книге Д. А. Крыжановского [4]. Однако эти доказательства, как правило, значительно сложнее решений рассматриваемых задач, использующих доказательство существования. Интересующемуся читателю мы рекомендуем сравнить прямое доказательство теоремы «из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет равносторонний» (см. стр. 33—34 книги Д. А. Крыжановского) с решением по схеме «анализ + доказательство существования», которое мы приводим ниже (стр. 335—338) для произвольных n-угольников.

Укажем в заключение этого пункта пример решения алгебраической задачи на максимум по схеме «анализ + доказательство существования». Вот эта задача:

Найти наибольшее значение произведения n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что сумма их постоянна: $x_1+x_2+\ldots+x_n=S$.

Иными словами, речь идет о нахождении максимума функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_1x_2\ldots x_n$$

при выполнении условий

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad \ldots,\quad x_n\geqslant 0,\quad x_1+x_2+\ldots+x_n=S.$$

Указанные условия выделяют замкнутое ограниченное множество [1]) в пространстве «точек» $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как функция f, очевидно, непрерывна, то она непременно достигает максимума в некоторой точке этого замкнутого ограниченного множества. Тем самым проведено доказательство существования точки, в которой функция f принимает наибольшее значение.

Проведем теперь анализ. Если среди чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеется хотя бы одно, равное нулю, то их произведение равно нулю, т. е. минимально (а не максимально). Остается рассмотреть только такие «точки», у которых все координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны. Пусть среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеются хотя бы два различных, например $x_1\neq x_2$. Положим

$$x_1'=x_2'=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

---

[1]) Читатель, знакомый с понятиями n-мерной геометрии (см. статью «Многомерные пространства» в этой книге ЭЭМ), сможет доказать, что это множество представляет собой $(n-1)$-мерный симплекс.

Ясно, что сумма всех чисел при этом не изменится:

$$x_1' + x_2' + x_3 + \ldots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = S.$$

Так как, далее,

$$x_1' x_2' - x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_1 x_2}{4} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 > 0$$

(ибо $x_1 \neq x_2$), т. е. $x_1' x_2' > x_1 x_2$, то

$$x_1' x_2' x_3 \ldots x_n > x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$

Иными словами, если среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеются хотя бы два неравных, то значение функции f в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не является максимальным. Таким образом, функция f может достигать максимума только в одной точке:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = S/n.$$

А так как доказательство существования проведено, то функция f действительно достигает максимума в этой точке.

Итак, если неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f(S/n, S/n, \ldots, S/n),$$

т. е.

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \frac{S}{n}\frac{S}{n}\ldots\frac{S}{n} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n.$$

Так как обе части этого неравенства неотрицательны, то, извлекая корень n-й степени, мы находим:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Это неравенство, связывающее среднее геометрическое $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их среднее арифметическое $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, справедливо, таким образом, для любых неотрицательных чисел, причем равенство достигается лишь при условии

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Существуют десятки прямых доказательств этого неравенства (см., например, стр. 29—35, 53—58 и 66—67 в книге: Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, «Неравенства», М., ИЛ, 1948, или стр. 12—33 в книге: Э. Беккенбах, Р. Беллман, «Неравенства», М., «Мир», 1965). Однако все они сложнее приведенного доказательства по схеме «анализ + доказательство существования». Заметим, что доказанное неравенство имеет много интересных приложений к решению геометрических задач на максимум и минимум (ср. сноску на стр. 338).

2.4. Треугольник Шварца. Сказанное в п. **2.3** проиллюстрируем следующей задачей, впервые решенной известным немецким математиком Г. А. Шварцем:

Задача. *Дан треугольник ABC; найти на его сторонах AB, BC и CA такие точки X, Y, Z, что периметр треугольника XYZ минимален:* $XY + YZ + ZX = \min$.

Так как (выпуклая) ломаная XYZ расположена внутри ломаной ABC, то периметр треугольника XYZ не превосходит периметра ABC; с другой стороны, периметр XYZ всегда будет положительным. Эти обстоятельства уже обеспечивают существование как максимума, так и минимума функции

$$f(X, Y, Z) = XY + YZ + ZX.$$

При этом максимум рассматриваемой функции, очевидно, достигается, когда, скажем $X \equiv A$, $Y \equiv B$ и $Z \equiv C$, т. е. когда треугольник XYZ совпадает с треугольником ABC. Более трудной является задача об отыскании минимума функции $f(X, Y, Z)$.

Аналогично решению задачи п. **2.1** рассмотрим отдельно два случая.

а) Пусть сначала одна из вершин искомого треугольника $X^*Y^*Z^*$ совпадает с вершиной треугольника ABC, например, пусть $X^* \equiv A$. Ясно, что периметр треугольника AYZ, где Y и Z — точки сторон BC и CA (рис. 95), будет наименьшим возможным в том случае, когда и точка Z совпадает с вершиной A; при этом точка Y должна быть выбрана на стороне BC таким образом, чтобы расстояние AY было наименьшим. Поэтому, если углы B и C треугольника ABC острые, то «треугольник» $X^*Y^*Z^*$ должен обращаться

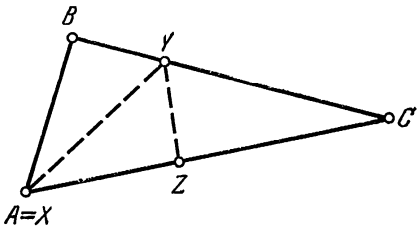


Рис. 95.

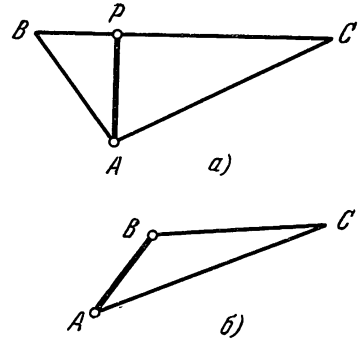


Рис. 96.

в (дважды взятую) высоту AP треугольника ABC (рис. 96, *а*); если же, скажем, угол B тупой, то «треугольник» $X^*Y^*Z^*$ обращается в (дважды взятую) сторону AB треугольника ABC (рис. 96, *б*). Таким образом, если одна из вершин искомого треугольника $X^*Y^*Z^*$ совпадает с вершиной заданного треугольника ABC, то искомый треугольник совпадает с наименьшей высотой остроугольного треугольника ABC (рис. 97, *а*) или с наименьшим из выходящих из вершины C тупого угла отрезков CA, CB и CR (где CR — высота треугольника ABC; рис. 97, *б*), т. е. снова с наименьшей высотой треугольника ABC.

Таким образом, *если одна вершина искомого треугольника $X^*Y^*Z^*$ совпадает с вершиной треугольника ABC, то $X^*Y^*Z^*$ обращается в (дважды взятую) наименьшую высоту, скажем AP, треугольника ABC.* Покажем, что этот случай не может представиться, если угол A острый.

В самом деле, пусть угол A острый (рис. 98). Обозначим через AB' отрезок, симметричный AB относительно прямой AC. Далее, отложим на AB и AB' отрезки AX и AX' длины h и проведем отрезок PX'. Так как $\angle B'AB = 2A < 180°$, то подавно

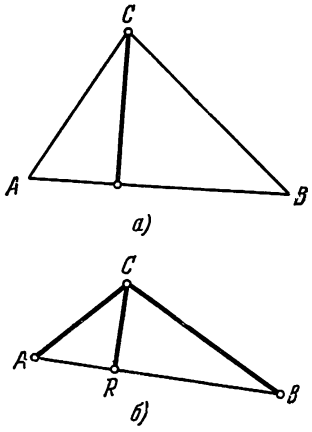


Рис. 97.

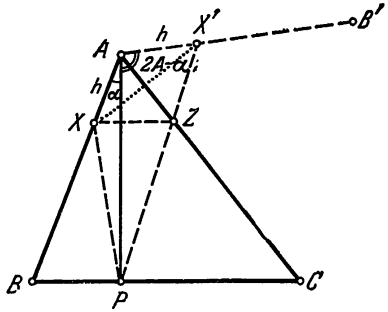


Рис. 98.

$\angle B'AP < 180°$ и отрезок PX' пересечет сторону AC в некоторой точке Z. Вычислим периметр полученного треугольника PXZ. По теореме косинусов имеем (обозначая угол BAP через α, так что $\angle B'AP = 2A - \alpha$):

$$PX^2 = AP^2 + h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos\alpha,$$
$$PX'^2 = AP^2 + h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos(2A - \alpha),$$

или

$$PX^2 - AP^2 = h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos\alpha,$$
$$PX'^2 - AP^2 = h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos(2A - \alpha),$$

откуда получаем:

$$PX - AP = \frac{h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos\alpha}{PX + AP}, \qquad PX' - AP = \frac{h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos(2A - \alpha)}{PX' + AP}.$$

Складывая эти неравенства и замечая, что $PX' = PZ + ZX' = PZ + ZX$, имеем:

$$(PX + PZ + ZX) - 2AP = \frac{h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos\alpha}{PX + AP} + \frac{h^2 - 2h \cdot AP \cdot \cos(2A - \alpha)}{PX' + AP}.$$

Если мы предположим, что удвоенная высота AP является искомым минимальным треугольником, то левая часть последнего

равенства неотрицательна; значит, неотрицательна и правая часть, т. е. (после сокращения на $h>0$)

$$\frac{h-2AP\cos\alpha}{PX+AP}+\frac{h-2AP\cos(2A-\alpha)}{PX'+AP}\geqslant 0.$$

Пусть теперь $h\to 0$ (так что $PX\to AP$, $PX'\to AP$). Написанное выше неравенство в пределе принимает вид $-\cos\alpha-\cos(2A-\alpha)\geqslant 0$, или $-2\cos A\cdot\cos(A-\alpha)\geqslant 0$. Но как угол A, так и, тем более, угол $A-\alpha$ (т. е. угол CAP) — острые углы, так что $\cos(A-\alpha)>0$, $\cos A>0$ и левая часть последнего неравенства заведомо отрицательна. Полученное противоречие и доказывает, что искомый треугольник $X^*Y^*Z^*$ может совпадать с наименьшей высотой треугольника ABC лишь в том случае, если треугольник ABC неостроугольный.

б) Пусть теперь ни одна из вершин треугольника $X^*Y^*Z^*$ не совпадает с вершиной треугольника ABC. При этом точка X^* стороны AB должна обладать тем свойством, что из всех точек отрезка AB именно для точки X^* достигается минимум суммы расстояний до фиксированных точек Y^* и Z^* сторон BC и CA. Но отсюда следует (поскольку точка X^* не совпадает ни с одной из конечных точек отрезка AB), что отрезки Y^*X^* и Z^*X^* образуют с AB равные углы (см. выше, стр. 291). Аналогичное заключение можно сделать также о точках Y^* и Z^*. Таким образом, $\angle AX^*Z^*=\angle BX^*Y^*$, $\angle BY^*X^*=\angle CY^*Z^*$, $\angle CZ^*Y^*=\angle AZ^*X^*$ (рис. 99).

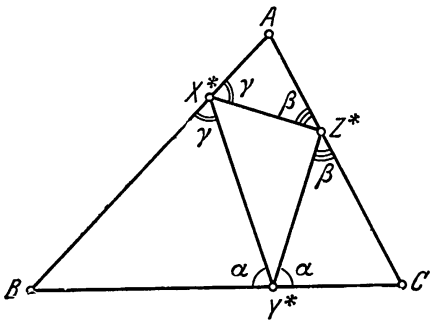


Рис. 99.

Обозначив углы, образованные сторонами треугольника $Y^*X^*Z^*$ со сторонами треугольника ABC, буквами α, β, γ, как это указано на рис. 99, получим из треугольников AX^*Z^*, BY^*X^* и CZ^*Y^*, $\beta+\gamma=180^\circ-\angle A=\angle B+\angle C$; $\alpha+\gamma=180^\circ-\angle B=\angle A+\angle C$; $\alpha+\beta=180^\circ-\angle C=\angle A+\angle B$.

Полученная система трех уравнений с тремя неизвестными α, β, γ решается без труда: $\alpha=\angle A$, $\beta=\angle B$, $\gamma=\angle C$. Таким образом, все три треугольника AX^*Z^*, BY^*X^*, CZ^*Y^* должны быть подобны исходному треугольнику ABC.

Из сказанного уже следует, что если исходный треугольник ABC прямоугольный или тупоугольный, то треугольника $X^*Y^*Z^*$ с нужными свойствами не существует: в самом деле, если, скажем, $\angle C\geqslant 90^\circ$, то условия $\angle AX^*Z^*=\angle BX^*Y^*=\angle C$ противоречат тому, что $\angle AX^*Z^*+\angle Z^*X^*Y^*+\angle BX^*Y^*=180^\circ$.

Покажем, что для о с т р о у г о л ь н о г о треугольника всегда найдется вписанный в него треугольник $X^*Y^*Z^*$, стороны которого образуют со сторонами AB, BC и CA углы $\gamma = \angle C$, $\alpha = \angle A$ и $\beta = \angle B$, как указано на рис. 99,—и притом т о л ь к о о д и н такой треугольник.

Прежде всего ясно, что если P, Q, R — основания высот (остроугольного) треугольника ABC (рис. 100), то треугольники ACR и ABQ подобны и, следовательно,

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{AB}{AC}.$$

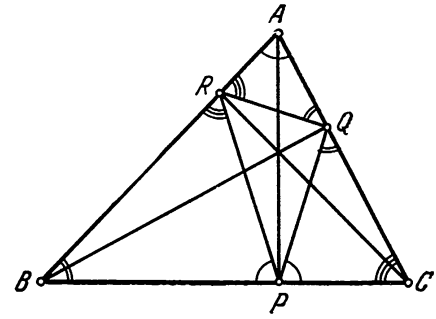


Рис. 100.

Но из последнего равенства вытекает подобие треугольников AQR и ABC, значит, $\angle AQR = \angle B$, $\angle ARQ = \angle C$.

Точно так же доказывается, что $\angle BRP = \angle C$, $\angle BPR = \angle A$, $\angle CPQ = \angle A$, $\angle CQP = \angle B$. Следовательно, треугольник PQR — искомый. Для того чтобы убедиться в отсутствии другого треугольника XYZ с теми же свойствами, достаточно рассмотреть рис. 101, где $X^*Y^*Z^*$ — треугольник, вершинами которого служат основания высот остроугольного

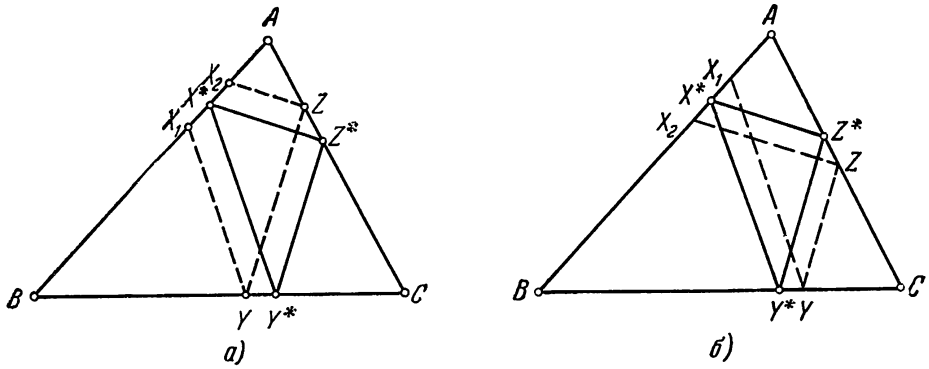


Рис. 101.

треугольника ABC, а прямые X_1Y, YZ и ZX_2 образуют со сторонами треугольника ABC такие же углы, как и прямые X^*Y^*, Y^*Z^* и Z^*X^*.

Итак, в случае тупоугольного и прямоугольного треугольника ABC вписанный в ABC «треугольник» $X^*Y^*Z^*$ наименьшего периметра может совпадать лишь с (удвоенной) наименьшей высотой AP треугольника ABC, т. е. с высотой, опущенной из вершины

тупого или прямого угла. Если же треугольник ABC остроугольный, то треугольник $X^*Y^*Z^*$ может совпадать лишь с треугольником PQR, вершинами которого служат основания высот исходного треугольника ABC. С другой стороны, периметр вписанного треугольника XYZ является непрерывной функцией трех переменных $x=BX$, $y=CY$, $z=AZ$, изменяющихся в замкнутом множестве $0\leqslant x\leqslant AB$, $0\leqslant y\leqslant BC$, $0\leqslant z\leqslant AC$ (рис. 102), и потому «минимальный» треугольник $X^*Y^*Z^*$ обязательно существует. Следовательно, искомый минимальный треугольник совпадает с удвоенной наименьшей высотой треугольника ABC, если один из углов этого треугольника не меньше 90°, и совпадает с треугольником, образованным основаниями высот треугольника ABC, если все углы треугольника ABC острые.

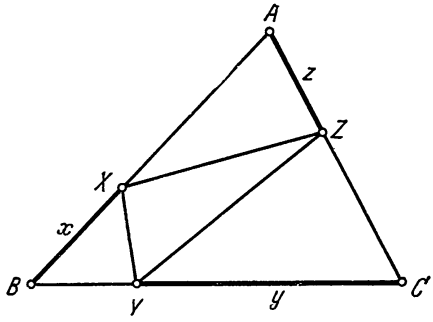


Рис. 102.

В решении этой задачи можно было бы избежать довольно громоздких выкладок, приведенных на стр. 323. Прежде всего, так как в случае тупоугольного или прямоугольного треугольника не существует вписанного треугольника XYZ, стороны которого образуют равные углы с каждой из сторон треугольника ABC, то в этом случае искомый «треугольник» $X^*Y^*Z^*$ непременно совпадает с удвоенной наименьшей высотой. Если же треугольник ABC остроугольный, то треугольник $X^*Y^*Z^*$ может совпадать с (дважды взятой) наименьшей высотой AP треугольника ABC (или с одной из его наименьших высот) или совпадать с треугольником PQR, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC. Опустим теперь из вершины A перпендикуляры AK, AL и AM на стороны PQ, QR и RP треугольника PQR. Так как (рис. 103) $\angle AQK=\angle CQP=\angle AQL$ и $\angle ARM=\angle BRP=\angle ARL$, то треугольники AKQ и ALQ, AMR и ALR равны; таким образом, $QK=QL$, $RM=RL$ и, следовательно, $PQ+PR+RQ=PQ+PR+QL+RL=PQ+PR+QK+RM=PK+PM$. Но из рассмотрения прямоугольных треугольников APK и APM следует, что $AP>PK$ и $AP>PM$. Таким образом, $PQ+PR+QR=PK+PM<2AP$, т. е. в случае остроугольного треугольника ABC вписанный треугольник наименьшего возможного периметра должен совпадать с треугольником PQR, но никак не с удвоенной высотой.

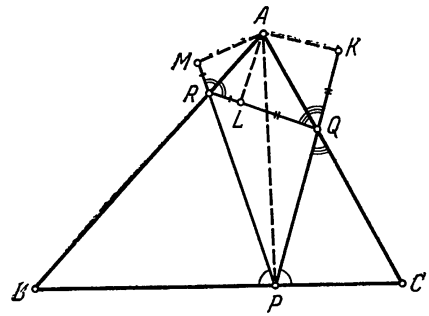


Рис. 103.

2.5. Вписанный четырехугольник наименьшего периметра. С разобранной в предыдущем пункте задачей интересно сопоставить следующую задачу:

Задача. *Дан (выпуклый) четырехугольник $ABCD$; найти на его сторонах AB, BC, CD и DA такие точки X, Y, Z и T, что периметр четырехугольника $XYZT$ минимален*: $XY+YZ+ZT+TX=\min$.

И здесь, как и в задаче п. 2.4, мы можем утверждать, что функция $f(X, Y, Z, T)=XY+YZ+ZT+TX$ достигает своего наименьшего значения, т. е. искомый (может быть вырожденный) четырехугольник $X^*Y^*Z^*T^*$ существует. Далее мы рассмотрим отдельно несколько случав.

а) Если вершина X^* искомого четырехугольника $X^*Y^*Z^*T^*$ совпадает с вершиной A четырехугольника $ABCD$, то, очевидно, и вершина T^* вписанного четырехугольника также совпадает с A. При этом

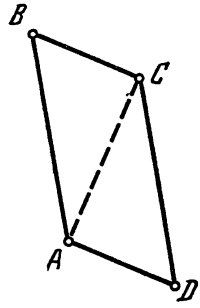


Рис. 104.

a_1) Если вершина Y^* четырехугольника $X^*Y^*Z^*T^*$ совпадает с C, то и вершина Z^* совпадает с C и четырехугольник $X^*Y^*Z^*T^*$ вырождается в (дважды взятую) диагональ AC четырехугольника $ABCD$. На рис. 104 изображен параллелограмм $ABCD$, для которого роль четырехугольника $X^*Y^*Z^*T^*$ играет дважды взятая диагональ AC.

a_2) Если вершина Y^* четырехугольника $X^*Y^*Z^*T^*$ совпадает с точкой B, то вершина Z^* либо совпадает с одним из концов отрезка CD, либо такова, что отрезки AZ^* и BZ^* образуют с CD равные углы (ср. выше, стр. 324). Но если точка Z^* совпадает с C (или с D), то четырехугольник $X^*Y^*Z^*T^*$ обращается в треугольник ABC (или ABD), периметр которого, очевидно, больше удвоенной диагонали AC (соответственно BD), и, следовательно, не является минимальным. Случай, когда точки X^* и T^* совпадают с A, точка Y^*—с B, а точка Z^* определяется условием $\angle AZ^*D=\angle BZ^*C$, может иметь место: так на рис. 105 изображена трапеция $ABCD$, для которой четырехугольник $X^*Y^*Z^*T^*$ вырождается в треугольник ABZ^*.

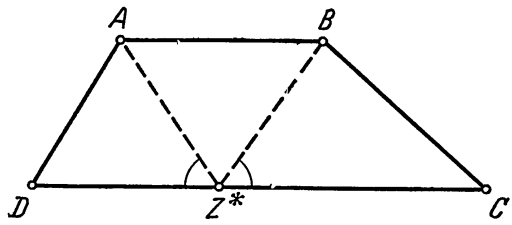


Рис. 105.

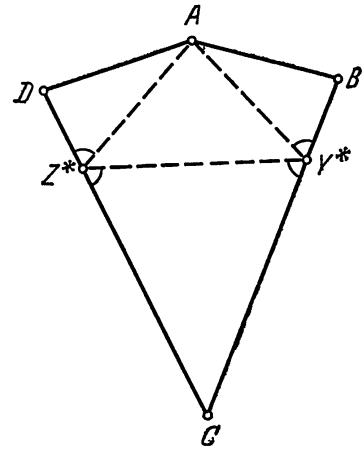


Рис. 106.

a_3) Если ни одна из вершин Y^*, Z^* не совпадает с вершиной четырехугольника $ABCD$, то точки Y^* и Z^* задаются условиями $\angle AY^*B=\angle CY^*Z^*$, $\angle CZ^*Y^*=\angle DZ^*A$. Этот случай иллюстрируется рис. 106, на котором изображен ромбоид $ABCD$ (четырехугольник с двумя парами равных смежных сторон: $AB=AD$, $CB=CD$); четырехугольник $X^*Y^*Z^*T^*$ вырождается здесь в треугольник AY^*Z^*.

б) Предположим теперь, что ни одна из вершин четырехугольника $X^*Y^*Z^*T^*$ не совпадает с вершинами четырехугольника $ABCD$, так что $X^*Y^*Z^*T^*$ является истинным (невырожденным) четырехугольником Так как, скажем, точка X^* реализует минимум суммы расстояний от точек

Y^* и T^* до отрезка AB, то (ср. выше, стр. 324) $\angle AX^*T^* = \angle BX^*Y^*$. Аналогично этому имеем: $\angle BY^*X^* = \angle CY^*Z^*$, $\angle CZ^*Y^* = \angle DZ^*T^*$, $\angle DT^*Z^* = \angle AT^*X^*$. Но отсюда следует, что в обозначениях рис. 107

$$\angle A + \angle C = (180° - \alpha - \delta) + (180° - \beta - \gamma) = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

и

$$\angle B + \angle D = (180° - \alpha - \beta) + (180° - \gamma - \delta) = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

а следовательно,

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

Таким образом, случай б) может иметь место лишь тогда, когда суммы противоположных углов четырехугольника $ABCD$ равны, т. е. когда *четырехугольник $ABCD$ может быть вписан в круг.*

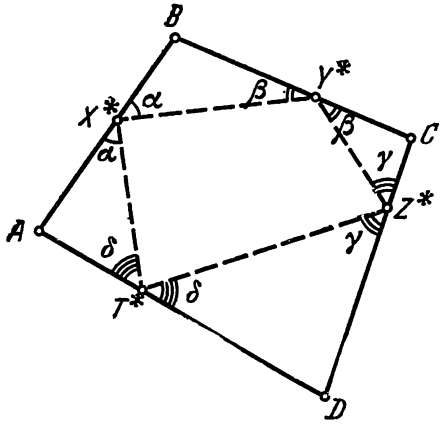


Рис. 107.

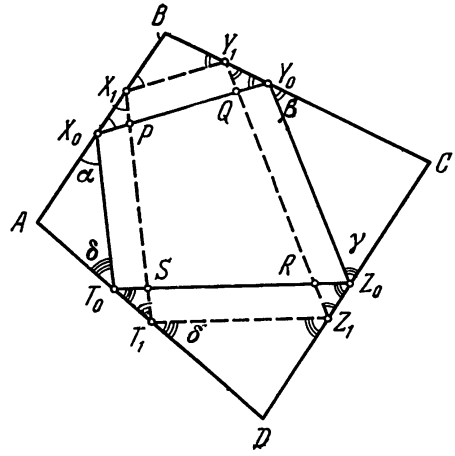


Рис. 108.

Пусть теперь $ABCD$ — произвольный четырехугольник, который можно вписать в круг, и $X_0Y_0Z_0T_0$ — такой вписанный в $ABCD$ четырехугольник, что

$$\angle AX_0T_0 = \angle BX_0Y_0 = \alpha, \qquad \angle BY_0X_0 = \angle CY_0Z_0 = \beta,$$
$$\angle CZ_0Y_0 = \angle DZ_0T_0 = \gamma, \qquad \angle DT_0Z_0 = \angle AT_0X_0 = \delta.$$

Если $X_1Y_1 \parallel X_0Y_0$, $Y_1Z_1 \parallel Y_0Z_0$, $Z_1T_1 \parallel Z_0T_0$ (рис. 108), то

$$\frac{X_1X_0}{Y_1Y_0} = \frac{BX_0}{BY_0} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \frac{Y_1Y_0}{Z_1Z_0} = \frac{CY_0}{CZ_0} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \qquad \frac{Z_1Z_0}{T_1T_0} = \frac{DZ_0}{DT_0} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}.$$

Перемножая эти равенства, получим:

$$\frac{X_1X_0}{T_1T_0} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{X_1X_0}{T_1T_0} = \frac{AX_0}{AT_0},$$

откуда следует, что $T_1X_1 \parallel T_0X_0$. Таким образом, выбрав на стороне AB произвольную (но достаточно близкую к X_0!) точку X_1, мы сможем построить вписанный в $ABCD$ четырехугольник $X_1Y_1Z_1T_1$, стороны которого параллельны сторонам четырехугольника $X_0Y_0Z_0T_0$, т. е. четырехугольник, стороны которого образуют с прямыми AB, BC, CD, DA те же углы, что и стороны четрехугольника $X_0Y_0Z_0T_0$.

Итак, если четырехугольник $ABCD$ может быть вписан в круг, то можно построить б е с к о н е ч н о м н о г о вписанных в него (истинных или

невырожденных) четырехугольников, каждые две соседние стороны которых образуют равные углы с той стороной четырехугольника $ABCD$, на которой они пересекаются. При этом оказывается, что *периметры всех этих четырехугольников* (таких как четырехугольники $X_0Y_0Z_0T_0$ и $X_1Y_1Z_1T_1$ на рис. 108) *равны между собой*. Поэтому, если минимум периметра $XY+YZ+ZT+TX$ вписанного четырехугольника $XYZT$ достигается для одного из этих четырехугольников, то он достигается и для всех других.

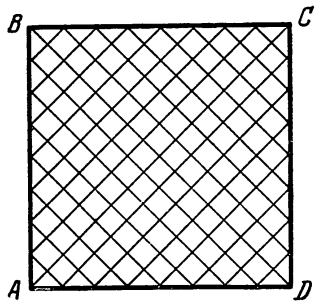


Рис. 109.

Можно доказать, что *если четырехугольник $ABCD$ может быть вписан в круг и если центр этого круга заключен внутри четырехугольника, то минимум периметра $XY+YZ+ZT+TX$ реализуется бесконечным числом* таких *вписанных в $ABCD$ четырехугольников $XYZT$ с параллельными сторонами*, как изображенные на рис. 108 четырехугольники $X_0Y_0Z_0T_0$ и $X_1Y_1Z_1T_1$[1]). Так, на рис. 109 изображены квадрат $ABCD$ и система вписанных в него прямоугольников минимального периметра.

2.6. Вписанные и описанные многоугольники. С разобранными выше задачами (см. пп. **2.4** и **2.5**) естественно сопоставить следующую более общую задачу.

Задача. *Дана замкнутая кривая K* (например, окружность), *которую для простоты мы будем считать выпуклой, гладкой* (т. е. не имеющей угловых точек) *и не содержащей никакого отрезка прямой*[2]). *Требуется найти*:

а) *вписанный в K n-угольник* (где $n \geqslant 3$ — фиксированное целое число) *наибольшего периметра* (*соответственно наибольшей площади*);

б) *описанный вокруг K n-угольник наименьшего периметра* (*соответственно наименьшей площади*).

[Выпуклый n-угольник $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *вписанным* в K, если все его вершины принадлежат линии K; он называется *описанным* вокруг K, если он содержит линию K внутри себя и все его стороны являются касательными (или опорными прямыми) линии K[3]).]

Обозначим длину линии K через l и условимся характеризовать каждую точку A этой линии длиной дуги $\overset{\smile}{OA}$, где O — фиксированная точка на K и все дуги отсчитываются в определенном, заданном

---

[1]) См., например, решение задачи **100** из указанной в списке литературы в конце статьи книги И. М. Яглома [8].

[2]) См. в этой книге ЭЭМ статью «Выпуклые фигуры и тела», стр. 182 и 188. (Заметим, что требования гладкости кривой K и отсутствия в ее составе прямолинейных отрезков, по существу, являются лишними и лишь преследуют цель упрощения изложения.)

[3]) См. стр. 225 этой книги ЭЭМ.

на K направлении (рис. 110). Если условиться последовательно нумеровать вершины многоугольника $A_1 A_2 \ldots A_n$ так, чтобы вершина A_1 отвечала наименьшей дуге $\overset{\smile}{OA_1}$ а вершина A_n — наибольшей дуге $\overset{\smile}{OA_n}$, то n точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будут отвечать n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant l$ (при этом равенство $x_i = x_{i+1}$ означает, что «n-угольник» $A_1 A_2 \ldots A_n$ вырождается в многоугольник с меньшим чем n числом вершин). Ясно, что периметр p и площадь s многоугольника $A_1 A_2 \ldots A_n$ являются непрерывными функциями положений его вершин: $p = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $s = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как область определения функций f и φ замкнута (она определяется неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant l$) и обе эти функции неотрицательны и ограничены сверху (ибо периметр многоугольника $A_1 A_2 \ldots A_n$ не превосходит длины линии K, а его площадь — площади фигуры, ограниченной линией K), то эти функции должны достигать своего максимума. Таким образом, вписанные в K n-угольники наибольшего периметра и наибольшей площади обязательно существуют.

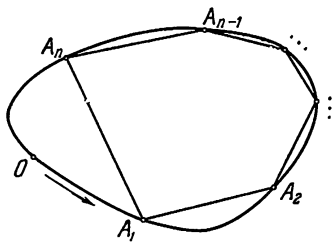


Рис. 110.

Доказательство существования вписанных n-угольников наибольшего периметра и наибольшей площади можно провести и другим путем — с использованием теоремы Бляшке (стр. 226 этой книги ЭЭМ). Именно, пусть p^* — точная верхняя грань периметров вписанных в кривую K n-угольников. Тогда существуют такие вписанные n-угольники $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$, что последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ их периметров сходится к p^*: $\lim\limits_{k \to \infty} p_k = p^*$. Так как все многоугольники $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ являются выпуклыми фигурами и расположены в ограниченной части плоскости (в области, ограниченной кривой K), то, в силу теоремы Бляшке, из последовательности $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой выпуклой фигуре M^*. В силу сказанного на стр. 235, периметр фигуры M^* в точности равен p^*. С другой стороны, как предел вписанных n-угольников, M^* также является вписанным n-угольником (или многоугольником с меньшим числом сторон, если некоторые вершины сольются). Таким образом, M^* есть вписанный n-угольник периметра p^*, т. е. вписанный многоугольник наибольшего периметра. Аналогично доказывается существование вписанного многоугольника наибольшей площади.

Перейдем теперь к рассмотрению описанных n-угольников. Поместим кривую K в круг D очень большого радиуса (рис. 111). Ясно, что если хотя бы одна вершина описанного многоугольника

будет находиться вне круга K, то периметр и площадь этого многоугольника будут очень большими. Поэтому для нахождения описанного n-угольника наименьшего периметра (или площади) достаточно рассматривать лишь описанные n-угольники, заключающиеся в круге D, т. е. в ограниченной части плоскости. Но тогда, рассматривая точную нижнюю грань периметров (или площадей)

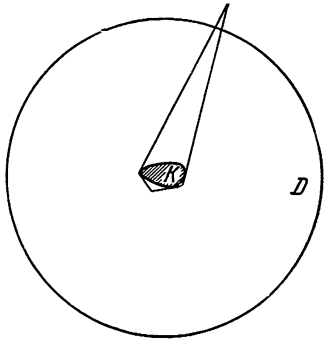


Рис. 111.

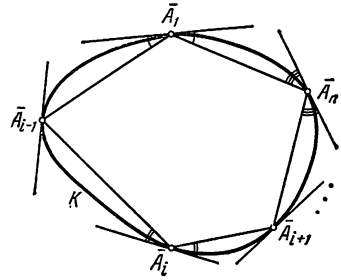


Рис. 112.

описанных n-угольников, мы, так же как и выше, с помощью теоремы Бляшке, докажем существование описанных n-угольников наименьшего периметра и наименьшей площади [1]).

Заметим теперь, что если $\bar{A}_1\,\bar{A}_2\,\ldots\,\bar{A}_n$ — вписанный в K n-угольник наибольшего возможного периметра (рис. 112), то каждая его вершина $\bar{A}_i$ реализует максимум суммы расстояний от точек дуги $\bar{A}_{i-1}\,\bar{A}_{i+1}$ линии K до вершин $\bar{A}_{i-1}$ и $\bar{A}_{i+1}$ (где вместо $\bar{A}_{n+1}$ надо понимать $\bar{A}_1$, а вместо $\bar{A}_0$ надо понимать $\bar{A}_n$). Но отсюда следует (ср. стр. 291), что стороны $\bar{A}_{i-1}\bar{A}_i$ и $\bar{A}_{i+1}\,\bar{A}_i$ n-угольника $\bar{A}_1\bar{A}_2\,\ldots\,\bar{A}_n$ образуют равные углы с касательной к K в точке $\bar{A}_i$. Итак, *каждые две соседние стороны многоугольника* $\bar{A}_1\bar{A}_2\,\ldots\,\bar{A}_n$ *образуют равные углы с касательной к кривой* K *в их общей вершине*. Это условие в ряде случаев позволяет исчерпывающим

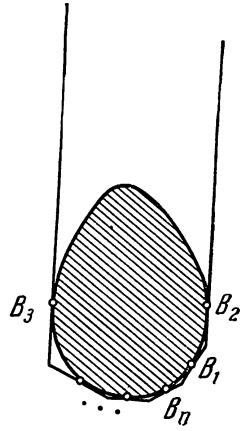


Рис. 113

[1]) Можно провести для описанных многоугольников и «функциональное» доказательство, характеризуя описанный многоугольник точками касания $B_1, \ldots, B_n$ его сторон с кривой K. Однако это доказательство усложняется, так как область определения функции не будет замкнутой (при некоторых положениях точек $B_1, \ldots, B_n$ описанный многоугольник перестает существовать, рис. 113).

образом ответить на вопрос о том, какой многоугольник является минимальным. Так, если кривая K является окружностью, наше условие (рис. 114) равносильно условию равенства всех дуг $\overset{\smile}{A_1A_2}$, $\overset{\smile}{A_2A_3}$, ..., $\overset{\smile}{A_{n-1}A_n}$, $\overset{\smile}{A_nA_1}$, а следовательно, тому, что многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ является правильным. Но все вписанные в окружность правильные n-угольники имеют один и тот же периметр; следовательно, все они реализуют максимум периметра

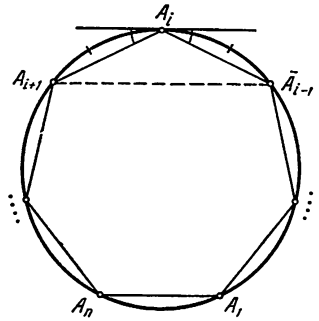


Рис. 114.

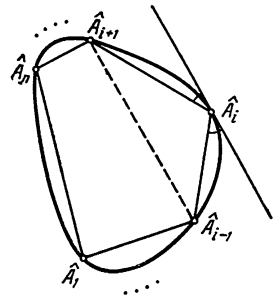


Рис. 115.

n-угольника, вписанного в окружность. Другими словами, *из всех вписанных в окружность n-угольников наибольший периметр имеет правильный n-угольник*. Эту теорему можно записать также в виде неравенства $p \leqslant 2nR \sin \frac{180^\circ}{n}$, где p — периметр n-угольника, вписанного в круг радиуса R; равенство достигается только для правильного n-угольника.

Пусть теперь $\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n$ — вписанный в кривую K n-угольник наибольшей возможной площади (рис. 115). Ясно, что каждая вершина $\hat{A}_i$ этого n-угольника должна реализовать максимум площади треугольника $\hat{A}_{i-1}\hat{A}_i\hat{A}_{i+1}$ при фиксированных точках $\hat{A}_{i-1}$ и $\hat{A}_{i+1}$ и переменной точке $\hat{A}_i$ дуги $\overset{\smile}{\hat{A}_{i-1}\hat{A}_{i+1}}$. Из сказанного в пп. **1.4—1.5** вытекает, что в точке $\hat{A}_i = \hat{A}_i(x, y)$ дуга $\overset{\smile}{\hat{A}_{i-1}\hat{A}_{i+1}}$ должна касаться линии уровня функции $f(x, y) = S_{\Delta\hat{A}_{i-1}\hat{A}_i\hat{A}_{i+1}}$. Но этой линией уровня, очевидно, является прямая, параллельная хорде $\hat{A}_{i-1}\hat{A}_{i+1}$ кривой K; поэтому *касательная к кривой K в каждой вершине $\hat{A}_i$ многоугольника $\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n$ должна быть параллельна диагонали $\hat{A}_{i-1}\hat{A}_{i+1}$*. Если роль линии K играет окружность (ср. рис. 114), то последнее условие снова

приводит к равенству всех дуг $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}, \overset{\frown}{A_nA_1}$, т. е. к тому, что n-угольник $A_1, A_2 \ldots A_n$ является правильным. Таким образом, *из всех вписанных в окружность n-угольников наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.* Другими словами, $s \leqslant \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360°}{n}$, где s — площадь n-угольника, вписанного в круг радиуса R; равенство достигается только для правильного n-угольника.

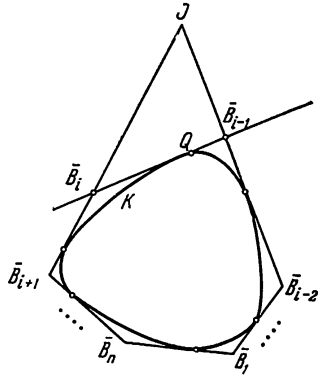


Рис. 116.

Аналогичные рассмотрения позволяют также ответить на вопрос о свойствах описанных многоугольников наименьшего периметра или площади. Именно, пусть $\bar{B}_1\bar{B}_2 \ldots \bar{B}_n$ — описанный вокруг K многоугольник наименьшего возможного периметра. Рассмотрим какую-либо его сторону $\bar{B}_{i-1}\bar{B}_i$ и обозначим через O точку пересечения соседних сторон[1]) $\bar{B}_{i-2}\bar{B}_{i-1}$ и $\bar{B}_i\bar{B}_{i+1}$ (рис. 116). Если мы обозначим через p периметр многоугольника $\bar{B}_1\bar{B}_2 \ldots \bar{B}_n$, а через P периметр многоугольника $\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_{i-2}O\bar{B}_{i+1} \ldots \bar{B}_n$, то, как видно из рис. 116,

$$p = P - (\bar{B}_iO + \bar{B}_{i-1}O - \bar{B}_{i-1}\bar{B}_i).$$

Ясно, что минимуму периметра p (при переменной касательной $\bar{B}_{i-1}\bar{B}_i$) соответствует максимум величины $\bar{B}_iO + \bar{B}_{i-1}O - \bar{B}_{i-1}\bar{B}_i$. В силу сказанного на стр. 305, отсюда вытекает, что вписанная окружность треугольника $\bar{B}_{i-1}\bar{B}_iO$ касается стороны $\bar{B}_{i-1}\bar{B}_i$ в той же точке Q, что и кривая K (рис. 117). Итак, *каждая сторона описанного вокруг K n-угольника минимального периметра касается кривой K в той же точке, что и окружность, касающаяся этой стороны и продолжений двух соседних сторон.*

Если кривая K представляет собой окружность, то отсюда легко следует, что треугольник $\bar{B}_i\bar{B}_{i-1}O$ — равнобедренный (рис. 118). В самом деле, в обозначениях рис. 118 $OQ'' = OQ''$ и $OP' = OP''$, т. е. $OQ' - 2Q\bar{B}_{i-1} = OQ'' - 2Q\bar{B}_i$, откуда следует, что $Q\bar{B}_{i-1} = Q\bar{B}_i$

---

[1]) Мы рассмотрели на рис. 116 случай, когда точка O лежит по другую сторону от прямой $\bar{B}_{i-1}\bar{B}_i$, чем кривая K, так как к этому случаю непосредственно применяются результаты, указанные на стр. 305. Предоставляем читателю проследить, как видоизменятся эти рассуждения, если прямые $\bar{B}_{i-2}\bar{B}_{i-1}$ и $\bar{B}_i\bar{B}_{i+1}$ параллельны или пересекаются по ту же сторону от $\bar{B}_{i-1}\bar{B}_i$, по которую лежит линия K. Окончательный вывод при этом не меняется.

и, значит, $O\bar{B}_{i-1} = OQ' - Q\bar{B}_{i-1} = OQ'' - Q\bar{B}_i = O\bar{B}_i$. Отсюда мы заключаем, что все углы n-угольника $\bar{B}_1\,\bar{B}_2\,\ldots\,\bar{B}_n$ равны между собой, т. е. этот n-угольник правильный. Таким образом,

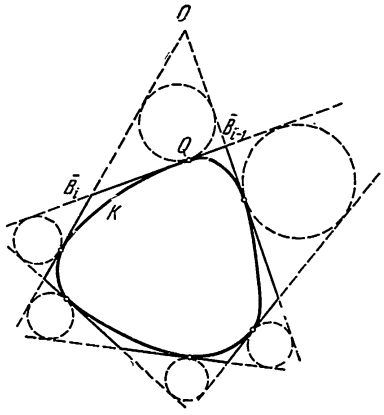


Рис. 117.

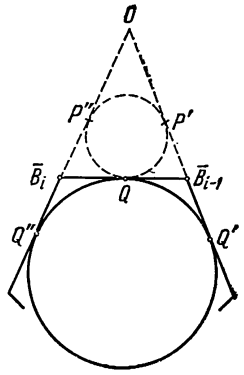


Рис. 118.

описанным вокруг окружности n-угольником наименьшего периметра является правильный n-угольник. Иначе говоря, $p \geqslant 2nr \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, где p — периметр произвольного n-угольника, описанного вокруг окружности радиуса r; равенство достигается лишь для правильного n-угольника.

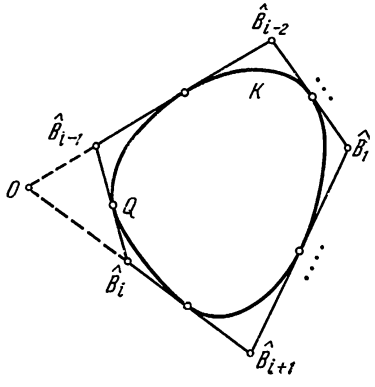


Рис. 119.

Пусть, наконец, $\hat{B}_1\,\hat{B}_2\,\ldots\,\hat{B}_n$ — описанный вокруг линии K n-угольник наименьшей площади. Рассмотрим какую-либо его сторону $\hat{B}_{i-1}\hat{B}_i$ и обозначим через O точку пересечения соседних сторон[1]) $\hat{B}_{i-2}\hat{B}_{i-1}$ и $\hat{B}_i\hat{B}_{i+1}$ (рис. 119). Ясно, что касательная $\hat{B}_{i-1}\hat{B}_i$ соответствует максимуму площади треугольника $\hat{B}_{i-1}\hat{B}_iO$, отсекаемого этой касательной от угла $\hat{B}_{i-1}O\hat{B}_i$. Поэтому, в силу сказанного на стр. 302—303 точка касания Q должна делить отрезок $\hat{B}_{i-1}\hat{B}_i$ пополам. Итак, *каждая сторона описанного вокруг K n-угольника минимальной площади делится точкой касания с линией K пополам.*

Если K — окружность, то отсюда легко следует, что многоугольник $\hat{B}_1\,\hat{B}_2\,\ldots\,\hat{B}_n$ правильный (ср. с рис. 118). Таким образом,

[1]) Ср. сноску на стр. 333.

из всех описанных вокруг окружности n-угольников наименьшую площадь имеет правильный [1]). Это утверждение равносильно неравенству $s \geqslant nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, где s — площадь любого многоугольника, описанного вокруг окружности радиуса r; равенство достигается лишь для правильного n-угольника.

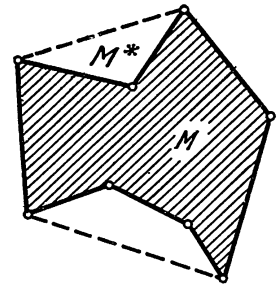


Рис. 120

2.7. Изопериметрическая задача для многоугольников. Решим теперь следующую задачу.

Задача. *Среди всех n-угольников заданного периметра p найти n-угольник наибольшей площади.*

Если многоугольник M невыпуклый, то его выпуклая оболочка M^* (рис. 120; ср. стр. 213 этой книги ЭЭМ) представляет собой (выпуклый) многоугольник с меньшим числом сторон, меньшим периметром и б о л ь ш е й площадью. Поэтому, подобно увеличивая многоугольник M^*, так чтобы его периметр стал р а в н ы м периметру многоугольника M, мы получим многоугольник M^{**} еще большей площади. Итак, для всякого невыпуклого n-угольника M найдется многоугольник M^{**} (с меньшим числом сторон, т. е. n-угольник, некоторые вершины которого совпали) того же периметра и большей площади.

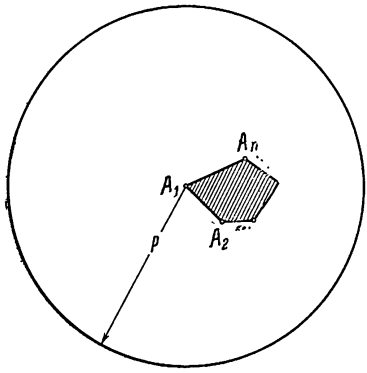


Рис 121.

Далее, площадь любого многоугольника $A_1 A_2 \ldots A_n$ периметра p не превосходит πp^2, ибо никакая вершина его не может быть удалена от A_1 больше чем на расстояние p, и потому весь многоугольник заключен в круге радиуса p с центром A_1 (рис. 121).

Докажем теперь, что n-угольник наибольшей площади (при заданном периметре p) с у щ е с т в у е т. Пусть s^*—т о ч н а я в е р х н я я г р а н ь площадей n-угольников периметра p. Выберем последовательность n-угольников $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ периметра p, площади $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ которых образуют последовательность, сходящуюся к s^*: $\lim\limits_{k \to \infty} s_k = s^*$. Мы можем при этом предполагать, что все многоугольники $M_1, M_2, \ldots$ в ы п у к л ы е (ибо, заменяя

[1]) Ясно, что максимум площади s описанного вокруг о к р у ж н о с т и n-угольника достигается д л я т о г о же многоугольника M, для которого достигается максимум периметра p (ибо s и p связаны между собой равенством $s = 1/2\ pr$, где r — радиус окружности).

в последовательности M_1, M_2, ..., M_k, ... каждый невыпуклый многоугольник выпуклым многоугольником того же периметра и большей площади, мы получим новую последовательность многоугольников, площади которых подавно сходятся к верхней грани s^*).

Расположим все многоугольники M_1, M_2, ..., M_k, ... таким образом, чтобы все они имели одну общую вершину O. Тогда все эти многоугольники будут расположены в круге радиуса p с центром O, т. е. будут расположены в ограниченной части плоскости. Согласно теореме Бляшке (см. стр. 226 этого тома ЭЭМ), из последовательности M_1, M_2, ..., M_k, ... можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой выпуклой фигуре M^*. Ясно, что предельная фигура M^* будет выпуклым n-угольником, причем

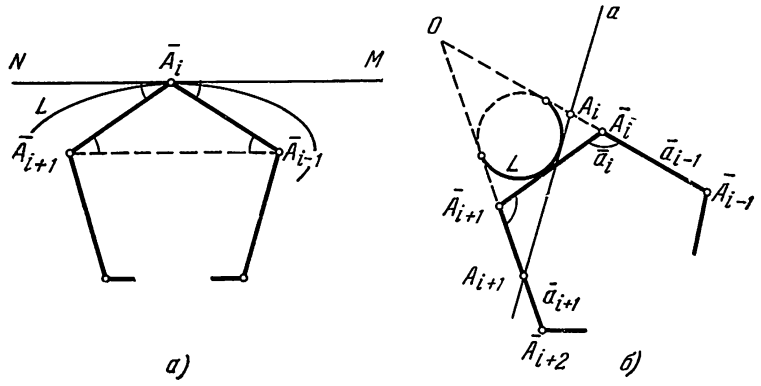


Рис. 122.

его периметр равен p, а площадь равна s^* (стр. 235). Тем самым существование наибольшего по площади n-угольника периметра p доказано.

Пусть $\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n$ — искомый многоугольник наибольшей площади. Мы уже знаем, что он должен быть выпуклым. Зафиксируем все его вершины, кроме одной вершины $\bar{A}_i$; множество таких точек A, что $\bar{A}_{i-1}A+\bar{A}_{i+1}A=\bar{A}_{i-1}\bar{A}_i+\bar{A}_{i+1}\bar{A}_i=\text{const}$ (эллипс), обозначим через L (рис. 122, *а*). Точка $\bar{A}_i$, очевидно, реализует максимум площади треугольника $\bar{A}_{i-1}A\bar{A}_{i+1}$ среди всех точек A эллипса L; отсюда следует (ср. пп. **1.4—1.5**), что линия уровня функции $f(x, y)=S_{\Delta\bar{A}_{i-1}A\bar{A}_{i+1}}$, где (x, y) — координаты точки A, касается эллипса L в точке $\bar{A}_i$. Но ясно, что эта линия уровня представляет собой прямую MN, параллельную диагонали $\bar{A}_{i-1}\bar{A}_{i+1}$; таким образом, касательная к эллипсу L в точке $\bar{A}_i$ параллельна диагонали $\bar{A}_{i-1}\bar{A}_{i+1}$. Используя известное свойство эллипса (ср. стр. 291 этой

книги ЭЭМ), получаем отсюда, что $\angle M\bar{A}_i\bar{A}_{i-1} = \angle N\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$ или что $\angle\bar{A}_i\bar{A}_{i-1}\bar{A}_{i+1} = \angle\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}\bar{A}_{i-1}$. Таким образом, мы убеждаемся, что треугольник $\bar{A}_{i-1}\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$ равнобедренный: $\bar{A}_{i-1}\bar{A}_i = \bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$. А так как $\bar{A}_i$ — это произвольная вершина n-угольника $\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n$, то *все стороны этого n-угольника равны.*

Зафиксируем теперь все стороны нашего n-угольника, кроме одной стороны $\bar{a}_i \equiv \bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$; точку пересечения прямых $\bar{a}_{i-1} \equiv \bar{A}_{i-1}\bar{A}_i$ и $\bar{a}_{i+1} = \bar{A}_{i+1}\bar{A}_{i+2}$ обозначим через O (рис. 122, *б*) [1]). Ясно, что если мы заменим прямую $\bar{a}_i$ прямой a, пересекающей стороны угла $\bar{A}_iO\bar{A}_{i+1}$ в таких точках A_i и A_{i+1}, что

$$O\bar{A}_i + O\bar{A}_{i+1} - \bar{A}_i\bar{A}_{i+1} = OA_i + OA_{i+1} - A_iA_{i+1},$$

то мы получим новый многоугольник $\bar{A}_1\ldots\bar{A}_{i-1}A_iA_{i+1}\bar{A}_{i+2}\ldots\bar{A}_n$, имеющий тот же периметр. В силу сказанного на стр. 305, все прямые a, обладающие этим свойством, касаются одной дуги L окружности, а именно окружности, вписанной в треугольник $O\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$ (рис. 122, *б*). Ясно, что прямая $\bar{a}_i = \bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$ выделяется из множества всех рассматриваемых прямых a тем, что площадь отсекаемого ею треугольника OA_iA_{i+1} минимальна. Но, как мы знаем (см. стр. 303), минимум площади отсекаемого треугольника осуществляет та касательная к дуге L, которая перпендикулярна к биссектрисе угла $\bar{A}_iO\bar{A}_{i+1}$. Таким образом, прямая $\bar{a}_i$ должна быть перпендикулярна к биссектрисе угла $\bar{A}_iO\bar{A}_{i+1}$, и потому $\angle\bar{A}_{i-1}\bar{A}_i\bar{A}_{i+1} = \angle\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}\bar{A}_{i+2}$. А так как $\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}$ — произвольная сторона n-угольника $\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n$, то *все углы этого n-угольника равны.*

Итак, искомый многоугольник должен иметь равные стороны и равные углы, т. е. должен быть правильным. Иными словами, *из всех n-угольников данного периметра p наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.* Это утверждение можно также сформулировать в виде следующего неравенства, связывающего периметр p и площадь s произвольного n-угольника:

$$s \leqslant \frac{1}{4n}p^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n};$$

равенство достигается лишь для правильного n-угольника. Из этого неравенства вытекает также, что из *всех n-угольников данной площади s наименьший периметр* $\sqrt{4n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}s}$ *имеет правильный n-угольник.*

---

[1]) Ср. сноску на стр. 333.

В частности, из всех треугольников данного периметра p наибольшую площадь $s=\frac{1}{12}p^2\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{36}p^2$ имеет правильный треугольник [1]), и из всех треугольников площади s наименьший периметр $p=2\sqrt[4]{27}\sqrt{s}$ имеет правильный треугольник; из всех (выпуклых) четырехугольников данного периметра наибольшую площадь $s=\frac{1}{16}p^2\operatorname{ctg}45^\circ=\frac{p^2}{16}$ имеет квадрат, и из всех четырехугольников данной площади s наименьший периметр $p=4\sqrt{s}$ имеет квадрат.

§ 3. Задачи на максимум и минимум, связанные с выпуклыми фигурами

3.1. Изопериметрическая задача для произвольных фигур. Естественным обобщением рассмотренной выше изопериметрической задачи для многоугольников является следующая задача:

Среди всех фигур заданного периметра p найти фигуру наибольшей площади.

Разумеется, под «фигурой» здесь следует понимать квадрируемую область, ограниченную спрямляемой простой замкнутой линией. Дословно, так же как и для многоугольников (стр. 335), доказывается, что если Ф — невыпуклая фигура, то существует выпуклая фигура того же периметра и б о л ь ш е й площади. После этого без труда доказывается (с использованием теоремы Бляшке, так же как и для многоугольников), что среди всех фигур периметра p с у щ е с т в у е т фигура Φ_0 наибольшей площади s^*.

Остается найти вид фигуры Φ_0. Мы уже знаем, что фигура Φ_0 должна быть выпуклой. Выберем на контуре фигуры Φ_0 две точки M, N, делящие ее периметр пополам (рис. 123, *а*). Ясно, что обе части, на которые хорда MN делит фигуру Φ_0, должны иметь одну и ту же площадь $\frac{s^*}{2}$: если бы, скажем, верхняя часть на

---

[1]) Эта теорема может быть также доказана чисто алгебраически с использованием неравенства, связывающего арифметическое и геометрическое средние (стр. 321). Именно, из формулы Герона

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(где $p=(a+b+c)/2$ — п о л у п е р и м е т р) следует, что при $p=\text{const}$ максимум площади треугольника достигается в том случае, если максимальным будет произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$. А так как сумма

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=p$$

постоянна, то максимум произведения $(p-a)(p-b)(p-c)$ достигается при $p-a=p-b=p-c$, т. е. для п р а в и л ь н о г о треугольника.

рис. 123, *а* имела бóльшую площадь, чем нижняя, то, отбросив нижнюю часть фигуры Φ_0 и симметрично отразив относительно прямой MN верхнюю часть (рис. 123, *б*), мы получили бы фигуру того же периметра и большей площади.

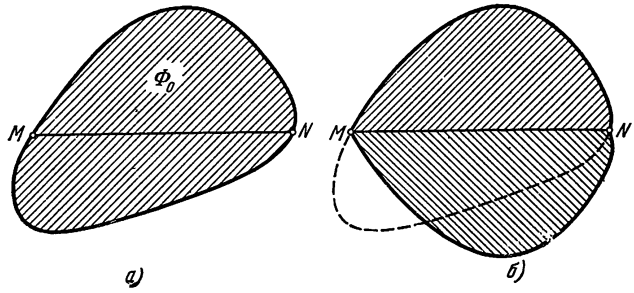


Рис. 123.

Пусть теперь A — произвольная отличная от M и N точка, лежащая на контуре фигуры Φ_0. Докажем, что угол MAN прямой. В самом деле, допустим, что $\angle MAN \neq 90°$ (рис. 124, *а*). Рассмотрим только ту половину (отсекаемую хордой MN) фигуры Φ_0, которая содержит точку A. Обозначим эту половину через F, а фигуру, симметричную ей относительно середины O отрезка MN, обозначим через F' (рис. 124, *б*). Точку, симметричную точке A относительно O, обозначим через A'. Вместе F и F' составляют новую фигуру Φ^*, очевидно, имеющую периметр p и площадь s^*, т. е. снова фигуру максимальной площади. Следовательно, фигура Φ^* также выпукла. Выбросим теперь из Φ^* параллелограмм $MANA'$ (рис. 124, *в*) и, считая, что четыре оставшихся сегмента соединены в точках M, A, N, A' «шарнирно», сдвинем их таким образом, чтобы хорды этих сегментов образовали прямоугольник $M_1A_1N_1A_1'$ (рис. 124, *г*)[1]. Наконец, добавив прямоугольник $M_1A_1N_1A_1'$ к этим сегментам (в их новом положении), мы получим новую фигуру Φ_1 (рис. 124, *д*). Периметр фигуры Φ_1 равен периметру фигуры Φ^* (ибо обе фигуры ограничены четырьмя одинаковыми дугами), т. е. равен p. Площадь же фигуры Φ_1 больше площади фигуры Φ^*, поскольку площадь $M_1A_1 \cdot M_1A_1'$ прямоугольника $M_1A_1N_1A_1'$ больше площади

[1]) Так как фигура Φ^* выпукла, то углы α и β, образованные сегментами, скажем, в точке M (рис. 124, *в*), составляют с углом AMA' угол, не превосходящий развернутого. Следовательно, подавно $\alpha + \beta < 180°$. Отсюда легко заключить, что и в новом положении, указанном на рис. 124, *г*, дуги сегментов, кроме общих концов, не будут иметь других точек пересечения, т. е. сегменты не будут накладываться друг на друга. [Заметим, что во многих книгах при изложении этого доказательства (известного под названием четырехшарнирного метода Штейнера) не учитывается возможность накладывания сегментов, что делает изложение некорректным.]

$MA \cdot MA' \cdot \cos \angle AMA'$ параллелограмма $MANA'$ с теми же сторонами. Но это противоречит максимальности фигуры Φ^*.

Итак, фигура Φ_0 обладает тем свойством, что любой ее вписанный угол, опирающийся на хорду MN, — прямой. Следовательно, фигура Φ_0 является кругом. Иными словами, *круг радиуса* $\frac{p}{2\pi}$ (т. е. круг периметра p) *имеет бóльшую площадь, чем любая другая фигура периметра* p. Этот факт может быть записан в виде неравенства $s \leqslant \frac{1}{4\pi} p^2$, связывающего площадь и периметр любой выпуклой фигуры; равенство достигается только для круга.

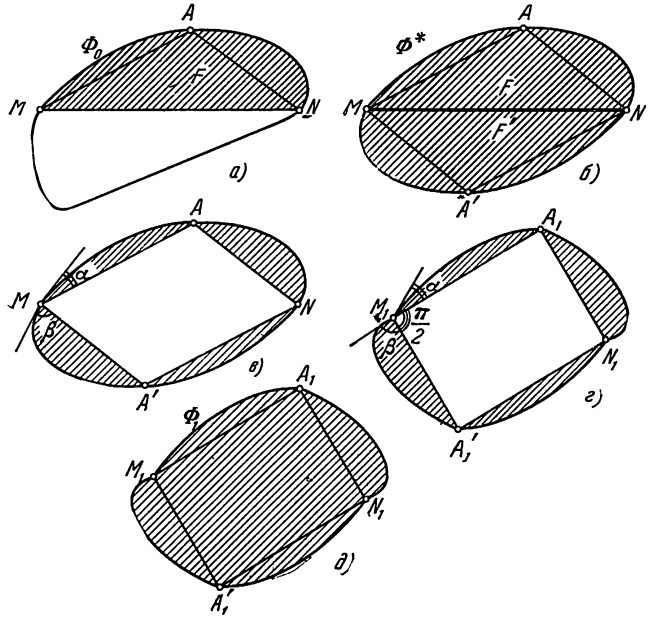


Рис. 124.

Укажем без доказательства, что аналогичная теорема имеет место и для пространственных тел (а также тел в n-мерном пространстве): из всех тел *с заданной площадью поверхности шар имеет наибольший объем*; однако доказательство этой теоремы довольно сложно.

3.2. Теоремы Юнга и Бляшке. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные выпуклые фигуры.

Доказанное в предыдущем пункте «изопериметрическое неравенство» $s \leqslant \frac{1}{4\pi} p^2$ связывает две важнейшие величины, характеризующие выпуклую фигуру: ее периметр и площадь. В статье

«Выпуклые фигуры и тела» мы ввели и другие характеристики выпуклых фигур. Напомним их все: p — периметр (стр. 233), s — площадь (стр. 233), d — диаметр (стр. 195), Δ — ширина (стр. 198), R — радиус описанного круга (стр. 201), r — радиус вписанного круга (стр. 200). Естественно возникает вопрос о нахождении всевозможных соотношений, связывающих эти величины.

Докажем следующие две важнейшие теоремы:

для любой (двумерной) выпуклой фигуры справедливы неравенства:

$$R \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} d \qquad \text{(теорема Юнга);}$$

$$\Delta \leqslant 3r \qquad \text{(теорема Бляшке).}$$

Доказательство теоремы Юнга. Неравенство, составляющее содержание теоремы Юнга, равносильно утверждению

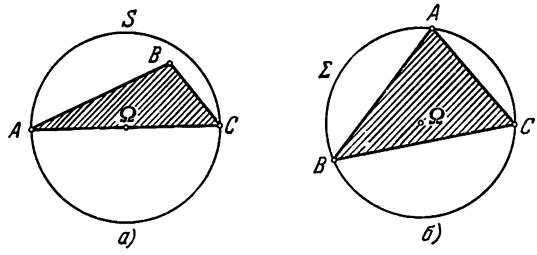


Рис. 125.

о существовании такой точки O — центра описанной окружности, которая удалена от всех точек выпуклой фигуры F не больше чем на $\frac{1}{\sqrt{3}} d$, или утверждению о том, что все круги радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}} d$ с центрами в точках фигуры F имеют общую точку O. Но, в силу теоремы Хелли (см. п. **6.1** статьи «Выпуклые фигуры и тела», стр. 248), нам достаточно показать, что каждые три из рассматриваемых кругов имеют общую точку.

Итак, пусть A, B, C — три точки фигуры F диаметра d; в таком случае $AB \leqslant d$, $BC \leqslant d$, $CA \leqslant d$. Если треугольник ABC тупоугольный или прямоугольный, то он весь содержится внутри круга S, построенного на большей стороне, как на диаметре (рис. 125, *а*); радиус ρ этого круга, очевидно, не превосходит $d/2$. Поэтому существует точка Ω — центр круга S, — удаленная от всех точек A, B, C не более чем на $d/2$. Но отсюда следует, что пересекаются (в точке Ω) круги радиуса $d/2$ с центрами A, B, C; подавно пересекаются (большие!) круги радиуса $d/\sqrt{3}$ с центрами A, B, C.

Если же треугольник ABC остроугольный, то он содержится внутри описанного вокруг ABC круга Σ (рис. 125, *б*). При этом, если A — наибольший угол треугольника ABC, то $\angle A \geqslant 60°$ и $\sin A \geqslant \sqrt{3}/2$; поэтому, если ρ — радиус круга Σ, то, в силу теоремы синусов,

$$2\rho = \frac{BC}{\sin A} \leqslant \frac{d}{\sqrt{3}/2} = \frac{2d}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. } \rho \leqslant \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, существует точка Ω — центр круга Σ, — удаленная от всех точек A, B, C не более чем на $d/\sqrt{3}$, т. е. и в этом случае три круга радиуса $d/\sqrt{3}$ с центрами A, B, C имеют общую точку.

Теорема доказана.

Заметим, что если фигура F представляет собой правильный треугольник со стороной d, то диаметр фигуры F равен d, а радиус R описанной окружности равен $d/\sqrt{3}$.

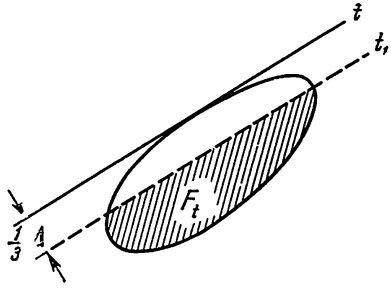


Рис. 126.

Доказательство теоремы Бляшке. Нам требуется доказать, что внутри каждой выпуклой фигуры F ширины Δ содержится круг радиуса $\frac{1}{3}\Delta$. Другими словами, нам требуется доказать, что внутри фигуры F имеется точка O (центр вписанного круга), удаленная от каждой опорной прямой t фигуры F не менее чем на $\frac{1}{3}\Delta$. Множество всех точек фигуры F, удаленных от прямой t на расстояние $\geqslant \Delta/3$, образует новую фигуру F_t, представляющую собой пересечение фигуры F и полуплоскости Π_t, ограниченной прямой t_1, расположение которой показано на рис. 126. Таким образом, если точка O удалена от всех опорных прямых фигуры F не менее чем на $\frac{1}{3}\Delta$, то она принадлежит пересечению выпуклых фигур F_t, отвечающих всем опорным прямым t фигуры F; наша задача состоит в доказательстве того, что такая точка существует, т. е. что *все фигуры* F_t *имеют общую точку*. Но, в силу теоремы Хелли (см. стр. 248 этого тома ЭЭМ), все фигуры F_t имеют общую точку тогда и только тогда, когда каждые три из них имеют общую точку; поэтому нам достаточно убедиться, что существует точка, принадлежащая трем фигурам F_t, F_u и F_v, где t, u и v — три произвольные опорные прямые фигуры F.

Опорные прямые t, u и v могут либо образовывать треугольник, внутри которого содержится фигура F (рис. 127, *а*), либо не образовывать такого треугольника (рис. 127, *б*, *в*). Остановимся сначала

на первом случае (рис. 127, *а*). Треугольник, образованный прямыми t, u и v, мы обозначим через T.

Ясно, что, скажем, опущенная на сторону t высота h_t треугольника T не меньше расстояния между параллельными t опорными прямыми фигуры F; поэтому она не меньше Δ. Отсечем от треугольника T полосу ширины $\Delta/3$ прямой, параллельной стороне t (см. тот же рис. 127, *а*). Так как центр тяжести Z (точка пересечения медиан) треугольника T удален от стороны t на расстояние, равное $h_t/3$, то он принадлежит части треугольника T, остающейся после отсечения от него указанной полосы. Точка Z принадлежит также частям треугольника T, получаемым от него отсечением полос ширины $\Delta/3$, ограниченных стороной u, соответственно стороной v, треугольника. Поэтому меньший треугольник T_1, получаемый из T сдвигом каждой стороны на расстояние $\Delta/3$ в направлении противоположной вершины, существует: он содержит, например, точку Z[1]). Нам надо доказать, что существуют точки фигуры F, удаленные от всех сторон треугольника T на расстояния $\geqslant\Delta/3$, т. е. что *фигура F пересекается с треугольником T_1* (это пересечение будет, очевидно, принадлежать всем трем фигурам F_t, F_u и F_v; см. рис. 127, *а* на котором фигура F_t заштрихована).

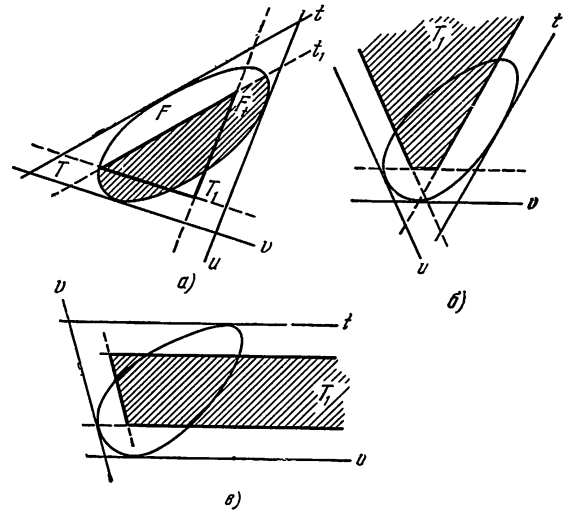


Рис. 127.

Доказательство существования пересечения фигуры F и треугольника T_1 проведем «от противного»; другими словами, предположим, что F и T_1 не пересекаются, и покажем, что это предположение приводит к противоречию. Если F и T_1 не пересекаются, то существует разделяющая эти фигуры прямая l[2]). Сдвинем прямую l параллельно самой себе до тех пор, пока она не коснется границы треугольника T_1. Полученная таким образом прямая l_1 либо параллельна одной из сторон треугольника T (скажем, t), либо образует с двумя из этих сторон (скажем, с t и u) треугольник τ, внутри которого лежит вся фигура F. Если $l_1 \parallel t$, то фигура F целиком

[1]) Он может и состоять из одной точки Z.
[2]) См. стр. 207 этой книги ЭЭМ.

заключена внутри образованной t и l_1 полосы ширины $\frac{1}{3}\Delta$, что, очевидно, невозможно. Докажем теперь, что и второй случай тоже не может иметь места.

Обозначим вершины треугольника τ через M, N и P, а вершину треугольника T_1, принадлежащую стороне NP треугольника τ,— через Q (рис. 128). Так как точка Q удалена от прямых t и u на одно и то же расстояние $\Delta/3$, то прямая MQ является биссектрисой угла NMP. Предположим для определенности, что $NM \geqslant PM$; так как $\frac{NQ}{PQ} = \frac{NM}{PM}$, то $NQ \geqslant PQ$. Опустим из точек P и Q перпендикуляры PP_1 и QQ_1 на прямую t. Так как $QQ_1 = \Delta/3$, то

$$PP_1 = QQ_1 \cdot \frac{NP}{NQ} = \frac{1}{3}\Delta \cdot \frac{NQ+PQ}{NQ} = \frac{1}{3}\Delta \cdot \left(1 + \frac{PQ}{NQ}\right) \leqslant \frac{1}{3}\Delta \cdot 2 < \Delta.$$

Таким образом, мы видим, что высота PP_1 треугольника τ меньше Δ, откуда следует, что фигура F ширины Δ не может заключаться внутри этого треугольника.

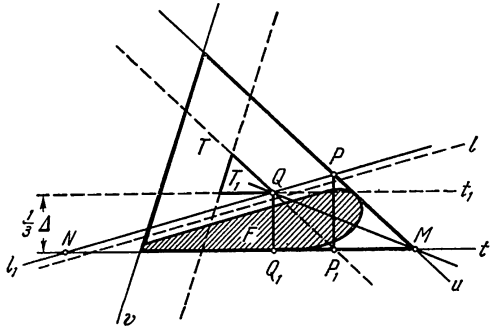


Рис. 128.

Если опорные прямые t, u и v не образуют описанного вокруг F треугольника (рис. 127, *б*, *в*), то доказательство только упрощается. В самом деле, в этом случае точки, удаленные от каждой из прямых t, u и v не меньше чем на $\Delta/3$, образуют неограниченную выпуклую фигуру T_1 (заштрихованную на рис. 127, *б*, *в*), так что существование этой фигуры устанавливается без рассмотрения центра тяжести треугольника. Последующее же рассуждение, в котором треугольник T_1 заменяется неограниченным «трехсторонником» T_1 (в смысле п. **3.2** статьи «Выпуклые фигуры и тела», см. стр. 209 этой книги ЭЭМ), остается, по существу, прежним.

Заметим, что если фигура F предста ляет собой правильный треугольник с высотой Δ, то ширина фигуры F равна Δ, а радиус r вписанной окружности равен $\Delta/3$.

3.3. Зависимости между основными характеристиками выпуклых фигур. В двух предыдущих пунктах мы вывели три важнейших неравенства, связывающих основные характеристики p, s, d, Δ, R, r произвольной выпуклой фигуры F. В следующей таблице приведены

Неравенства для величин	При заданном p	При заданном s	При заданном d	При заданном Δ	При заданном R	При заданном r
p		$2\sqrt{\pi s} \leqslant p < \infty$ ○	$2d \leqslant p \leqslant \pi d$ — ○ и др.	$\pi\Delta \leqslant p < \infty$ ○ и др.	$4R \leqslant p \leqslant 2\pi R$ — ○	$2\pi r \leqslant p < \infty$ ○
s	$0 \leqslant s \leqslant \frac{p^2}{4\pi}$ — ○		$0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi d^2}{4}$ — ○	$\frac{\Delta^2}{\sqrt{3}} \leqslant s < \infty$ △	$0 \leqslant s \leqslant \pi R^2$ — ○	$\pi r^2 \leqslant s < \infty$ ○
d	$\frac{p}{\pi} \leqslant d \leqslant \frac{p}{2}$ ○ — и др.	$2\sqrt{\frac{s}{\pi}} \leqslant d < \infty$ ○		$\Delta \leqslant d < \infty$ ○ и др.	$\sqrt{3}R \leqslant d \leqslant 2R$ △ ○ и др. и др.	$2r \leqslant d < \infty$ ○
Δ	$0 \leqslant \Delta \leqslant \frac{p}{\pi}$ — ○ и др.	$0 < \Delta \leqslant \sqrt{\sqrt{3}s}$ △	$0 \leqslant \Delta \leqslant d$ — ○ и др.		$0 \leqslant \Delta \leqslant 2R$ — ○	$2r \leqslant \Delta \leqslant 3r$ ○ △ и др.
R	$\frac{p}{2\pi} \leqslant R \leqslant \frac{p}{4}$ ○ —	$\sqrt{\frac{s}{\pi}} \leqslant R < \infty$ ○	$\frac{d}{2} \leqslant R \leqslant \frac{d}{\sqrt{3}}$ ○ △ и др. и др.	$\frac{\Delta}{2} \leqslant R < \infty$ ○		$r \leqslant R < \infty$ ○
r	$0 \leqslant r \leqslant \frac{p}{2\pi}$ — ○	$0 < r \leqslant \sqrt{\frac{s}{\pi}}$ ○	$0 \leqslant r \leqslant \frac{d}{2}$ — ○	$\frac{\Delta}{3} \leqslant r \leqslant \frac{\Delta}{2}$ △ ○ и др.	$0 \leqslant r \leqslant R$ — ○	

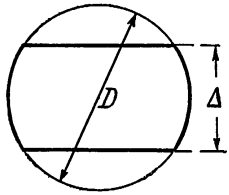
все соотношения, существующие между какими-либо двумя из этих величин. Под каждым знаком неравенства изображена та фигура, для которой достигается равенство (если оно достигается). Если при этом под изображением фигуры написано «и др.», то это означает, что, кроме изображенной фигуры, существуют и другие, для которых соответствующее равенство достигается. Если указание «и др.» отсутствует, это означает, что равенство достигается только для изображенной фигуры.

Установленные выше соотношения (изопериметрическое неравенство, теоремы Юнга и Бляшке) являются наиболее сложно доказываемыми. Большая часть других указанных в таблице соотношений получается значительно проще. Рассмотрим для примера последний столбец таблицы. Из того, что вписанная окружность (имеющая радиус r) целиком заключена внутри фигуры F, непосредственно вытекают соотношения $p \geqslant 2\pi r$, $s \geqslant \pi r^2$, $d \geqslant 2r$, $\Delta \geqslant 2r$, а так как описанная окружность содержит фигуру F (а значит, и вписанную окружность) внутри себя, то $R \geqslant r$. Из теоремы Бляшке мы знаем, что $\Delta \leqslant 3r$. Наконец, пример очень длинного прямоугольника высоты $2r$ показывает, что при заданном радиусе r вписанной окружности фигура F может иметь как угодно большие p, s, d, R. Это и дает соотношения, указанные в последнем столбце.

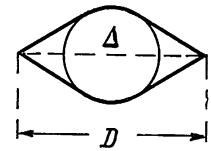
Доказательства всех собранных в таблице неравенств читатель может найти в указанной на стр. 347 книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского [5].

Значительно более сложный характер имеют оценки для той или иной из перечисленных характеристик, если заданы величины двух других характеристик (удовлетворяющие, разумеется, указанным в таблице неравенствам). Например, при заданных d и Δ (удовлетворяющих необходимому условию $d \geqslant \Delta$) справедливы следующие оценки для периметра p:

$$\pi\Delta + 2\sqrt{d^2 - \Delta^2} - 2\Delta \arccos\frac{\Delta}{d} \leqslant p \leqslant \pi d + 2\sqrt{d^2 - \Delta^2} - 2d \arccos\frac{\Delta}{d}.$$



и др.



и др.

Многие из соотношений такого рода до сих пор не найдены.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

Обширное и весьма широкое по содержанию сочинение, рассчитанное на начинающего математика. Геометрическим задачам на максимум и минимум посвящена большая глава VII «Maxima и minima» этой книги, имеющая много точек соприкосновения с содержанием настоящей статьи.

[2] Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1962.

Эта книга состоит из 27 почти не связанных одна с другой глав, содержание каждой из которых представляет собой законченную «математическую миниатюру», требующую для понимания минимальных знаний, но приводящую к совсем не очевидным, а иногда и совершенно неожиданным результатам. К теме настоящей статьи примыкают шесть глав этой книги: гл. 3 «Несколько задач на максимум»; гл. 5 «Одно минимальное свойство треугольника, образованного основаниями высот, по Г. Шварцу»; гл. 6 «То же минимальное свойство треугольника по Л. Фейеру»; гл. 16 «Замыкающая окружность точечной совокупности» (теорема Юнга); гл. 21 «Принципиальные основы задач на максимум»; гл. 22 «Фигура, имеющая наибольшую площадь при данном периметре (четырехшарнирный метод Штейнера)».

[3] Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, М., ИЛ, 1957.

Книга известного математика и замечательного педагога, ставящая своей целью познакомить читателя с некоторыми общими принципами математического творчества (которое может заключаться просто в решении задач). К теме настоящей статьи непосредственно относятся гл. VIII «Максимумы и минимумы», гл. X «Изопериметрическая задача» и в несколько меньшей степени гл. IX «Физическая математика».

[4] Д. А. Крыжановский, Изопериметры, М., Физматгиз, 1959.

Небольшая брошюра, посвященная кругу проблем, связанных с пп. **2.7** и **3.1** настоящей статьи.

[5] И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М.—Л., Гостехиздат, 1961.

Эта книга тесно связана с содержанием § 3 настоящей статьи.

[6] Л. А. Люстерник, Кратчайшие линии, М., Гостехиздат, 1955.

Небольшая книга, по существу, целиком посвященная геометрическим задачам на максимум и минимум, трактуемым, однако, с позиций, отличных от принятых в настоящей статье. Содержит, в частности, решение изопериметрической задачи, основанное на идеях, весьма далеких от изложенных в п. **3.1** идей Я. Штейнера.

[7] В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, М., Гостехиздат, 1957.

В § 29 этой книги изложено семь (!) разных решений изопериметрической задачи, отличных от приведенного в настоящей статье. Изложение не элементарно.

[8] И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I, М., Гостехиздат., 1959.

§ 2 гл. II второй части книги специально посвящен применению движений и преобразований подобия к решению геометрических задач на максимум и минимум.

[9] N. D. Kazarinoff, Geometric inequalities, New York—Toronto, 1901.

Книга входит в серию «New Mathematical Library» (Новая математическая библиотека), издаваемую американским математическим обществом и рассчитанную на учащихся старших классов средней школы. Содержит широкое обсуждение вопросов, связанных с геометрическими задачами на максимум и минимум. В книге разобрано много интересных примеров.

См. также книги Л. Фейеша Тота [7], Л. А. Люстерника [2], Г. Хадвигера и Г. Дебруннера [5], В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга [6], W. Blaschke [11], указанные в списке литературы к статье «Выпуклые фигуры и тела».

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Определение многомерного пространства 349
1.1. Аксиоматическое определение 349
1.2. Возникновение идеи многомерного пространства 352
§ 2. Прямые и плоскости 354
2.1. Определение прямых и плоскостей. Параллельность и перпендикулярность 354
2.2. Пересечение и объединение двух плоскостей; формула Грассмана 360
2.3. Применение прямоугольных матриц 361
2.4. Расстояние между плоскостями 363
2.5. Углы между плоскостями 367
§ 3. Шары и сферы 373
3.1. Определения и основные свойства 373
3.2. Степень точки относительно сферы. Инверсия 375
3.3. Объем шара и поверхность сферы 377
§ 4. Многогранники 378
4.1. Параллелепипеды 378
4.2. Симплексы 380
4.3. Несколько свойств симплексов 382
4.4. Многогранники и теорема Эйлера 386
4.5. Правильные многогранники 387
Литература 391

§ 1. Определение многомерного пространства

1.1. Аксиоматическое определение. В п. **7.5** статьи «Векторы и их применение к геометрии» (ЭЭМ, кн. IV, стр. 377) было дано следующее определение *n-мерного евклидова пространства:* n-мерным евклидовым пространством называется множество элементов двух родов, *точек* и *векторов*, для которых определены операции сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного умножения векторов и откладывания вектора, обладающие следующими свойствами:

I. Групповые свойства. Для каждых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определен вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, называемый их *суммой*, причем

1°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

2°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

3°. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ уравнение $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ имеет решение.

Свойства 1°—3° показывают, что векторы образуют коммутативную группу относительно операции сложения.

II. Свойства линейности. Для каждого вектора $\boldsymbol{a}$ и каждого действительного числа λ определен вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, называемый *произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* λ, причем

4°. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

5°. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$ и для любых чисел λ, μ.

6°. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и для любого числа λ.

7°. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$ и для любых чисел λ, μ.

III. Метрические свойства. Для каждых двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ определено действительное число $\boldsymbol{ab}$, называемое их *скалярным произведением*, причем

8°. $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$ для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

9°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$ для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

10°. $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{ab})$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и для любого числа λ.

11°. Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ число $\boldsymbol{aa}$ неотрицательно и равно нулю только в случае, когда $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ (т. е. если $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ для любого вектора $\boldsymbol{c}$).

IV. Свойства размерности[1]). Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, для которых существуют такие k чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, что $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$, называются *линейно зависимыми*.

12°. Существуют n линейно независимых векторов.

13°. Всякие $n+1$ векторов линейно зависимы.

V. Точки и откладывание векторов. Каждой упорядоченной паре точек M, N пространства поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}=\overline{MN}$, причем

14°. Для любой точки M и любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует такая точка N, что $\overline{MN}=\boldsymbol{a}$ (в этом случае говорят, что вектор $\boldsymbol{a}$ отложен от точки M).

15°. Для любых трех (не обязательно различных) точек M, N, P выполнено соотношение $\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PM}=\boldsymbol{0}$.

16°. Если $\overline{MN}=\boldsymbol{0}$, то точки M и N совпадают.

n-мерное евклидово пространство мы условимся обозначать символом E^n.

---

[1]) В кн. IV ЭЭМ аксиомы 12° и 13° были сформулированы для $n=3$; в указанной нами формулировке эти аксиомы именовались аксиомами 17° и 18°.

Перенося на n-мерное евклидово пространство определения расстояний между точками и углов между векторами, мы будем называть *расстоянием* между точками M, N неотрицательный квадратный корень из скалярного произведения $\overline{MN}\cdot\overline{MN}$ (*модуль* $|\overline{MN}|$ вектора $\overline{MN}$), а угол φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определим по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{1}$$

Заметим, что так как $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\lambda^2\boldsymbol{a}^2+2\lambda\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2\geqslant 0$, при любом λ, причем равенство нулю возможно лишь при $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, то дискриминант квадратного уравнения $\boldsymbol{a}^2x^2+2\boldsymbol{ab}x+\boldsymbol{b}^2=0$ неположителен: $(\boldsymbol{ab})^2-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\leqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right|\leqslant 1, \tag{1a}$$

причем равенство возможно лишь при $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$. Следовательно, равенство (1) в самом деле определяет некоторый угол φ (при $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ равный 0 или π, а в остальных случаях заключающийся в пределах $0<\varphi<\pi$).

Движением пространства E^n назовем взаимно однозначное отображение множества точек этого пространства на себя, сохраняющее расстояние между точками. Фигуры (под которыми мы здесь понимаем произвольные точечные множества пространства E^n), совмещающиеся друг с другом движением, будем называть *равными* фигурами.

Если скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно нулю и, значит, угол φ между этими векторами равен $\pi/2$, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *перпендикулярными*.

Хорошо известно как от произвольного базиса (системы n линейно независимых векторов) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ пространства E^n перейти к *ортонормированному базису* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, т. е. такому, что $\boldsymbol{e}_i^2=1$, $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=0$, $i\neq j$, $i, j=1, 2, \ldots, n$. Для этого достаточно положить $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{a}_1^2}}\boldsymbol{a}_1$ (при этом $\boldsymbol{e}_1^2=1$). Далее, пусть $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$ (при этом $\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{e}_1=0$) и $\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{b}_2^2}}\boldsymbol{b}_2$ (при этом $\boldsymbol{e}_2^2=1$). Затем обозначим $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$ (при этом $\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{e}_2=0$) и положим $\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{b}_3^2}}\boldsymbol{b}_3$ (так что $\boldsymbol{e}_3^2=1$); $\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4-(\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2-(\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3$ (при этом $\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{e}_3=0$) и $\boldsymbol{e}_4=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{b}_4^2}}\boldsymbol{b}_4$ и т. д.

Если базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства E^n единичные и взаимно перпендикулярные (т. е. базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный), то скалярное произведение любых двух векторов $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ и $b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ равно

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n. \tag{2}$$

Расстояние между точками M и N с координатами x_i и y_i (т. е. между такими точками M и N, что если O — начало координат, то $\overline{OM} = \sum_i x_i e_i$ и $\overline{ON} = \sum_i y_i e_i$) выражается при этом формулой

$$MN^2 = \sum_i (y_i - x_i)^2, \tag{3}$$

а косинус угла φ между векторами $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ равен

$$\cos\varphi = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}. \tag{1'}$$

Тем самым мы получили «арифметическую модель» пространства E^n, в которой точки изображаются системами n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причем за расстояние между двумя точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ принято число MN, определяемое формулой (3), а угол между векторами $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ определяется формулой (1').

1.2. Возникновение идеи многомерного пространства. Приведенное нами аксиоматическое определение пространства E^n было предложено Иоганом фон Нейманом в «Математических основах квантовой механики» (1927 г.)[1]). Собственно говоря, фон Нейманом были предложены только аксиомы группы III, определяющие скалярное произведение (и притом в значительно более общей формулировке, чем у нас); остальные приведенные нами аксиомы (определяющие, как указывалось в кн. IV ЭЭМ, *n-мерное аффинное пространство*) были предложены Германом Вейлем в книге «Пространство, время, материя» (1918 г.). Эти определения существенно опираются на понятия вектора, линейной зависимости и независимости и некоторые другие, которые прочно вошли в математику только к концу XIX века и, как видно, из названий работ Вейля и фон Неймана, были даны в связи с необходимостью строгого математического обоснования тех разделов физики, которые появились в начале XX века. Однако идея расширения понятия пространства за пределы трех измерений возникла задолго до появления векторов, не говоря уже о новой физике.

---

[1]) Русский перевод: М., «Наука», 1964.

Смутные представления о многомерном кубе, позволяющем распространить на произвольные степени геометрическую терминологию, аналогичную «квадрату» для второй степени и «кубу» для третьей, появились, по-видимому, вместе с этими более высокими степенями. Во всяком случае Диофант (III век. н. э.), у которого мы впервые встречаем 4-ю, 5-ю и 6-ю степени, называет их «квадрато-квадратом», «квадрато-кубом», и «кубо-кубом», а средневековый комментатор Диофанта Абу-л-Вафа ал-Бузджани в своем трактате о геометрических построениях, изложив построение стороны квадрата, равновеликого трем равным квадратам, как диагонали куба, построенного на одном из этих квадратов, говорит, что «аналогичное построение применимо и в случае, когда число квадратов больше трех», т. е., например, сторона квадрата, равновеликого пяти равным квадратам, равна диагонали «квадрато-куба», построенного на одном из данных квадратов. Наиболее отчетливо эта идея была высказана Михаилом Штифелем пользовавшимся уже десятью степенями, названия которых представляли собой модификации названий Диофанта. В своей обработке «Алгебры» Христофа Рудольфа (1552 г.) Штифель сожалеет, что «если в арифметике мы видим, что нам разрешается сочинять многие вещи, даже если они совсем не имеют формы, в геометрии не разрешается предположить телесные линии и поверхности и выйти за пределы куба, как если бы было больше чем три измерения»; под «телесной линией» Штифель подразумевал результат движения куба («телесной точки») в направлении, перпендикулярном трем измерениям, под «телесной поверхностью» — результат движения «телесной линии».

Важную роль в развитии идеи многомерного пространства сыграли предложение французского энциклопедиста Жана Лерона Даламбера рассматривать время как четвертое измерение в статье «Размерность» своей знаменитой «Энциклопедии» (1764 г.), введение Жозефом Луи Лагранжем обобщенных координат механической системы в «Аналитической механике» (1788 г.), а также работа Карла Густава Якоби об одновременном приведении к каноническому виду двух квадратичных форм (1834 г.), где Якоби, не употребляя термина «n-мерное пространство», фактически решает ряд задач этого пространства вплоть до вычисления объема n-мерного шара. Термин «n-мерная геометрия» был введен Артуром Кэли, который в «Главах аналитической геометрии n измерений» (1843 г.) решил ряд простейших задач этой геометрии. Значительное развитие эта геометрия получила в «Учении о линейном протяжении» (1844 г.) Германа Грассмана и особенно в «Теории многократного континуума» (1852 г.) Людвига Шлефли. Если Грассман заложил основы теории взаимного расположения плоскостей различных размерностей в n-мерном пространстве, то Шлефли решил такие

задачи этой геометрии, как обобщение на многогранники этого пространства формулы Эйлера и классификация правильных многогранников многомерного пространства.

В настоящее время, помимо геометрии многомерного евклидова пространства, разработана геометрия многомерных аффинного, проективного и конформного пространств, многомерные неевклидовы геометрии, многомерные геометрии переменной кривизны (римановы геометрии) и более сложные геометрии аффинной, проективной и конформной связности, а также бесконечномерные геометрии различных типов. Многомерные геометрические представления в настоящее время систематически применяются для наглядного решения систем линейных уравнений и других задач линейной алгебры, для решения задач линейного программирования и других задач, в которых рассматриваются более трех независимых переменных. Значение многомерной геометрии для современной физики видно уже из названных выше книг Вейля и фон Неймана.

В этой статье мы изложим несколько наиболее наглядных вопросов геометрии пространства E^n, относящихся к плоскостям (разного числа измерений), сферам и многогранникам этого пространства.

§ 2. Прямые и плоскости

2.1. Определение прямых и плоскостей. Параллельность и перпендикулярность. Будем называть *прямой линией* пространства E^n множество таких точек M этого пространства, что все векторы $\overline{M_0M}$, где M_0 — некоторая точка этого множества, линейно зависят от некоторого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ (т. е. множество точек M, получаемых из точки M_0 откладыванием всех векторов вида $t\boldsymbol{a}$, где t — произвольное вещественное число). Поэтому, если условиться характеризовать точку M пространства E^n вектором $\boldsymbol{x}=\overline{OM}$ («радиусом-вектором» этой точки), то прямая определится векторным уравнением

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a} \tag{4}$$

(здесь $\boldsymbol{x}_0=\overline{OM_0}$).

Аналогично будем называть *k-мерной плоскостью* пространства E^n множество таких точек M этого пространства, что все векторы $\overline{M_0M}$, где M_0 — некоторая точка этого множества, являются линейными комбинациями k линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ (т. е. множество точек M, получаемых из точки M_0 откладыванием всех векторов вида $t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+t_k\boldsymbol{a}_k$, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные числа). Поэтому k-мерная плоскость определяется векторным уравнением

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+t_k\boldsymbol{a}_k. \tag{5}$$

Уравнение (5) можно переписать в координатной форме

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{01} + a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1k}t_k, \\ x_2 &= x_{02} + a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2k}t_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_{0n} + a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \ldots + a_{nk}t_k. \end{aligned} \tag{5'}$$

Нетрудно проверить, что для k-мерной плоскости пространства E^n выполняются все аксиомы 1°—16° с той разницей, что в аксиомах 12° и 13° роль числа n теперь играет k. Это означает, что *k-мерная плоскость пространства E^n является k-мерным евклидовым пространством E^k.*

Легко видеть, что *через две различные точки M_0 и M_1 проходит единственная прямая*

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \tag{6}$$

а *через $k+1$ точек $M_0, M_1, \ldots, M_k$, не лежащих в одной $(k-1)$-мерной плоскости* (т. е. таких, что векторы $\overline{M_0M_1}$, ..., $\overline{M_0M_k}$ линейно независимы), *проходит единственная k-мерная плоскость*

$$x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0) + \ldots + t_k(x_k - x_0). \tag{7}$$

$(n-1)$-мерную плоскость принято называть *гиперплоскостью.*

Если $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$—линейно независимые векторы, определяющие гиперплоскость, то вектор $\boldsymbol{u}$, перпендикулярный ко всем этим векторам, определяется из условий

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{u} = 0, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\boldsymbol{u} = 0.$$

Раскрыв все скалярные произведения по формуле (2), мы получим систему $n-1$ независимых линейных однородных уравнений с n переменными. Но такая система, как известно [1]), имеет лишь единственное, с точностью до множителя, решение $\boldsymbol{u}$ [2]) (т. е. все векторы $\boldsymbol{u}$, перпендикулярные к векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$, могут быть получены из одного такого вектора $\boldsymbol{u}_0$ умножением на численные множители). Так как через каждую точку M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{a}$ проходит единственная прямая (4), мы получаем, что *через каждую точку пространства E^n проходит* единственная прямая, перпендикулярная ко всем прямым данной гиперплоскости, или, как мы будем называть эту прямую короче, *единственная прямая, перпендикулярная к гиперплоскости.*

Заметим теперь, что если точка M_0 не принадлежит k-мерной плоскости N, то существует единственная $(k+1)$-мерная плоскость,

---

[1]) См., например, статью «Векторные пространства и линейные преобразования» в кн. II ЭЭМ, стр. 73.

[2]) За вектор $\boldsymbol{u}$ можно принять, например, $(n-1)$-кратное произведение $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ (см. статью «Векторы и их применения в геометрии» в кн. IV ЭЭМ, стр. 378—379).

содержащая плоскость N и точку M_0: эта плоскость определяется произвольными $k+1$ точками плоскости N и точкой M_0. Рассматривая $(k+1)$-мерную плоскость как пространство E^{k+1}, мы заключим, что через точку M_0 этого пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная к гиперплоскости N пространства E^{k+1}. Отсюда вытекает, что *через каждую точку M_0 пространства E^n проходит единственная прямая, пересекающая плоскость N и перпендикулярная ко всем прямым этой плоскости*, *или*, как мы будем говорить, *перпендикулярная плоскости N*. Точка M_1 пересечения этой прямой с плоскостью N называется *проекцией* точки M_0 на плоскость N, а множество проекций всех точек некоторой фигуры Ф на плоскость N — проекцией на N фигуры Ф (см. рис. 1, на котором изображена проекция треугольника пространства E^3 на прямую).

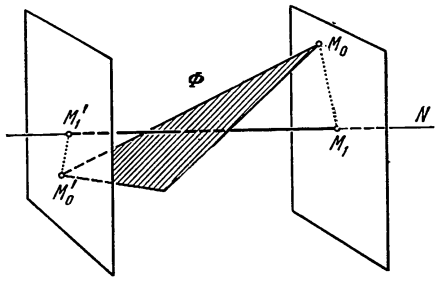


Рис. 1.

Если $\boldsymbol{u}$ — какой-либо вектор, перпендикулярный ко всем векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$, то, умножив обе части уравнения (5) гиперплоскости (где $k=n-1$) скалярно на вектор $\boldsymbol{u}$, мы получим уравнение $\boldsymbol{ux}=\boldsymbol{ux}_0$. Обозначив теперь скалярное произведение $\boldsymbol{ux}_0$ через $-v$, мы придадим этому уравнению форму

$$\boldsymbol{ux}+v=0. \tag{8}$$

Это — векторное уравнение гиперплоскости.

В случае, когда базисные векторы $\boldsymbol{e}_i$ единичны и взаимно перпендикулярны, уравнение (8) можно переписать в координатной форме

$$u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_nx_n+v=0, \tag{8'}$$

т. е. в виде линейного уравнения. Так как всякое линейное уравнение (8′) в этом базисе может быть записано в виде векторного уравнения гиперплоскости (8), а переходу от одного векторного базиса к другому соответствует линейное преобразование координат векторов, при котором линейное уравнение переходит в линейное, мы получаем, что *всякое линейное уравнение в пространстве E^n при любом векторном базисе этого пространства является уравнением гиперплоскости.*

Совершенно аналогично для k-мерной плоскости (5) при любом k можно найти $n-k$ линейно независимых векторов $\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{u}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, каждый из которых перпендикулярен ко всем векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Умножая обе части уравнения (5) скалярно на каждый из

векторов $u_{k+1}, \ldots, u_n$ и обозначая $u_{k+1}x_0, \ldots, u_nx_0$ соответственно через $-v_{k+1}, \ldots, -v_n$, мы получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} u_{k+1}x + v_{k+1} &= 0, \\ u_{k+2}x + v_{k+2} &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_nx + v_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

представляющие собой векторные уравнения k-мерной плоскости. Так как каждое из этих уравнений есть уравнение гиперплоскости, *k-мерная плоскость представляет собой пересечение $n-k$ гиперплоскостей.*

В случае, когда базисные векторы e_i единичны и взаимно перпендикулярны, уравнения (9) можно переписать в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} u_{k+1,\,1}x_1 + u_{k+1,\,2}x_2 + \ldots + u_{k+1,\,n}x_n + v_{k+1} &= 0, \\ u_{k+2,\,1}x_1 + u_{k+2,\,2}x_2 + \ldots + u_{k+2,\,n}x_n + v_{k+2} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ u_{n1}x_1 + u_{n2}x_2 + \ldots + u_{nn}x_n + v_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

т. е. в виде системы линейных уравнений. Так как всякое линейное уравнение этой системы в этом базисе может быть записано в виде векторного уравнения гиперплоскости, *всякая совместная система $n-k$ независимых линейных уравнений в пространстве E^n при любом векторном базисе является системой уравнений k-мерной плоскости.*

Примером несовместной системы уравнений является система уравнений

$$ux + v_1 = 0, \qquad ux + v_2 = 0, \tag{10}$$

где $v_1 \neq v_2$. Уравнения (10) представляют собой уравнения двух гиперплоскостей, вторая из которых получается из первой с помощью *переноса* $x' = x + a$ на вектор a, удовлетворяющий условию $ua = v_2 - v_1$. Такие две гиперплоскости называются *параллельными.* Очевидно, что все прямые, перпендикулярные к одной из двух параллельных гиперплоскостей, перпендикулярны к другой. Ясно, что если уравнения двух гиперплоскостей записаны в форме (8′), то условием параллельности этих плоскостей служит пропорциональность коэффициентов при переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим теперь две произвольные плоскости: k-мерную плоскость (5) и l-мерную плоскость

$$x = x_1 + t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_lb_l, \tag{5a}$$

где $k \leqslant l$. Эти плоскости называются *параллельными* (или *вполне параллельными*), если каждый вектор, перпендикулярный к l-мерной

плоскости (5а) (т. е. перпендикулярный ко всем векторам $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_l$), перпендикулярен и к k-мерной плоскости (5) (перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$). Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы каждый из векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ представлял собой линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_l$. Так, в трехмерном пространстве прямая m параллельна плоскости N в том и только в том случае, если направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой m представляет собой линейную комбинацию определяющих плоскость N векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ (рис. 2). Ясно, что *через каждую точку M_1 пространства E^n проходит единственная k-мерная плоскость, параллельная данной k-мерной плоскости* (5): уравнение этой плоскости имеет тот же вид (5), где только вектор $\boldsymbol{x}_0$ следует заменить на $\boldsymbol{x}_1$.

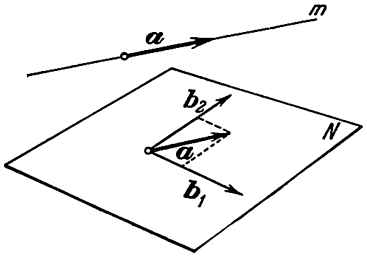


Рис. 2.

Если плоскости (5) и (5а) таковы, что плоскость (5) содержит p линейно независимых векторов, представляющих собой линейные комбинации задающих плоскость (5а) векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_l$, но не содержит $p+1$ таких векторов, то плоскости называются $\frac{p}{k}$-*параллельными*. Ясно, что для того, чтобы плоскости (5) и (5а) были $\frac{p}{k}$-параллельными, необходимо и достаточно, чтобы максимальное число линейно независимых векторов, которые можно выделить из системы $k+l$ векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$; $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_l$ было равно $k+l-p$.

Две пересекающиеся $\frac{p}{k}$-параллельные плоскости пространства E^n пересекаются, очевидно, по p-мерной плоскости. В трехмерном пространстве любые две плоскости либо являются вполне параллельными (рис. 3, *а*), либо $\frac{1}{2}$-параллельными (рис. 3, *б*).

Аналогично этому две плоскости (5) и (5а) называются *перпендикулярными* (или *вполне перпендикулярными*), если каждый из определяющих плоскость (5) векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ перпендикулярен к каждому из определяющих плоскость (5а) векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_l$ (при этом каждый из принадлежащих плоскости (5) векторов будет перпендикулярен к каждому из принадлежащих плоскости (5а) векторов, и наоборот). Так, например, полностью перпендикулярными являются плоскость (5) и проходящая через точку M_0 $(n-k)$-мерная плоскость

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} + \ldots + t_n\boldsymbol{u}_n, \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{u}_{k+1}$, $\boldsymbol{u}_{k+2}$, ..., $\boldsymbol{u}_n$—векторы, участвующие в уравнениях (9). Если же плоскость (5а) содержит q линейно независимых векторов, перпендикулярных к плоскости (5), и не содержит $q+1$ таких векторов, то плоскости (5) и (5а) называются $\frac{q}{k}$-*перпендикулярными*. Ясно, что для того, чтобы плоскости (5) и (5а) были

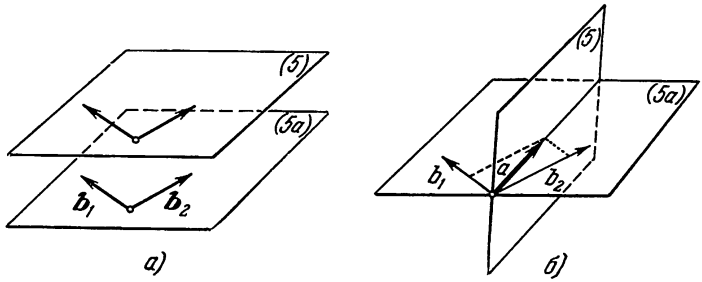


Рис. 3.

$\frac{q}{k}$-перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы наибольшее число линейно независимых векторов, которые можно выделить из системы $n-k+l$ векторов $\boldsymbol{u}_{k+1}$, $\boldsymbol{u}_{k+2}$, ..., $\boldsymbol{u}_n$; $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_l$, было равно $n-k+l-q$. В трехмерном пространстве не существует вполне перпендикулярных плоскостей; те плоскости, которые принято называть перпендикулярными,— жалкая перпендикулярность, названная так ввиду отсутствия лучшей!— при принятых здесь наименованиях следует считать полуперпендикулярными и полупараллельными ($\frac{1}{2}$-перпендикулярными и $\frac{1}{2}$-параллельными; рис. 4).

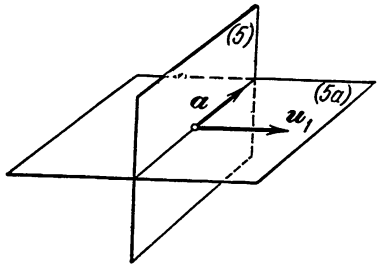


Рис. 4.

Покажем, наконец, что *если* $k+1$ *точек* k*-мерной плоскости, не лежащих в* $(k-1)$*-мерной плоскости, принадлежат* l*-мерной плоскости* ($l \geqslant k$), *то каждая точка* k*-мерной плоскости принадлежит* l*-мерной плоскости.* В самом деле, так как l-мерная плоскость является пространством E^l, то через данные точки в этой плоскости можно провести единственную k-мерную плоскость; но через те же точки можно провести единственную k-мерную плоскость и во всем пространстве E^n. Поэтому эти две k-мерные плоскости неизбежно совпадают. Аналогичное рассуждение при $k=1$ показы-

вает, что *если две различные точки прямой лежат в l-мерной плоскости, то каждая точка этой прямой лежит в l-мерной плоскости.*

2.2. Пересечение и объединение двух плоскостей; формула Грассмана. Из последней теоремы п. **2.1** следует, что если *пересечение* двух плоскостей содержит больше одной точки, то это пересечение является прямой или плоскостью (прямую можно рассматривать как 1-мерную плоскость, а точку — как 0-мерную плоскость). Поэтому пересечение двух плоскостей представляет собой плоскость максимального числа измерений, содержащуюся в обеих данных плоскостях. Кроме пересечения, две плоскости определяют еще одну плоскость — плоскость минимального числа измерений, содержащую обе данные плоскости. Будем называть такую плоскость *объединением* данных плоскостей. Например, объединением двух различных точек является прямая (рис. 5, *а*); объединением двух пересекающихся прямых является 2-мерная плоскость (рис. 5, *б*); объединением двух непересекающихся параллельных прямых является 2-мерная плоскость (рис. 5, *в*); объединением двух непересекающихся непараллельных прямых является 3-мерная плоскость (рис. 5, *г*).

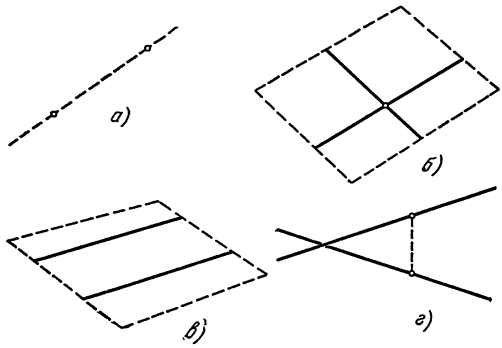


Рис. 5

Г. Грассманом установлена следующая формула: *если k-мерная и l-мерная плоскости пересекаются по d-мерной плоскости, а их объединение является s-мерной плоскостью, то*

$$k+l=d+s. \tag{12}$$

В самом деле, если одна из общих точек плоскостей — $M_0(\boldsymbol{x}_0)$, то эти плоскости можно определить уравнениями

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+t_k\boldsymbol{a}_k \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+u_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+u_l\boldsymbol{b}_l. \tag{13}$$

Так как k-мерная и l-мерная плоскости (13) пересекаются по d-мерной плоскости, то векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_d$, направленные по этой d-мерной плоскости, можно принять за векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_d$. В таком случае векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_d; \boldsymbol{a}_{d+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_k; \boldsymbol{b}_{d+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ будут линейно независимыми векторами, определяющими объединение плоскостей (13). Число этих векторов равно

$$s=d+(k-d)+(l-d),$$

откуда вытекает формула Грассмана (12).

Формулу Грассмана можно считать справедливой и для непересекающихся плоскостей (5) и (5а), не имеющих общих направлений, т. е. таких, что все векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ линейно не зависят от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$; здесь только следует условно положить $d=-1$. В самом деле в этом случае векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k; \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ и $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ линейно независимы и определяют объединение плоскостей (5) и (5а), т. е.

$$s=k+l+1. \tag{14}$$

Формулу Грассмана можно распространить и на случай непересекающихся $\frac{p}{k}$-параллельных плоскостей (5) и (5а), когда за векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p$ можно принять одни и те же векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p$, определяющие общее p-мерное направление двух плоскостей. В этом случае приходится положить $d=p-1$, так как здесь векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p; \boldsymbol{a}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_k; \boldsymbol{b}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ и $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ линейно независимы и определяют объединение плоскостей (5) и (5а), т. е.

$$s=p+(k-p)+(l-p)+1=k+l-p+1. \tag{14'}$$

Г. Шуберт, основоположник так называемой «вычислительной геометрии», подсчитал, что *многообразие всех k-мерных плоскостей пространства E^n зависит от*

$$P_{n,k}=(k+1)(n-k) \tag{15}$$

параметров. В самом деле, мы видели, что k-мерная плоскость определяется $k+1$ точками, не лежащими в одной $(k-1)$-мерной плоскости. Каждая из этих точек определяется n координатами и, следовательно, все эти точки зависят от $n(k+1)$ параметров. С другой стороны, то же число параметров равно сумме искомого числа $P_{n,k}$ параметров многообразия всех k-мерных плоскостей и числа тех параметров, от которых зависят эти точки на k-мерной плоскости. Так как k-мерная плоскость пространства E^n является пространством E^k, а каждая точка пространства E^k определяется k координатами, последнее число равно $k(k+1)$; поэтому $n(k+1)=P_{n,k}+k(k+1)$, откуда и вытекает формула Шуберта.

В случае точек пространства E^n, т. е. при $k=0$, формула Шуберта дает: $P_{n,0}=n$; это соответствует тому, что пространство E^n n-мерно. В случае прямых пространства E^n, т. е. при $k=1$, эта формула дает: $P_{n,1}=2(n-1)$, откуда, в частности, видно, что многообразие прямых пространства E^3 зависит от 4 параметров. В случае $k=n-1$ эта формула дает: $P_{n,n}=n$, откуда следует, что *многообразие гиперплоскостей пространства E^n n-мерно.*

2.3. Применение прямоугольных матриц. Уравнения (5) и (9) k-мерной плоскости можно переписать в более компактном виде, если обозначить прямоугольные матрицы, состоящие из коэффициентов уравнений (5′) и (9′):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} u_{k+1,1} & u_{k+1,2} & \ldots & u_{k+1,n} \\ u_{k+2,1} & u_{k+2,2} & \ldots & u_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

первая из которых имеет k столбцов и n строк, а вторая — n столбцов и $n-k$ строк, — соответственно через A и U, а строку $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ и столбец $\begin{Bmatrix} v_{k+1} \\ v_{k+2} \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$ рассматривать соответственно как вектор t пространства E^k и вектор v пространства E^{n-k}. С помощью этих обозначений уравнения (5′) и (9′), равносильные уравнениям (5) и (9), можно переписать в виде

$$x = x_0 + At \tag{16}$$

и соответственно

$$Ux + v = 0. \tag{17}$$

Уравнение (16) является обобщением векторного уравнения прямой (4), в которое оно переходит при $k=1$, а уравнение (17) является обобщением векторного уравнения гиперплоскости (8), в которое оно переходит при $k = n-1$.

Если мы условимся считать, что индексы $i, j, \ldots$ пробегают значения $1, 2, \ldots, n$, индексы $a, b, \ldots$ пробегают значения $1, 2, \ldots, k$, а индексы $u, v, \ldots$ пробегают значения $k+1, k+2, \ldots, n$, то матрицы A и U можно будет записать также в виде (a_{ia}) и (u_{ui}); векторы, из координат которых составлены эти матрицы, мы обозначим через a_a и u_u.

Прямоугольная матрица (a_{ia}) переводит вектор t пространства E^k в вектор At пространства E^n, а прямоугольная матрица (u_{ui}) переводит вектор x пространства E^n в вектор Ux пространства E^{n-k}. Наряду с матрицами A и U мы рассмотрим также матрицы $A^T=(a_{ai})$ и $U^T=(u_{iu})$, полученные из матриц A и T с помощью *транспонирования*, т. е. замены строк на столбцы. Матрица A^T переводит векторы пространства E^n в векторы пространства E^k, а матрица U^T — векторы пространства E^{n-k} — в векторы пространства E^n. Поэтому можно определить произведения A^TA, AA^T, U^TU и UU^T, переводящие в первом случае векторы t пространства E^k в векторы того же пространства, во втором и третьем случаях — векторы x пространства E^n в векторы того же пространства, а в четвертом случае — векторы v пространства E^{n-k} в векторы того же пространства. Ясно, что матрица A^TA есть квадратная матрица k-го порядка, матрицы AA^T и U^TU — квадратные матрицы n-го порядка, а матрица UU^T — квадратная матрица $(n-k)$-го порядка.

Если векторы a_a — единичные ($|a_a|=1$) и взаимно перпендикулярные ($a_ab_b=0$ при $a \neq b$), то нетрудно проверить, что матрица A удовлетворяет равенству

$$A^TA = I_k, \tag{18}$$

где I_k — единичная матрица k-го порядка. Если векторы u_k — единичные ($|u_k|=1$) и взаимно перпендикулярные, то нетрудно проверить, что матрица U удовлетворяет условию

$$UU^T = I_{n-k}, \tag{19}$$

где I_{n-k} — единичная матрица $(n-k)$-го порядка.

Рассмотрим две пересекающиеся плоскости (13) при $l=k$, уравнения (16) которых имеют вид

$$x = x_0 + At \quad \text{и} \quad x = x_0 + Bu, \tag{20}$$

а уравнения (17) имеют вид

$$Ux + v = 0 \quad \text{и} \quad Vx + w = 0. \tag{21}$$

Так как точка $M_0(x_0)$ принадлежит обеим плоскостям, то $Ux_0 = -v$, $Vx_0 = -w$, и, следовательно, уравнения (21) можно переписать в виде

$$U(x-x_0)=0 \quad \text{и} \quad V(x-x_0)=0. \tag{22}$$

Покажем, что *необходимым и достаточным условием того, что две k-мерные плоскости* (20) *не имеют других общих точек, кроме точки M_0, является равенство ранга матриц UB и VA числу k*. В самом деле, если плоскости имеют общую точку $M(x)$, отличную от точки M_0, то вектор $x-x_0$, с одной стороны, удовлетворяет условиям (22), а с другой стороны, в силу уравнений (20), имеет вид $x-x_0=At=Bu$. Поэтому в этом случае имеют место соотношения

$$(UB)u=0 \quad \text{и} \quad (VA)t=0. \tag{23}$$

Если же M_0—единственная точка пересечения плоскостей, то у уравнений (23) не может быть решений, отличных от 0, что имеет место только в том случае, когда матрицы UB и VA, имеющие k столбцов и $n-k$ строк, имеют линейно независимые столбцы, т. е. ранг этих матриц равен k. Заметим, что это условие выполнимо только при $k \leqslant n-k$.

Необходимым и достаточным условием того, что пересекающиеся k-мерные плоскости (20) *пересекаются по d-мерной плоскости, является равенство ранга матриц UB и VA числу $k-d$*. В самом деле, если эти плоскости пересекаются по d-мерной плоскости, среди векторов $x-x_0=At=Bu$, удовлетворяющих уравнениям (22), имеется d линейно независимых, т. е. уравнения (23) обладают d линейно независимыми решениями, что может иметь место только, когда ранг матриц UB и VA равен $k-d$. Поэтому для определения размерности пересечения двух k-мерных плоскостей (20) следует составить матрицу UB или VA; если ранг этой матрицы равен r, искомая размерность равна $k-r$. Аналогично, если мы вычислим ранг r матрицы UB или VA для непересекающихся плоскостей (5) и (5а) при $l=k$, то число $k-r$ будет равно размерности общего направления этих плоскостей, т. е. плоскости будут $\frac{k-r}{k}$-параллельными.

2.4. Расстояние между плоскостями. Так же как в случае пространства E^3, показывается, что *кратчайшее расстояние d от точки A пространства E^n до k-мерной плоскости N этого пространства равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость* (ср. выше, стр. 356). Если вектор $\overline{AB}$, где $A(x)$—точка пространства E^n, а B—точка k-мерной плоскости N с уравнением (5), перпендикулярен к этой плоскости, т. е. перпендикулярен ко всем векторам a_b, $b=1, 2, \ldots, k$, то $\left(x-x_0-\sum_a t_a a_a\right) a_b = 0$ (где также и $a=1, 2, \ldots, k$), что равносильно системе уравнений

$$(x-x_0)\,a_b = \sum_a (a_a a_b)\, t_a. \tag{24}$$

Это—система m линейных уравнений с m неизвестными t_a, определяющими основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость. Определив из этой системы числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$, мы получим: $\overline{AB}=x-x_0-\sum t_a a_a$, после чего уже нетрудно вычислить расстояние $d=|\overline{AB}|$ от точки A до плоскости N.

Аналогично этому *кратчайшее расстояние d между двумя* (непересекающимися) *плоскостями* (произвольной размерности) *пространства E^n равно длине общего перпендикуляра этих двух плоскостей.* В самом деле, пусть A_0B_0 — общий перпендикуляр плоскостей M и N, а A, B — какие угодно другие точки тех же плоскостей. Опустим из точки A перпендикуляр AB_1 на плоскость N. Объединением прямых A_0A и B_0B_1 является трехмерное пространство E^3 или двумерная плоскость E^2, причем в обоих случаях кратчайшим расстоянием между прямыми A_0A и B_0B_1 является их общий перпендикуляр A_0B_0; поэтому $A_0B_0 \leqslant AB_1$. С другой стороны, кратчайшим расстоянием от точки A до плоскости N является перпендикуляр AB_1, опущенный из A на N; поэтому $AB_1 \leqslant AB$. Таким образом, $A_0B_0 \leqslant AB$.

Доказательство существования общего перпендикуляра A_0B_0 можно провести в точности так же, как в случае двух прямых трехмерного пространства. Пусть M и N — k-мерная и l-мерная плоскости n-мерного пространства E^n, не имеющие общих точек; уравнения этих плоскостей пусть имеют вид (5) и (5а). Из числа векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k; \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ пусть будет r линейно независимых (т. е. плоскости M и N пусть будут $\frac{k+l-r}{k}$-параллельны); эти векторы мы обозначим через $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r$. В таком случае $(r+1)$-мерная плоскость

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{c}_1 + t_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + t_r\boldsymbol{c}_r + t_{r+1}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)$$

будет являться объединением плоскостей M и N. В этой плоскости P однозначно определятся две параллельные r-мерные плоскости (гиперплоскости пространства P) M^r и N^r, содержащие M, соответственно N; уравнения этих плоскостей можно записать в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{c}_1 + t_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + t_r\boldsymbol{c}_r$$

и

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + t_1\boldsymbol{c}_1 + t_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + t_r\boldsymbol{c}_r.$$

Ортогональная проекция M_0 плоскости M на плоскость N^r представляет собой множество оснований перпендикуляров, опущенных из точек плоскости M на плоскость N^r; она является k-мерной плоскостью, принадлежащей N^r и пересекающей N по $(k+l-r)$-мерной плоскости $\overline{M}$ (в силу формулы Грассмана (12) размерность d пересечения M_0 и N находится из соотношения $d+r=k+l$). Любой перпендикуляр, опущенный из точки плоскости $\overline{M}$ на плоскость M^r, пересекает M и перпендикулярен к плоскостям M^r и N^r, а следовательно и плоскостям M и N (см. рис. 6, где изображен случай $k=l=1$, $r=2$, $r+1=3$, $d=k+l-r=0$). Из проведенного

доказательства следует, что *множество оснований общих перпендикуляров плоскостей* (5) *и* (5а) *представляет собой p-мерную плоскость, где* $\frac{p}{k}$ *— степень параллельности рассматриваемых плоскостей.* Этот вывод сохраняет силу и для пересекающихся плоскостей, где рассматриваемое множество совпадает с пересечением плоскостей, а расстояние между плоскостями равно нулю.

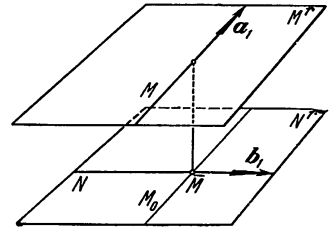


Рис. 6.

Вот иной вариант того же доказательства, опирающийся только на формулу Грассмана (12). Плоскость M^* с уравнением (11), перпендикулярная к k-мерной плоскости M, имеет размерность $n-k$; аналогично определяется плоскость N^*, перпендикулярная к l-мерной плоскости N и имеющая размерность $n-l$. Отложим плоскости, параллельные M, N, M^* и N^* из одной точки O; при этом плоскости, параллельные M и N, будут иметь $(k+l-r)$-мерное пересечение P и объединением плоскостей M^* и N^* будет служить $(n-k-l+r)$-мерная плоскость P^*, полностью перпендикулярная к P. Отсюда вытекает, что пересечение П плоскостей M^* и N^* будет иметь размерность $(n-k)+(n-l)-(n-k-l+r)=n-r$.

Проведем теперь через каждую точку плоскости M $(n-r)$-мерную плоскость, параллельную П. Множество всех этих плоскостей образует $(k+n-r)$-мерную плоскость. В силу той же формулы (12), размерность пересечения последней плоскости и плоскости N равна $(k+n-r)+l-n=k+l-r=p$, — это и есть множество оснований (на плоскости N!) общих перпендикуляров плоскостей M и N.

Для того чтобы найти уравнение общего перпендикуляра A_0B_0 плоскостей (5) и (5а), где точки A_0 и B_0 задаются равенствами

$$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{x}_0+t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+t_k\boldsymbol{a}_k$$

и

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1+s_1\boldsymbol{b}_1+s_2\boldsymbol{b}_2+\ldots+s_l\boldsymbol{b}_l,$$

достаточно воспользоваться условием перпендикулярности вектора $\overline{A_0B_0}=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)-t_1\boldsymbol{a}_1-t_2\boldsymbol{a}_2-\ldots-t_k\boldsymbol{a}_k+s_1\boldsymbol{b}_1+s_2\boldsymbol{b}_2+\ldots+s_l\boldsymbol{b}_l$ ко всем векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k; \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ (или линейно независимым векторам $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r$). Уравнения $\overline{A_0B_0}\cdot\boldsymbol{a}_i=0$, $\overline{A_0B_0}\cdot\boldsymbol{b}_j=0$, $i=1, 2, \ldots, k$; $j=1, 2, \ldots, l$, или, что то же самое, $\overline{A_0B_0}\cdot\boldsymbol{c}_h=0$, $h=1, 2, \ldots, r$, представляют собой систему r независимых линейных уравнений с $k+l$ неизвестными $t_1, \ldots, t_k$; $s_1, \ldots, s_l$; они имеют $(k+l-r)$-мерное множество решений. Определив числа t_i и s_j, мы далее без труда найдем и величину

$$d=|\overline{A_0B_0}|=\left|(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)-\sum_{i=1}^{k}t_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{j=1}^{l}s_j\boldsymbol{b}_j\right|$$

расстояния между плоскостями M и N.

Систему (24) можно также переписать в виде

$$A^T(x-x_0)=(A^TA)\,t, \tag{25}$$

где уравнение k-мерной плоскости M мы теперь записываем в форме (16). Для решения этой системы достаточно умножить обе ее части на матрицу $(A^TA)^{-1}$, обратную (квадратной) матрице A^TA:

$$t=(A^TA)^{-1}A^T(x-x_0). \tag{26}$$

Матрица A^TA всегда неособенная (ибо векторы a_α линейно независимы); в случае, когда эти векторы единичны и взаимно перпендикулярны, эта матрица, в силу формулы (18), является единичной матрицей I_k.

Радиус-вектор y точки B имеет вид

$$y=x_0+At=x_0+A(A^TA)^{-1}A^T(x-x_0) \tag{27}$$

и вектор $\overline{AB}$ равен вектору

$$y-x=(A(A^TA)^{-1}A^T-I_n)(x-x_0), \tag{28}$$

где I_n—единичная матрица n-го порядка.

Для вычисления расстояния d от точки A до плоскости (16), равного модулю вектора $y-x$, заметим, что если S—произвольная матрица n-го порядка, то скалярное произведение вектора Sx на себя равно $(Sx)(Sx)=xS^TSx$, и что $(RS)^T=S^TR^T$, $(S^{-1})^T=(S^T)^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
d^2&=(y-x)(y-x)=\\
&=(x-x_0)(A(A^TA)^{-1}A^T-I_n)^T(A(A^TA)^{-1}A^T-I_n)(x-x_0)=\\
&=(x-x_0)[(A^T)^T[A^T(A^T)^T]^{-1}A^T-I_n](A(A^TA)^{-1}A^T-I_n)(x-x_0)=\\
&=(x-x_0)(A(A^TA)^{-1}A^T-I_n)^2(x-x_0)=\\
&=(x-x_0)[A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T-2A(A^TA)^{-1}A^T+I_n](x-x_0)=\\
&=(x-x_0)(I_n-A(A^TA)^{-1}A^T)(x-x_0),
\end{aligned}$$

т. е.

$$d^2=(x-x_0)(I_n-A(A^TA)^{-1}A^T)(x-x_0). \tag{29}$$

Вектор $\overline{AB}$ и расстояние d могут быть записаны и в другой форме: вектор $\overline{AB}$ лежит в $(n-k)$-мерной плоскости (11), уравнение которой можно записать в виде

$$x=x_0+U^Tt. \tag{30}$$

Так как векторы a_α и u_μ образуют базис пространства E^n, то k-мерная плоскость (17) и $(n-k)$-мерная плоскость (30) пересекаются в точке B, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки $A(x_0)$ на плоскость (17). Поэтому точка B имеет своим радиусом-вектором вектор (30), удовлетворяющий уравнению (17), т. е. определяется вектором t, удовлетворяющим условию $U(x_0+U^Tt)+v=0$, которое можно переписать в виде

$$Ux_0+v=-(UU^T)t. \tag{31}$$

Это уравнение равносильно системе $n-k$ линейных уравнений с $n-k$ неизвестными t_μ. Решение этой системы имеет вид

$$t=-(UU^T)^{-1}(Ux_0+v). \tag{32}$$

Матрица UU^T всегда неособенная, если векторы u_μ линейно независимы; в случае же, когда эти векторы единичны и взаимно перпендикулярны, эта матрица, в силу формулы (19), является единичной матрицей I_{n-k}.

Радиус-вектор y точки B имеет вид

$$y=x_0+U^Tt=x_0-U^T(UU^T)^{-1}(Ux_0+v) \tag{33}$$

и вектор $\overline{AB}$ равен вектору

$$y-x_0=-U^T(UU^T)^{-1}(Ux_0+v). \tag{34}$$

Поэтому

$$d^2=(y-x_0)(y-x_0)=(x_0U^T+v)(UU^T)^{-1}(Ux_0+v). \tag{35}$$

В случае, когда $UU^T=I_{n-k}$, формула (35) принимает простой вид

$$d=|Ux_0+v|.$$

Если A_0—точка k-мерной плоскости (5), а B_0—точка l-мерной плоскости (5а), уравнения (16) которых имеют вид

$$x=x_0+At \quad \text{и} \quad x=x_1+Bu, \tag{36}$$

то условие того, что вектор $\overline{A_0B_0}=x_1-x_0+Bu-At$ перпендикулярен к обеим плоскостям (36), может быть записано в виде системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}(A^TA)\,t-(A^TB)\,u+A^T(x_1-x_0)&=0,\\ (B^TA)\,t-(B^TB)\,u+B^T(x_1-x_0)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Подставляя векторы t и u, являющиеся решениями этой системы, в формулы (36), мы получим радиусы-векторы концов общего перпендикуляра плоскостей (36)—единственного в том случае, когда эти плоскости не имеют общих направлений, т. е. 0-параллельны,—а длина d такого общего перпендикуляра совпадает с расстоянием между этими плоскостями. Это расстояние d может быть выражено по формуле

$$d=\frac{|(a_1a_2\ldots a_kb_1\ldots b_l(x_1-x_0))|}{|[a_1a_2\ldots a_kb_1\ldots b_l]|} \tag{38}$$

через $(k+l)$-кратное произведение $[a_1a_2\ldots a_kb_1\ldots b_l]$ и $(k+l+1)$-кратное произведение $(a_1a_2\ldots a_kb_1\ldots b_l\,(x_1-x_0))$ векторов $(k+l+1)$-мерного объединения наших плоскостей (см. стр. 378—380 кн. IV ЭЭМ). В более общем случае $\frac{k+l-r}{k}$-параллельности плоскостей (5) и (5а) кратчайшее расстояние d между ними выражается формулой

$$d=\frac{|c_1c_2\ldots c_r(x_1-x_0)|}{|[c_1c_2\ldots c_r]|}, \tag{38а}$$

где векторы $c_1, c_2, \ldots, c_r$ имеют смысл, указанный на стр. 364, а r-кратное и $(r+1)$-кратные произведения векторов рассматриваются в $(r+1)$-мерном объединении плоскостей (5) и (5а).

2.5. Углы между плоскостями. Пусть N—некоторая k-мерная плоскость и m—прямая, которую мы будем считать пересекающей плоскость N в точке O (если прямая не пересекает плоскость, то мы заменим ее новой прямой, параллельной исходной и проходящей через точку O плоскости N). Если прямая m п е р п е н д и к у л я р н а к плоскости N, то все прямые плоскости N образуют с m один и тот же угол $\pi/2$, который и следует назвать *углом между прямой m и плоскостью N*. Пусть теперь m н е п е р п е н д и к у л я р н а к N. Проекция m на N представляет собой прямую m^0—пересечение плоскости N и двумерной плоскости, задаваемой прямой m и перпендикуляром p, восставленным к N в точке O и принадлежащим $(k+1)$-мерному объединению плоскостей N и m (см. рис. 7, где $k=2$; заметим, что, в силу формулы (12), в $(k+1)$-мерном пространстве E^{k+1} пересечение k-мерной плоскости и 2-мерной плоскости, вообще говоря, является

прямой). Пусть $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор прямой m, $\boldsymbol{a}^0$ и $-\boldsymbol{a}^0$ — единичные векторы прямой m^0, $\varphi_1 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^0) < \pi/2$ и $\varphi_2 = \angle(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{a}^0) > \pi/2$ — углы, образуемые вектором $\boldsymbol{a}$ с векторами $\boldsymbol{a}^0$ и $-\boldsymbol{a}^0$ (см. тот же рис. 7). Нетрудно убедиться, что *угол* φ_1 *меньше всех других углов, образуемых вектором* $\boldsymbol{a}$ *с векторами плоскости* N, *а угол* φ_2 *больше всех таких углов*. В самом деле, так как m^0 — проекция прямой m на плоскость N, то вектор $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0)\,\boldsymbol{a}^0$ параллелен перпендикуляру p к плоскости N. Поэтому скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ на произвольный единичный вектор $\boldsymbol{b}$ плоскости N равно нулю:

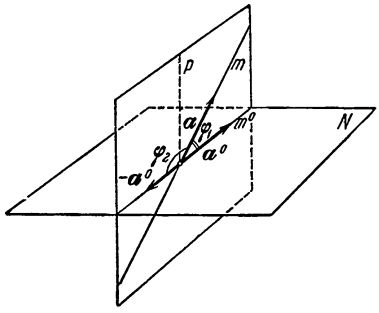


Рис. 7.

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0)\,\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b} = 0$$

или

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0).$$

Если произведение $\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}$ отрицательно, то $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} < 0$ и поэтому заведомо меньше положительного числа $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0$ (напомним, что $\varphi_1 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^0) < \frac{\pi}{2}$); но и в том случае, когда $(\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b})$ положительно, $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) \leqslant (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0)$, ибо скалярное произведение $(\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b})$ двух единичных векторов $\boldsymbol{a}^0$ и $\boldsymbol{b}$ не может превосходить 1 (см. выше неравенство (1а) на стр. 351). При этом, если вектор $\boldsymbol{b}$ не совпадает с вектором $\boldsymbol{a}^0$, то $(\boldsymbol{a}^0\boldsymbol{b}) < 1$ и, следовательно, $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) < (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0)$, а значит, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^0)$.

А теперь если $-\boldsymbol{b}$ — произвольный единичный вектор плоскости N, отличный от $-\boldsymbol{a}^0$, то из того, что $(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}) < (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^0)$, следует $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > (\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{a}^0)$ и, значит, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < \angle(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{a}^0)$.

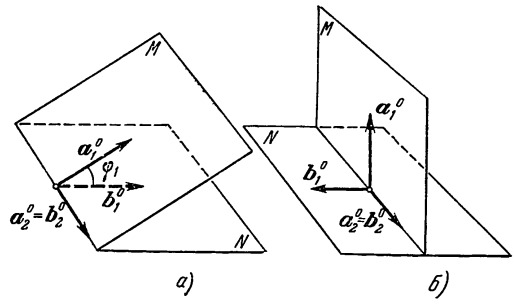
Любой из углов φ_1 и φ_2 можно назвать *углом между прямой* m *и плоскостью* N; для определенности обычно углом между m и N называют угол φ_1.

Пусть теперь мы имеем k-мерную плоскость M и l-мерную плоскость N. Угол между единичными векторами $\boldsymbol{a}^0$ и $\boldsymbol{b}^0$ плоскостей M и N называется *стационарным углом* между плоскостями M и N (или, короче, просто *углом между плоскостями* M *и* N), если $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)$ не больше (или не меньше) любого угла $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{b}$ — вектор плоскости N, и $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)$ не меньше (или не больше) любого угла $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}^0)$, где $\boldsymbol{a}$ — вектор плоскости M. Из доказанного выше следует, что для того, чтобы $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)$ был стационарным углом между плоскостями M и N, необходимо и достаточно, чтобы: 1) вектор $\boldsymbol{a}^0$ был перпендикулярен к плоскости N (при этом вектор $\boldsymbol{b}^0$ может быть любым); либо 2) вектор $\boldsymbol{b}^0$ был перпендикулярен к плоскости M (при этом вектор $\boldsymbol{a}^0$ может быть любым); либо 3) вектор $\boldsymbol{a}^0$ коллинеарен с проекцией вектора $\boldsymbol{b}^0$ на плоскость M, а вектор $\boldsymbol{b}^0$ — с проекцией вектора $\boldsymbol{a}^0$ на плоскость N.

В плоскостях M и N можно выделить k и l взаимно перпендикулярных направлений, задаваемых векторами $\boldsymbol{a}_1^0, \boldsymbol{a}_2^0, \ldots, \boldsymbol{a}_k^0$, соответственно $\boldsymbol{b}_1^0, \boldsymbol{b}_2^0, \ldots, \boldsymbol{b}_l^0$, так что при $i \neq j$ $\angle(\boldsymbol{a}_i^0, \boldsymbol{b}_j^0) = \pi/2$, а все углы $\varphi_1 = \angle(\boldsymbol{a}_1^0, \boldsymbol{b}_1^0)$, $\varphi_2 = \angle(\boldsymbol{a}_2^0, \boldsymbol{b}_2^0), \ldots, \varphi_k = \angle(\boldsymbol{a}_k^0, \boldsymbol{b}_k^0)$ являются стационарными (см. ниже, стр. 372). Углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ и называются *углами между плоскостями M и N*; таким образом, в пространстве E^n взаимное расположение k-мерной плоскости M и l-мерной плоскости N (где $k \leqslant l$) характеризуют k углов. При этом в качестве ч и с е л, характеризующих взаимное расположение плоскостей M и N, удобнее брать не сами углы φ_i, а квадраты их косинусов: $\alpha_i = \cos^2 \varphi_i$ (где $i = 1, 2, \ldots, k$), — в самом деле, если $\varphi_i = \angle(\boldsymbol{a}_i^0, \boldsymbol{b}_i^0)$ — стационарный угол, то также и $\angle(-\boldsymbol{a}_i^0, \boldsymbol{b}_i^0)$, $\angle(\boldsymbol{a}_i^0, -\boldsymbol{b}_i^0)$ и $\angle(-\boldsymbol{a}_i^0, -\boldsymbol{b}_i^0)$ являются стационарными углами, причем этим четырем (несущественно отличающимся друг от друга!) углам отвечает о д н о значение величины $\alpha_i = \cos^2 \varphi_i$. Если $k = l = 2$, то стационарные углы отвечают наибольшему и наименьшему значениям угла $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (точнее, величины $\alpha = \cos^2 \varphi$), где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы плоскостей M и N (ясно, что если $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)$, скажем, н а и м е н ь ш и й угол между плоскостями, то для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ плоскостей M и N имеют место неравенства $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \leqslant \leqslant \angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b})$ и $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \leqslant \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}^0)$). Так, на рис. 8 изображены стационарные углы двух 2-мерных плоскостей в трехмерном пространстве E^3, где всегда одно из двух чисел α_1 и α_2 равно 1; в пространстве же E^n, где $n > 3$, вообще говоря, ни один из стационарных углов между двумя 2-мерными плоскостями не равен 0 (или π). Если $k > 2$, то к числу стационарных углов между плоскостями M и N, как правило, будут относиться и такие углы $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)$, что, скажем, для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ плоскостей M и N имеют место неравенства $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) < \angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b})$ и $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) > > \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}^0)$, так что $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)$ не является ни наибольшим, ни наименьшим. Если плоскости M и N $\frac{p}{k}$-параллельны, то p из k углов между этими плоскостями равны 0 (или π), т. е. p величин α_i обращаются в 1. Если плоскости M и N $\frac{q}{k}$-перпендикулярны, то q углов между этими плоскостями равны $\pi/2$ (т. е. q величин α_i равны 0). Так, например, из двух углов между перпендикулярными плоскостями трехмерного пространства один равен 0, а второй $\pi/2$ (см. рис. 8, *б*).

Углы между плоскостями M и N и расстояние между плоскостями образуют полную систему инвариантов двух плоскостей, полностью характеризующих их расположение друг относительно друга. Это означает, что если две пары плоскостей M и N, $\overline{M}$ и $\overline{N}$ (где плоскости M и $\overline{M}$ имеют одну размерность k, а

плоскости N и $\overline{N}$ — одну размерность l) таковы, что расстояние между M и N равно расстоянию между $\overline{M}$ и $\overline{N}$ и углы между M и N равны углам между $\overline{M}$ и $\overline{N}$, то существует такое движение пространства E^n, которое переводит плоскость M в плоскость $\overline{M}$ и плоскость N в плоскость $\overline{N}$. На доказательстве этого утверждения мы не остановимся [1]).



а) б)

Рис 8

Стационарные углы между плоскостями M и N пространства E^n можно описать следующим образом. Предположим, что плоскости M и N проходят через одну точку O, и рассмотрим всевозможные единичные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ плоскостей M, соответственно N, отложенные от точки O. Концы этих векторов заполнят «единичные сферы» S_1 и S_2 пространств M и N (понимаемых как пространства E^k и E^l; ср. ниже, § 3). Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется расстояниями между их концами; таким образом, наша задача состоит в определении характерных расстояний между двумя (концентрическими) сферами S_1 и S_2 пространств E^k и E^l.

Естественно характеризовать взаимное расположение наших двух сфер *наибольшим* и *наименьшим* расстояниями между ними; существование таких расстояний вытекает из замкнутости сфер (ср. стр. 202—206 этой книги ЭЭМ). Но более полно описывает взаимное расположение сфер система с т а ц и о н а р н ы х расстояний между ними. При этом расстояние A_0B_0 (где точка A_0 принадлежит сфере S_1, а точка B_0 — сфере S_2) называется *стационарным*, если для любых точек A и B сфер S_1 и S_2 расстояние A_0B_0 не больше (или не меньше) A_0B и не больше (или не меньше) AB_0.

Смысл понятия стационарных расстояний заключается в следующем. *Стационарными значениями* (достаточно «гладкой», скажем, дифференцируемой) функции $z=f(x, y)$ двух переменных x и y (разумеется, соответствующее понятие можно определить и для функций большего числа переменных) называются значения ее в тех точках, в которых касательная к поверхности $z=f(x, y)$ параллельна (x, y)-плоскости. Разумеется, к числу стационарных значений функции относятся ее наибольшее (рис. 9, *а*) и на-

---

[1]) Пусть A_0B_0 и $\overline{A}_0\overline{B}_0$ — общие перпендикуляры пар плоскостей M и N, $\overline{M}$ и $\overline{N}$; $\boldsymbol{a}_1^0, \ldots, \boldsymbol{a}_k^0$ и $\boldsymbol{b}_1^0, \ldots, \boldsymbol{b}_l^0$, соответственно $\overline{\boldsymbol{a}}_1^0, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}}_k^0$ и $\overline{\boldsymbol{b}}_1^0, \ldots, \overline{\boldsymbol{b}}_l^0$ — векторы плоскостей M и N, $\overline{M}$ и $\overline{N}$, определяющие стационарные углы между этими плоскостями (эти векторы удобно отложить от точек A_0 и B_0, соответственно $\overline{A}_0$ и $\overline{B}_0$). Можно доказать, что если $A_0B_0=\overline{A}_0\overline{B}_0$ и $\angle(\boldsymbol{a}_i^0, \boldsymbol{b}_i^0)=\angle(\overline{\boldsymbol{a}}_i^0, \overline{\boldsymbol{b}}_i^0)$, $i=1, 2, \ldots, k$, то существует движение пространства E^n, переводящее отрезок A_0B_0 в отрезок $\overline{A}_0\overline{B}_0$ и векторы $\boldsymbol{a}_1^0, \ldots, \boldsymbol{a}_k^0; \boldsymbol{b}_1^0, \ldots, \boldsymbol{b}_l^0$ в векторы $\overline{\boldsymbol{a}}_1^0, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}}_k^0; \overline{\boldsymbol{b}}_1^0, \ldots, \overline{\boldsymbol{b}}_l^0$. Это движение и переводит плоскости M и N в плоскости $\overline{M}$ и $\overline{N}$.

именьшее (рис. 9, *б*) значения. Но стационарное значение может иметь и совсем другой характер. Рассмотрим рис. 9, *в*, на котором изображена «седлообразная» точка функции $z=f(x, y)$ (точка типа «перевала», в то время как рис. 9, *а*, *б* изображают «вершину» и «котлован»). Касательная к поверхности $z=f(x, y)$ в этой точке также горизонтальна; однако значение функции здесь не является ни наибольшим, ни наименьшим: при движении в одном направлении (в направлении оси y на рис. 9, *в*) это значение оказывается наибольшим, а в другом (в направлении оси x)—наименьшим.

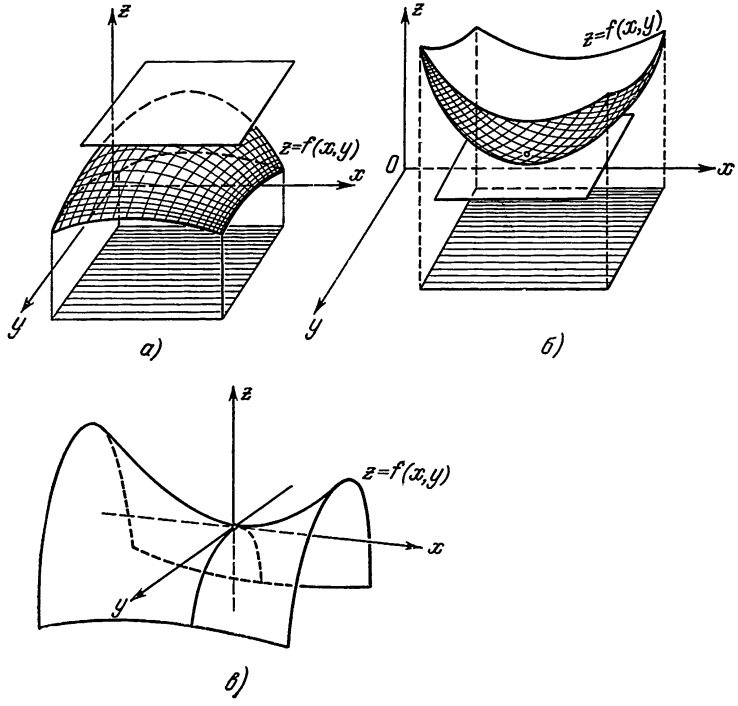


Рис. 9.

Предположим, что мы хотим охарактеризовать расстояние от точки A до (замкнутой) поверхности S. При этом также естественно искать *стационарные расстояния* от точки до поверхности. Если наша поверхность представляет собой сферу, то стационарное расстояние AB_0 от точки A до поверхности S (оно характеризуется тем, что отрезок AB_0 перпендикулярен к касательной плоскости к поверхности S в точке B_0) есть не что иное, как наибольшее или наименьшее расстояние от точки A до сферы S (рис. 10; ср. стр. 202 этой книги ЭЭМ). Но если поверхность S представляет собой, скажем, тор (баранку), то наряду с наибольшим и наименьшим расстояниями появляются также и стационарные расстояния седлообразного типа (см. рис. 11, где $AB_0^{(1)}$ и $AB_0^{(2)}$—наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до тора S, а $AB_0^{(3)}$ и $AB_0^{(4)}$—стационарные расстояния «седлообразного» типа; заметьте, что, скажем, при движении точки B по «экватору» тора расстояние $AB_0^{(3)}$ оказывается наименьшим, а при движении по «меридиану»—наибольшим).

Перейдем к вопросу о нахождении стационарных углов двух плоскостей M и N, задаваемых, скажем, уравнениями (5) и (5а) (где можно даже считать $x_0 = x_1 = 0$). Если вектор a^0 проектируется

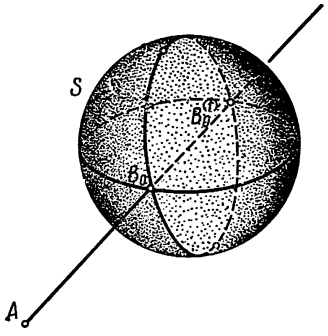


Рис. 10.

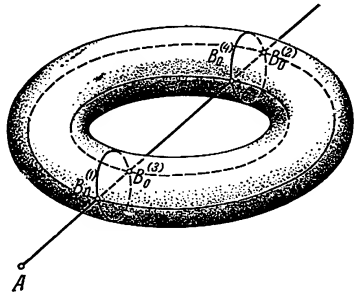


Рис. 11.

на плоскость N в вектор αb^0, то разность $a^0 - \alpha b^0$ перпендикулярна к плоскости N, т. е.

$$(a^0 - \alpha b^0)\, b_j = a^0 b_j - \alpha b^0 b_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{39а}$$

Аналогично, если вектор b^0 проектируется на плоскость M в вектор βa^0, то

$$(b^0 - \beta a^0)\, a_i = b^0 a_i - \beta a^0 a_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{39б}$$

Заметим теперь, что векторы a^0 и b^0 принадлежат плоскостям M и N, т. е.

$$a^0 = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_k a_k \quad \text{и} \quad b^0 = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \ldots + u_l b_l. \tag{40}$$

Умножая уравнения (39а) на множители u_j и суммируя, получаем: $a^0 b^0 - \alpha (b^0)^2 = 0$, или $a^0 b^0 = \alpha$. Аналогично, умножая равенства (39б) на множители t_i и суммируя, имеем: $b^0 a^0 - \beta (a^0)^2 = 0$, или $a^0 b^0 = \beta$. Таким образом, мы приходим к выводу, что $\alpha = \beta = a^0 b^0$, или (напоминаем, что векторы a^0 и b^0 — единичные) $\alpha = \beta = \cos \angle (a^0, b^0)$. Величина $\alpha = \beta$ совпадает, таким образом, с косинусом стационарного угла между векторами a^0 и b^0. Заметим также, что если, скажем, вектор a^0 перпендикулярен к плоскости M, то равенства (39а) также имеют место; только в них следует положить $\alpha = 0$ (что тоже соответствует равенству $\alpha = \cos \angle (a^0 b^0)$).

Подставив в равенства (39а—б) значения (40), мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} t_i (a_i b_j) - \alpha \sum_{r=1}^{l} u_r (b_r b_j) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, l, \\ &\sum_{j=1}^{l} u_j (a_i b_j) - \beta \sum_{s=1}^{k} t_s (a_s a_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned} \tag{41}$$

определяющей при условии

$$(a^0)^2=\sum_{i,\,s}^{k} t_i t_s\,(a_i a_s)=1,\qquad (b^0)^2=\sum_{j,\,r}^{l} u_j u_r\,(b_j b_r)=1 \tag{41а}$$

векторы a^0, b^0 и стационарные углы $\varphi_i=\angle\,(a_i,\ b_i)$ (находимые из условия $\cos\varphi=\alpha=\beta$).

В векторной форме уравнения (41) можно переписать так:

$$\begin{aligned}(B^TA)\,t-\alpha\,(B^TB)\,u&=0,\\ (A^TB)\,u-\beta\,(A^TA)\,t&=0;\end{aligned} \tag{41б}$$

при этом мы считаем, что уравнения плоскостей M и N записаны в векторной форме (16). Исключая из уравнения (41б) вектор u, мы получаем, что

$$(A^TA)^{-1}\,(A^TB)\,(B^TB)^{-1}\,(B^TA)\,t=\alpha\beta t, \tag{42}$$

т. е. что вектор t является *собственным вектором* матрицы

$$W=(A^TA)^{-1}\,(A^TB)\,(B^TB)^{-1}\,(B^TA),$$

а число $\alpha\beta=\alpha^2$ равно соответствующему *собственному значению* матрицы W. Матрицу W можно назвать *первой матрицей двойного отношения* двух плоскостей M и N. Аналогично этому, исключая из уравнений (41б) вектор t, мы получим:

$$(B^TB)^{-1}\,(B^TA)\,(A^TA)^{-1}\,(A^TB)\,u=\alpha\beta u,$$

т. е. вектор u является собственным вектором матрицы

$$\tilde{W}=(B^TB)^{-1}\,(B^TA)\,(A^TA)^{-1}\,(A^TB)$$

(*вторая матрица двойного отношения* плоскостей M и N). Внимательный анализ строения матриц W и $\tilde{W}$ показывает, что в плоскостях M и N имеются полные системы взаимно перпендикулярных собственных векторов $a_1^0,\ \ldots,\ a_k^0$ и $b_1^0,\ \ldots,\ b_l^0$ матриц W и $\tilde{W}$[1]).

Если $k=l$ и матрица W имеет форму wI, где I — единичная матрица, т. е. является *скалярной*, то для каждого вектора $a=At$ имеется вектор $b=Bu$, составляющий с ним такой угол φ, что $\cos^2\varphi=w$. В этом случае плоскости M и N называются *изоклинными* плоскостями, т. е. плоскостями равного наклона. Если, в частности, $w=0$, т. е. матрица W является нулевой матрицей, то каждый вектор $a=At$ перпендикулярен к каждому вектору $b=Bu$ и плоскости M и N вполне перпендикулярны.

§ 3. Шары и сферы

3.1. Определения и основные свойства. *Гиперсферой* или просто *сферой* пространства E^n называется множество точек этого пространства, отстоящих от точки $M_0(x_0)$, называемой *центром*, на

[1]) Ср. указанную в списке литературы в конце статьи книгу: П. А. Широков [4], стр. 407—408. Впрочем, перпендикулярность векторов $a_i=At_i$ и $a_j=At_j$, $b_i=Bu_i$ и $b_j=Bu_j$, а также $a_i=At_i$ и $b_j=Bt_j$ (где $i\neq j$), соответствующих собственным векторам t_i и t_j матрицы W и собственным векторам u_i и u_j матрицы $\tilde{W}$, устанавливается простой выкладкой.

одно и то же расстояние r, называемое *радиусом*. Радиусы-векторы точек сферы удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 = r^2. \tag{43}$$

Умножив обе части этого уравнения на произвольный множитель A и обозначив вектор $-Ax_0$ через b, а число $A(x_0^2 - r^2)$ — через c, мы можем переписать уравнение (43) в виде

$$Ax^2 + 2bx + c = 0, \tag{44}$$

или в координатах (ср. стр. 352)

$$A(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \ldots + 2b_nx_n + c = 0. \tag{44a}$$

Множество точек пространства E^n, отстоящих от точки M на расстояние $\leqslant r$, называется *шаром* с центром в точке M_0 и радиусом r.

Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, также называется *радиусом* сферы (и ограниченного этой сферой шара), а любая прямая, проходящая через центр сферы или шара, — *диаметром*. Пересечение сферы S или шара R с плоскостью M любого числа измерений k, очевидно, совсем не содержит точек, если расстояние OP от плоскости M до центра O больше радиуса r шара, и содержит единственную точку, если расстояние OP в точности равно r; в последнем случае плоскость M называется *касательной* к сфере. Из того, что единственная общая точка касательной к сфере и самой сферы совпадает с основанием P перпендикуляра, опущенного из центра O сферы на касательную плоскость, вытекает, что *касательная к сфере* (эта касательная может являться плоскостью любого числа измерений) *перпендикулярна к радиусу сферы, проведенному в точку касания*. Если расстояние d от центра O сферы S до плоскости M меньше радиуса r сферы, то пересечение сферы и плоскости содержит много точек. При этом если A — какая угодно из этих точек, а P — основание перпендикуляра, опущенного из центра O сферы S на плоскость M, то $\angle OPA = \pi/2$ и (см. рис. 12, на котором изображены лишь точки O, P и A, но не сфера S или плоскость M) $PA = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{r^2 - d^2}$, откуда следует, что в этом случае пересечение плоскости M и сферы S представляет собой сферу s плоскости M (понимаемой как пространство E^k) с радиусом $\sqrt{r^2 - d^2}$. Аналогично этому, пересечение шара R, ограниченного сферой S, и k-мерной плоскости M, удаленной от центра шара на расстояние $d < r$ (где r — радиус шара), представляет собой k-мерный шар радиуса $\sqrt{r^2 - d^2}$.

Две сферы S_1 и S_2, имеющие один и тот же центр O, называются *концентрическими*. Если две (различные) сферы S_1 и S_2 являются концентрическими или если расстояние между их центрами

O_1 и O_2 меньше разности $r_1 - r_2$ радиусов или больше суммы $r_1 + r_2$, то сферы S_1 и S_2 вовсе не имеют общих точек; в самом деле, если бы они имели общую точку A, то в треугольнике O_1O_2A сторона O_1O_2 была бы меньше разности двух других сторон или больше их суммы. Если сферы S_1 и S_2 не являются концентрическими и если расстояние O_1O_2 между их центрами равно сумме или разности радиусов сфер, то сферы имеют единственную общую точку, принадлежащую прямой O_1O_2; в этом случае сферы называются *касающимися*. Наконец, если расстояние между центрами сфер S_1 и S_2 больше разности их радиусов, но меньше суммы радиусов, то сферы имеют много общих точек. При этом если A — какая угодно из общих точек сфер S_1 и S_2 и P — ее проекция на прямую O_1O_2 (рис. 13), то $O_1P^2 - O_2P^2 = O_1A^2 - O_2A^2 = r_1^2 - r_2^2$, и это условие однозначно определяет точку P. Поэтому пересечение сфер S_1 и S_2 целиком принадлежит

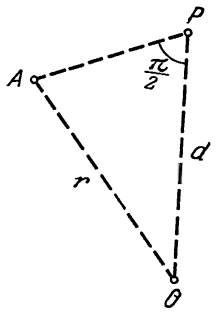


Рис. 12.

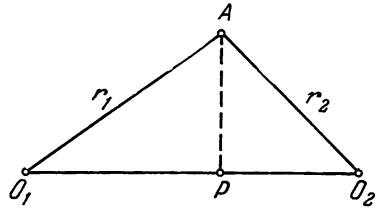


Рис. 13.

гиперплоскости N пространств E^n, перпендикулярной к прямой O_1O_2 в точке P. Далее, так как отрезки O_1P и $O_1A = r_1$ нам известны, от известно и расстояние $PA = \sqrt{O_1A^2 - O_1P^2}$, откуда вытекает, что пересечение сфер S_1 и S_2 представляет собой сферу гиперплоскости N (понимаемой как пространство E^{n-1}) с центром в точке P (и радиусом $\sqrt{r_1^2 - O_1P^2}$).

3.2. Степень точки относительно сферы. Инверсия. Почти вся теория окружностей плоскости, развитая в статье «Окружности» в кн. IV ЭЭМ, может быть перенесена на случай сфер n-мерного пространства E^n. В качестве примера мы наметим здесь пути перенесения на n-мерный случай понятий, связанных со *степенью точки относительно окружности* (см. стр. 454 и след. кн. IV ЭЭМ).

Пусть S — сфера с центром O и радиусом r и M — произвольная точка. Произвольная прямая l, проходящая через точку M, пересекает сферу S в точках A и B; скалярное произведение $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ мы назовем *степенью точки M относительно сферы S*. Для того чтобы доказать независимость произведения $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ от прямой l, обозначим через e единичный вектор этой прямой; в таком случае (векторное) уравнение прямой можно записать в виде

$$x = x_1 + et, \tag{45}$$

где вектор x_1 отвечает точке M. Сопоставив уравнение (45) прямой с

уравнением (43) сферы, мы находим квадратное относительно t уравнение

$$(x_1+et-x_0)^2-r^2=0, \tag{46}$$

корни t_1 и t_2 которого отвечают точкам пересечения прямой (45) со сферой (43). [Попутно—уравнение-то квадратное!—мы убеждаемся, что прямая пересекается со сферой не более чем в двух точках.] При этом

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=t_1e\cdot t_2e=t_1t_2\cdot e^2=t_1t_2,$$

так что интересующее нас произведение равно произведению корней уравнения (46). Но это уравнение можно переписать так:

$$t^2+2e(x_1-x_0)t+(x_1-x_0)^2-r^2=0$$

(напоминаем, что $e^2=1$), откуда следует, что произведение его корней равно

$$t_1t_2=(x_1-x_0)^2-r^2. \tag{47}$$

Независимость полученного выражения от вектора e и доказывает, что степень точки относительно сферы зависит лишь от этих точки и сферы, но не от выбора проходящей через точку прямой l.

Пусть теперь мы имеем две (неконцентрические) сферы S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2. Если точка x имеет равные степени относительно сфер S_1 и S_2, то $(x-x_1)^2-r_1^2=(x-x_2)^2-r_2^2$, или

$$2x(x_2-x_1)+(r_2^2-r_1^2)=0. \tag{48}$$

Но это есть уравнение гиперплоскости пространства E^n, перпендикулярной к прямой O_1O_2. Таким образом, множество точек, степени которых относительно сфер S_1 и S_2 равны, представляют собой гиперплоскость (48), перпендикулярную к линии центров сфер. Нетрудно убедиться, что если сферы S_1 и S_2 пересекаются, то гиперплоскость (48) содержит сферу (на единицу меньшего числа измерений), по которой пересекаются S_1 и S_2. Гиперплоскость (48) называется *радикальной гиперплоскостью* сфер S_1 и S_2.

Аналогично этому множество точек x, имеющих одинаковые степени относительно k сфер $S_1, S_2, \ldots, S_k$ с центрами $O_1(x_1), O_2(x_2), \ldots, O_k(x_k)$ и радиусами $r_1, r_2, \ldots, r_k$, описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}
&2x(x_2-x_1)+(r_2^2-r_1^2)=0,\\
&2x(x_3-x_1)+(r_3^2-r_1^2)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&2x(x_k-x_1)+(r_k^2-r_1^2)=0.
\end{aligned} \tag{49}$$

В общем случае эта система уравнений отвечает $(n-k+1)$-мерной плоскости (ср. выше уравнения (9)), перпендикулярной к $(k-1)$-мерной плоскости, задаваемой точками $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Эта плоскость называется *радикальной плоскостью* k сфер $S_1, S_2, \ldots, S_k$. В частности, при $k=n+1$ (0-мерная) плоскость (49) представляет собой точку. Эта точка называется *радикальным центром* $n+1$ сфер.

Множество сфер S, каждые k из которых (где k может иметь значение 2, 3, ..., или $n+1$) имеют одну и ту же ($(n-k+1)$-мерную) радикальную плоскость, называется $(k-1)$-*мерным пучком сфер*. [При этом от пучка сфер требуют, чтобы к нему нельзя было прибавить ни одной сферы с тем, чтобы по-прежнему выполнялось определяющее пучок условие.] n-мерный пучок сфер называется также *связкой*. Связку сфер можно также определить как множество сфер, относительно которых фиксированная точка O (*центр* связки) имеет фиксированную степень k (*степень* связки).

Пусть теперь заданы связка сфер с центром O и степенью $k\neq 0$ и некоторая точка A. Все сферы связки, проходящие через точку A, проходят

также еще через одну точку A', которая может и совпадать с точкой A; эта точка определяется тем, что векторы $\overrightarrow{OA}=x-x_0$ и $\overrightarrow{OA'}=x'-x_0$ коллинеарны (принадлежат одной прямой) и $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=(x-x_0)(x'-x_0)=k$. Говорят, что точка A' получается из точки A *инверсией* с центром O и степенью k.

Рассмотрим, наконец, произвольную сферу (44) (которая, в частности, при $A=0$ может обращаться в гиперплоскость). Инверсия с центром O и степенью k, которую можно записать так:

$$x'-x_0=k\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2} \quad \text{или} \quad x-x_0=k\frac{x'-x_0}{(x'-x_0)^2}, \tag{50}$$

переводит точки x сферы (44) в точки x', удовлетворяющие уравнению

$$A\left(x_0+k\frac{x'-x_0}{(x'-x_0)^2}\right)^2+2b\left(x_0+k\frac{x'-x_0}{(x'-x_0)^2}\right)+c=0,$$

которое можно также переписать в виде

$$Ax_0^2+2Ak\frac{x_0(x'-x_0)}{(x'-x_0)^2}+A\frac{k^2}{(x'-x_0)^2}+2bx_0+2k\frac{b(x'-x_0)}{(x'-x_0)^2}+c=0,$$

или

$$(Ax_0^2+2bx_0+c)(x'-x_0)^2+2k(Ax_0+b)(x'-x_0)+Ak^2=0. \tag{51}$$

Но последнее уравнение, очевидно, также имеет форму (44). Таким образом, *инверсия переводит каждую сферу пространства E^n снова в сферу.*

3.3. Объем шара и поверхность сферы. Определив объем n-мерных тел пространства E^n и $(n-1)$-мерную поверхность ограничивающих эти тела поверхностей аналогично тому, как это делается в трехмерном пространстве (ср. стр. 233 — 236 этой книги ЭЭМ), мы сможем вычислить объем $v_n(r)$ r-мерного шара радиуса r и поверхность $\Sigma_n(r)$ ограничивающей его сферы. При этом элементарные соображения размерности (см. стр.236 этой книги ЭЭМ) показывают, что

$$v_n(r)=C_nr^n \tag{52}$$

и

$$\Sigma_n(r)=c_nr^{n-1}. \tag{53}$$

Таким образом, задача заключается лишь в том, чтобы найти постоянные C_n и c_n.

Постоянные C_n были впервые определены К. Г. Якоби в работе, упомянутой на стр. 353. А именно, Якоби показал, что

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{2^{n/2}\pi^{n/2}}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-2)\,n} & \text{при } n \text{ четном,}\\[2ex] \dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)\,n} & \text{при } n \text{ нечетном.}\end{cases} \tag{54}$$

Далее, при любом n

$$c_n=nC_n. \tag{55}$$

Поэтому при $n=2$, 3, 4 и 5 имеем:

$$v_2(r)=\pi r^2, \quad v_3(r)=\frac{4}{3}\pi r^3, \quad v_4(r)=\frac{1}{2}\pi^2 r^4, \quad v_5(r)=\frac{8}{15}\pi^2 r^5$$

и

$$\Sigma_2(r)=2\pi r, \quad \Sigma_3(r)=4\pi r^2, \quad \Sigma_4(r)=2\pi^2 r^3, \quad \Sigma_5(r)=\frac{8}{3}\pi^2 r^4.$$

Проверить эти формулы можно при помощи элементарного интегрирования: нетрудно видеть (см. рис. 14), что

$$C_n=v_n(1)=\int_{-1}^{+1} v_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx, \tag{56}$$

и легко убедиться, что, действительно,

$$\int_{-1}^{+1} v_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx=C_{n-1}\int_{-1}^{+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1}dx=C_{n-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du=C_n \tag{57}$$

(ср., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, М., Физматгиз, 1963, стр. 393). Формула же (55) без труда получается из того, что объем n-мерного симплекса (см. ниже, стр. 382) равен $1/n$ произведения $(n-1)$-мерной площади его основания на высоту.

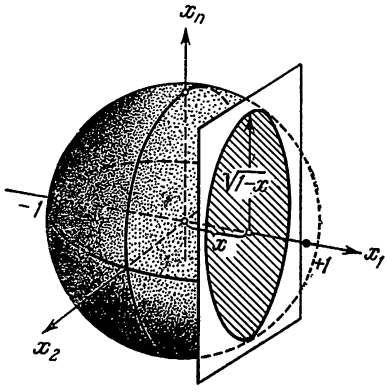


Рис. 14.

Из формул (52)—(55) вытекает ряд особенностей n-мерных шаров и сфер, резко отличающих эти геометрические фигуры от привычных нам трехмерного шара и двумерной сферы. Укажем здесь лишь один пример такого рода. Рассмотрим n-мерный шар радиуса 1 и отрежем от него тонкий «слой», ограниченный двумя параллельными гиперплоскостями, отстоящими от центра шара, скажем, на расстоянии 0,001. В трехмерном пространстве соответствующий слой будет иметь очень небольшой объем и поверхность ограничивающей его части сферы также будет очень малой. Если, однако, число n измерений пространства очень велико, то объем такого слоя может оказаться лишь незначительно отличающимся от полного объема шара; также и часть поверхности сферы, заключенная между нашими плоскостями, при большом n будет по величине почти совпадать с площадью всей поверхности. Читатель, знакомый с интегральным исчислением, без труда самостоятельно докажет эти утверждения.

§ 4. Многогранники

4.1. Параллелепипеды. Если в уравнении (5) параметры t_a будут пробегать не все действительные значения, а будут ограничены условиями $0\leqslant t_a\leqslant 1$, мы получим *k-мерный параллелепипед* (параллелограмм при $k=2$). В дальнейшем мы будем рассматривать

n-мерные параллелепипеды пространства E^n, состоящие из точек с радиусами-векторами

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i a_i, \quad 0 \leqslant t_i \leqslant 1. \tag{58}$$

Мы будем называть параллелепипед (58) построенным на векторах a_i.

Точки $A_0(x_0)$, $A_i(x_0 + a_i)$ (здесь i может принимать значения 1, 2, ..., n), $A_{ij}(x_0 + a_i + a_j)$, ..., $A_{12\ldots n}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ называются *вершинами* параллелепипеда (58). Придавая в уравнении (58) параметру t_j значения 0 или 1, а всем остальным параметрам t_i, где $i \neq j$, значения $0 \leqslant t_i \leqslant 1$, мы получим $(n-1)$-мерные параллелепипеды, называемые $(n-1)$-*мерными гранями* параллелепипеда (58). Грани этих параллелепипедов называются $(n-2)$-мерными гранями параллелепипеда (58). Таким образом, мы определим грани n-мерного параллелепипеда всех размерностей от 1 до $n-1$; 1-мерные грани называются *ребрами* параллелепипеда. Можно также считать вершины параллелепипеда его 0-мерными гранями. На рис. 116 на стр. 240 этой книги ЭЭМ схематически изображен 4-мерный параллелепипед.

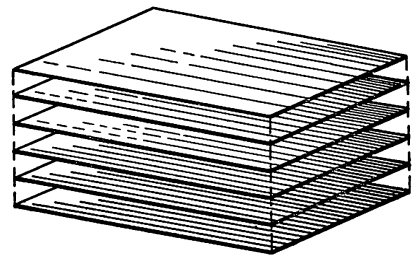


Рис. 15.

Подсчитаем число p-мерных граней n-мерного параллелепипеда; это число мы обозначим N_p^n. Очевидно, что, число N_0^n вершин равно 2^n, а число N_{n-1}^n $(n-1)$-мерных граней равно $2n$. Заметим, что, как легко следует из определения n-мерного параллелепипеда, такой параллелепипед образуется множеством $(n-1)$-мерных параллелепипедов, полученных из $(n-1)$-мерной грани

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i a_i, \qquad 0 \leqslant t_i \leqslant 1,$$

сдвигом ее на всевозможные векторы $t_n a_n$, где $0 \leqslant t_n \leqslant 1$ (сдвиг или параллельный перенос на вектор a есть преобразование пространства E^n, записываемое формулой $x' = x + a$; ср. стр. 54 кн. IV ЭЭМ). Отсюда следует, что число N_p^n p-мерных граней n-мерного параллелепипеда равно сумме удвоенного числа N_p^{n-1} p-мерных граней $(n-1)$-мерного параллелепипеда и числа N_{p-1}^{n-1} $(p-1)$-мерных граней того же параллелепипеда, каждая из которых при переносе определяет p-мерную грань, параллельную n-му ребру (ср. рис. 15, на котором изображено порождение 3-мерного парал-

лелепипеда параллелограммами, равными его 2-мерной грани). Итак, мы имеем:

$$N_p^n = 2N_p^{n-1} + N_{p-1}^{n-1}. \tag{59}$$

Формула (59) позволяет доказать, что

$$N_p^n = 2^{n-p} \cdot C_n^p, \tag{60}$$

где C_n^p — число сочетаний из n по p; так, например, 4-мерный параллелепипед имеет $N_3^4 = 8$ трехмерных граней (ср. рис. 25, *б* на стр. 391), $N_2^4 = 24$ двумерных граней, $N_1^4 = 32$ ребер и $N_0^4 = 16$ вершин. В самом деле, формула (60), очевидно, верна при $n = 2$, где $N_0^2 = 4$, $N_1^2 = 4$. Далее, если предположить справедливость формулы (60) для $(n-1)$-мерных параллелепипедов, т. е. предположить, что

$$N_{p-1}^{n-1} = 2^{n-p} \cdot C_{n-1}^{p-1}, \quad N_p^{n-1} = 2^{n-p-1} \cdot C_{n-1}^p,$$

то справедливость формулы (60) для n-мерного параллелепипеда будет вытекать из формулы (59) и известных свойств сочетаний:

$$N_p^n = 2N_p^{n-1} + N_{p-1}^{n-1} = 2^{n-p} C_{n-1}^p + 2^{n-p} C_{n-1}^{p-1} = 2^{n-p} C_n^p.$$

В статье «Площадь и объем» в этой книге ЭЭМ показывается, что объем параллелепипеда трехмерного пространства E^3, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, равен абсолютной величине тройного произведения $(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)$ (см. стр. 75). Приведенные там рассуждения без труда переносятся и на n-мерный случай; из них следует, что *объем v параллелепипеда* (58) *равен*

$$v = |(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_n)|, \tag{61}$$

где $(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_n)$ — n-кратное произведение векторов пространства E^n (см. стр. 378 кн. IV ЭЭМ).

4.2. Симплексы. Если в уравнении (5) параметры t_a пробегают значения, ограниченные условиями $0 \leqslant t_a \leqslant 1$, где, кроме того, $\sum\limits_a t_a \leqslant 1$, мы получим *$k$-мерный симплекс* (при $k = 2$ — треугольник, при $k = 3$ — тетраэдр). Название «симплекс» (от латинского simplex — «простой») указывает на то, что эта фигура является одной из простейших. В дальнейшем мы будем рассматривать n-мерные симплексы пространства E^n, состоящие из точек с радиусами-векторами

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i \boldsymbol{a}_i, \quad t_i \geqslant 0, \quad \sum_i t_i \leqslant 1. \tag{62}$$

Точки $A_0(\boldsymbol{x}_0)$ и $A_i(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a}_i)$ (где i может быть равно 1, 2, ... или n) называются *вершинами* симплекса (62). Если мы обозначим

$x_0 + a_i$ через x_i, то формулу (62) можно переписать так:

$$x = t_0 x_0 + t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n, \quad t_0, t_1, \ldots, t_n \geqslant 0,$$
$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1. \quad (63)$$

Придавая в уравнении (63) одному из параметров t_0, t_i значение 0, мы получим $(n-1)$-мерные симплексы, называемые $(n-1)$-*мерными гранями* симплекса (63). Грани этих симплексов называются $(n-2)$-мерными гранями симплекса (63) и т. д. Таким образом, мы определим грани n-мерного симплекса всех размерностей от 1 до $n-1$; можно также называть вершины симплекса его

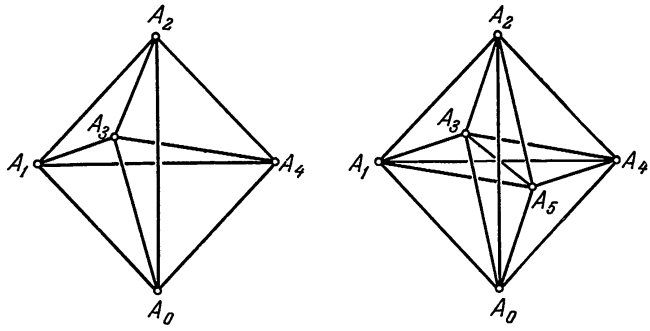


Рис. 16.

0-мерными гранями. 1-мерные грани симплекса называются его *ребрами*. На рис. 16 схематически изображены 4-мерный и 5-мерный симплексы.

Так как любая система из $p+1$ вершин n-мерного симплекса однозначно определяет его p-мерную грань, число N_p^n p-мерных граней n мерного симплекса равно числу сочетаний из $n+1$ по $p+1$:

$$N_p^n = C_{n+1}^{p+1}; \quad (64)$$

так, например, 4-мерный симплекс имеет $N_3^4 = 5$ трехмерных граней (ср. рис. 24,*б* на стр. 390), $N_2^4 = 10$ двумерных граней, $N_1^4 = 10$ ребер и $N_1^4 = 5$ вершин.

В статье «Площадь и объем» (см. стр. 75 этой книги ЭЭМ) показывается, что объем тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ пространства E^3 равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_0A_2}$, $\overline{A_0A_3}$. Аналогично этому можно доказать, что объем симплекса $A_0A_1 \ldots A_n$ пространства E^n равен $1/n!$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_0A_2}$, $\ldots$, $\overline{A_0A_n}$. Поэтому, в силу формулы (61), *объем* v *симплекса* (62) *равен*

$$v = \frac{1}{n!} |(a_1 a_2 \ldots a_n)|. \quad (65)$$

Эту формулу можно также переписать в виде

$$v=\frac{1}{n}\left|\frac{1}{(n-1)!}[a_1a_2\ldots a_{n-1}]\cdot a_n\right|$$

(см. стр. 380 кн. IV ЭЭМ), откуда следует, что *объем симплекса пространства* E^n *равен* $\frac{1}{n}$ *произведения объема* $(n-1)$*-мерной грани симплекса на расстояние от не принадлежащей этой грани вершины до гиперплоскости грани* (это расстояние можно назвать *высотой* симплекса).

4.3. Несколько свойств симплексов. Будем называть точку с радиусом-вектором

$$x=\frac{1}{n+1}(x_0+x_1+\ldots+x_n) \tag{66}$$

центром тяжести симплекса (63). Покажем, что *если соединить центр тяжести A симплекса с его вершиной* A_i, *то прямая* AA_i *пересечет грань* $A_0A_1\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n$ *в центре тяжести* A_i' *этой грани и точка A делит отрезок* A_iA_i' *в отношении* $n:1$. В самом деле, точки прямой A_iA определяются радиусами-векторами

$$x_i+(x-x_i)\,t=x_i+\left[\frac{1}{n+1}(x_0+x_1+\ldots+x_n)-x_i\right]t.$$

Точка A_i' этой прямой соответствует тому значению t, при котором коэффициент при x_i равен 0. Так как этот коэффициент равен

$$1+\left(\frac{1}{n+1}-1\right)t=1-\frac{n}{n+1}t,$$

то искомое значение t равно $\frac{n+1}{n}$. Поэтому радиус-вектор точки A_i' равен

$$x_i'=x_i+(x-x_i)\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}(x_0+x_1+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n),$$

откуда видно, что A_i'—центр тяжести грани $A_0A_1\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n$. Точка A делит отрезок A_iA_i' в отношении $n:1$, так как точки A_i, A и A_i' соответствуют значениям $t=0$, 1 и $\frac{n+1}{n}$.

Доказанная теорема обобщает известную теорему о медианах треугольника. Прямые A_iA_i' можно условно назвать *медианами* симплекса; тогда эта теорема примет привычную форму: *n медиан n-мерного симплекса пересекаются в одной точке*—центре тяжести симплекса—*и делятся в ней в отношении* $n:1$, *считая от вершин*. На рис 17 изображены медианы 3-мерного симплекса, пересекающиеся в его центре тяжести.

Рассмотрим теперь произвольную p-мерную грань симплекса; вершины, принадлежащие этой грани, пусть будут A_0, A_1, ... A_p. Остальные $n-p$ вершин A_{p+1}, ..., A_n симплекса определяют его $(n-p-1)$-мерную грань, которую назовем п р о т и в о л е ж а щ е й первой. Докажем, что *отрезок, соединяющий центры тяжести двух противолежащих граней симплекса, также проходит через центр тяжести симплекса и делится центром тя-*

жести в отношении $(p+1):(n-p)$, *считая от первой грани* (при $p=0$ эта теорема обращается в предыдущую). В самом деле, центр тяжести A' грани $A_0A_1\ldots A_p$ имеет радиус-вектор

$$x'=\frac{1}{p+1}(x_0+x_1+\ldots+x_p),$$

а центр тяжести A'' грани $A_{p+1}\ldots A_n$ — радиус-вектор

$$x''=\frac{1}{n-p}(x_{p+1}+\ldots+x_n).$$

Отрезок, соединяющий точки A' и A'', т. е. 1-мерный симплекс с вершинами A' и A'', определяется равенством $x=x'\cdot t'+x''\cdot t''$, t', $t''\geqslant 0$, $t'+t''=1$. При $t'=1$, $t''=0$ мы получаем точку A', при $t'=0$, $t''=1$ — точку A'', а при $t'=\frac{p+1}{n+1}$, $t''=\frac{n-p}{n+1}$, очевидно, — центр тяжести A симплекса, откуда и следует наше утверждение. На рис. 18 изображены центры тяжести ребер 3-мерного симплекса (т. е. середины ребер) и отрезки, соединяющие центры тяжести противолежащих ребер; эти отрезки пересекаются в центре тяжести тетраэдра и делятся в нем пополам.

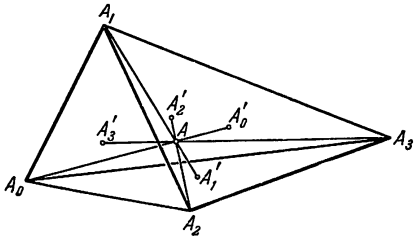


Рис. 17.

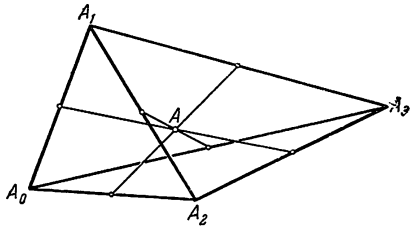


Рис. 18.

С известными изменениями могут быть перенесены на симплекс и другие теоремы о «замечательных точках треугольника». Известно, что все вершины треугольника принадлежат одной окружности — описанной окружности треугольника; отсюда по индукции устанавливается, что *все вершины n-мерного симплекса принадлежат одной сфере* — описанной сфере симплекса. В самом деле, пусть наше предложение уже установлено для $(n-1)$-мерной грани $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ симплекса $A_0A_1\ldots A_n$ и пусть O_n — центр описанной вокруг этой грани сферы. Восставим в точке O_n перпендикуляр p к гиперплоскости $A_0A_1\ldots A_{n-1}$; ясно, что все точки этого перпендикуляра равноудалены от точек A_0, A_1, ..., A_{n-1}. Перпендикуляр p наверное пересечет гиперплоскость M, перпендикулярную ребру A_0A_n симплекса и проходящую через середину этого ребра; так как все точки этой гиперплоскости равноудалены от вершин A_0 и A_n симплекса, то точка O пересечения p и M равноудалена от всех вершин симплекса, т. е. является центром описанной вокруг симплекса сферы.

В центре O описанной сферы S n-мерного симплекса пересекаются перпендикуляры, восставленные к гиперплоскостям всех $(n-1)$*-мерных граней симплекса в центрах описанных вокруг граней сфер;* так, например, 4 перпендикуляра, восставленных к граням тетраэдра в центрах описанных вокруг граней окружностей, пересекаются в одной точке — центре описанной сферы тетраэдра (см. рис 19, *а*). Также *все* $(n-p)$*-мерные плоскости, проведенные через центры сфер, описанных вокруг p-мерных граней симплекса, перпендикулярно к плоскостям этих граней, проходят через центр описанной сферы*

симплекса; так, например, 6 плоскостей, проведенных через середины ребер тетраэдра перпендикулярно к этим ребрам, пересекаются в одной точке — центре описанной сферы тетраэдра (см. рис. 19, *б*).

Аналогично этому можно обобщить на симплекс теорему о точке пересечения биссектрис треугольника. А именно, нетрудно убедиться в существовании «вписанной сферы» n-мерного симплекса $A_0A_1\ldots A_n$, касающейся всех его граней. Назовем *p-биссектрисой* симплекса множество точек, равноудаленных от p фиксированных граней симплекса (это множество представляет собой $(n-p+1)$-мерную плоскость, проходящую через $(n-p)$-мерную грань, общую рассматриваемым p граням, и образующую с этими p гранями одни и те же углы [1]), то можно утверждать, что C_n^p *p-мерных биссектрис симплекса* (где p может быть равно 1, 2, ... или $p-1$) *пересекаются в одной точке — центре вписанной сферы симплекса.* Однако это предложение нуждается в некоторых уточнениях, делающих тему о вписанной сфере (точнее о вписанных сферах!) симплекса достаточно интересной.

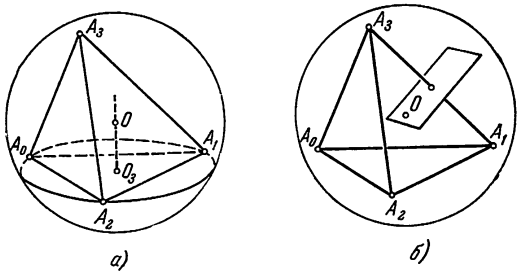


Рис. 19.

Дело в том, что, говоря о вписанной сфере симплекса, мы все время имели в виду сферу, заключающуюся целиком в н у т р и симплекса, т. е. такую, центр которой лежит от каждой грани симплекса по ту же сторону, что и не принадлежащая этой грани вершина (это означает, что если уравнение гиперплоскости грани имеет вид (8), то выражения $\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}_i+v$ и $\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}_Q+v$, где $\boldsymbol{x}_i$ — радиус-вектор не принадлежащей рассматриваемой грани вершины A_i симплекса, а $\boldsymbol{x}_Q$ — радиус-вектор центра Q вписанной сферы, имеют один знак). При этом все сказанное выше оказывается верным, с тем лишь уточнением, что p-биссектрисой симплекса теперь приходится считать не $(n-p+1)$-мерную плоскость, как ранее, а $(n-p+1)$-мерную полуплоскость, ограниченную $(n-p)$-мерной гранью симплекса. Если же не требовать того, чтобы «вписанная» сфера лежала внутри симплекса, то роль p-биссектрисы симплекса будет играть объединение 2^p $(n-p+1)$-мерных плоскостей; при этом C_n^p p-биссектрис будут, вообще говоря, пересекаться в 2^n точках, равноудаленных от всех граней симплекса и являющихся центрами сфер, касающихся всех его граней, — так, например, существуют четыре окружности, касающиеся всех сторон треугольника (рис. 20), и до восьми сфер, касающихся всех граней тетраэдра: одна вписанная сфера, четыре (или меньше) вневписанных сфер (см. рис. 21, *а*) и три (или меньше) сфер, вписанных в об-

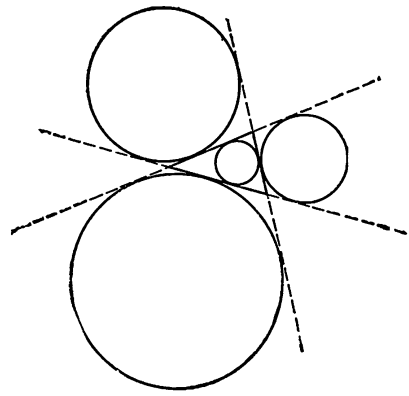


Рис. 20.

[1]) Нетрудно видеть, что из k углов k-мерной плоскости и гиперплоскости (см. выше, п 2.5) $k-1$ углов наверное равны нулю, так что здесь имеется, по существу, о д и н угол (вполне определяемый углом, образуемым этой k-мерной плоскостью с прямой, перпендикулярной к гиперплоскости).

разованную гранями тетраэдра «крышу», подобную той, которая изображена на рис. 21, *б*. Однако в частных случаях число сфер, касающихся всех граней n-мерного симплекса, может оказаться и меньшим 2^n, и выяснение условий, гарантирующих то или иное число «вписанных сфер» (точнее, «вписанных и вневписанных сфер») симплекса представляет собой содержательную задачу.

Наконец, *высотой* n-мерного симплекса, опущенной из вершины A_i на грань $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$, естественно назвать прямую, проходящую через точку A_i и перпендикулярную к гиперплоскости $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ (ср. выше стр. 382). n-мерный симплекс, все n высот которого пересекаются

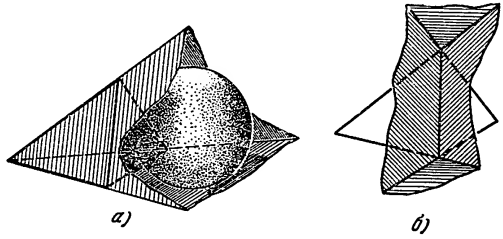


Рис. 21.

в одной точке, называется *ортоцентрическим*, а точка пересечения высот — *ортоцентром*. Если принять ортоцентр симплекса за начало отсчета векторов, то для радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, ..., $\boldsymbol{r}_n$ вершин A_0, A_1, ..., A_n симплекса будем иметь:

$$\boldsymbol{r}_i \perp \text{гиперплоскости } A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n,$$

откуда вытекает, что

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) = 0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_k,$$

где $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ и все различны.

Из последнего равенства следует, что

$$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_l,$$

где $i, j, k, l = 0, 1, \dots, n$ и все различны, откуда в свою очередь следует, что

$$(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\cdot(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_l) = 0 \tag{67}$$

(ибо $\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_l = \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_l$).

Таким образом, мы видим, что *если высоты симплекса пересекаются в одной точке, то любые два ребра, не выходящих из одной вершины, перпендикулярны*; отсюда вытекает также, что *любые две грани ортоцентрического симплекса, не имеющие общих вершин, (вполне) перпендикулярны.* Нетрудно убедиться, что и обратно, *если любые два ребра симплекса, не выходящих из одной вершины, перпендикулярны, то симплекс — ортоцентрический.* В самом деле, уравнения высот симплекса, проведенных через вершины A_i и A_j, имеют вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i + \lambda\boldsymbol{n}_i \quad \text{и} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_j + \mu\boldsymbol{n}_j, \tag{68}$$

где $\boldsymbol{n}_i \perp (A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n)$ и $\boldsymbol{n}_j \perp (A_0A_1 \dots A_{j-1}A_{j+1} \dots A_n)$; поэтому $\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_j \perp (A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_{j-1}A_{j+1} \dots A_n)$ (где мы считаем $i < j$). Для того чтобы высоты (68) пересекались, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых значениях λ и μ

$$\boldsymbol{r}_i + \lambda\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{r}_j + \mu\boldsymbol{n}_j. \tag{69}$$

Если равенство (69) имеет место, то вектор $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j = \mu \boldsymbol{n}_j - \lambda \boldsymbol{n}_i$ лежит в (двумерной) плоскости, (вполне) ортогональной ($(n-2)$-мерной) плоскости $A_0A_1 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_{j-1}A_{j+1} \ldots A_n$, откуда вытекает равенство (67). С другой стороны, если ребро A_iA_j, перпендикулярно ко всем ребрам грани, не содержащей вершин A_i и A_j, то вектор $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ лежит в двумерной плоскости, перпендикулярной к плоскости $A_0A_1 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_{j-1}A_{j+1} \ldots A_n$; поэтому он выражается через линейно независимые векторы $\boldsymbol{n}_i$ и $\boldsymbol{n}_j$ этой плоскости, т. е. $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j = \alpha \boldsymbol{n}_i + \beta \boldsymbol{n}_j$, и, значит, условие (69) при некоторых $\lambda\,(=-\alpha)$ и $\mu\,(=\beta)$ наверное имеет место. Из доказанного следует также, что *каждая грань* (любого числа измерений, большего 1) *ортоцентрического симплекса сама является ортоцентрическим симплексом.*

Ортоцентрические симплексы обладают многими замечательными свойствами, своеобразно обобщающими свойства треугольника плоскости [1]).

4.4. Многогранники и теорема Эйлера. Будем называть *многогранником* пространства E^4 фигуру, состоящую из конечного числа многогранников в гиперплоскостях этого пространства (эти многогранники называются *гранями* многогранника пространства E^4), расположенных так, что:

1) любая грань каждого из этих многогранников является гранью еще одного и только одного многогранника (называемого *смежным* с первым);

2) для любых двух граней α и β можно указать такую цепочку граней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что грань α смежна с α_1, грань α_1 смежна с $\alpha_2, \ldots$, грань α_k смежна с β;

3) если грани α и β имеют общую вершину A, то выбор граней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, о которых говорится в предыдущем пункте, можно осуществить так, чтобы все они имели ту же вершину A.

Определив таким образом многогранники пространства E^4, мы далее определим тем же путем многогранники пространства E^5, и, повторяя это определение несколько раз, определим многогранники в любом пространстве E^n.

Вершины и k-мерные грани граней многогранника называются соответственно *вершинами* и *k-мерными гранями* многогранника.

Будем называть многогранник пространства E^n *выпуклым*, если все его вершины, не принадлежащие произвольной его грани, расположены по одну сторону от гиперплоскости этой грани. Точнее, выпуклый многогранник характеризуется тем, что если уравнение гиперплоскости какой-либо его грани имеет вид (8), то для радиусов-векторов $\boldsymbol{x}_\alpha$ всех вершин M_α многогранника, не принадлежащих этой гиперплоскости, число $\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}_\alpha + v$ имеет один и тот же знак.

В п. **1.3** статьи «Многоугольники и многогранники», помещенной в кн. IV ЭЭМ, была доказана теорема Эйлера для выпуклых

---

[1]) См., например, статью: Г. П. Крейцер и Г. И. Тюрин, Сферы Эйлера ортоцентрического симплекса, Сборник «Математическое просвещение», вып. 2, 1957, стр. 187—194.

многогранников пространства E^3. Совершенно аналогично в пространстве E^n доказывается следующая более общая теорема, называемая теоремой Эйлера для выпуклых многогранников пространства E^n: *если число вершин выпуклого n-мерного многогранника равно N_0^n, а число p-мерных граней — N_p^n, то*

$$1-N_0^n+N_1^n-N_2^n+\ldots+(-1)^{p-1}N_p^n+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-2}N_{n-1}^n+(-1)^{n-1}=0. \quad (70)$$

Заметим, что формула (70) очевидным образом выполняется при $n=1$ (у отрезка два конца, т. е. $N_0^1=2$, и формула (70) здесь принимает вид $1-2+1=0$), при $n=2$ (у k-угольника k вершин и k ребер, т. е. $N_0^2=N_1^2=k$; формула (70) здесь принимает вид $1-k+k-1=0$) и при $n=3$, когда N_0^3, N_1^3, N_2^3 обозначаются через B, P, Γ и формула (70) принимает вид $B-P+\Gamma=2$ (ср. стр. 390 кн. IV ЭЭМ).

Нетрудно проверить выполнение формулы (70) для параллелепипедов и симплексов: в первом случае, в силу формулы (60) (стр. 380), левая часть формулы (70) равна

$$1-2^n+2^{n-1}n-2^{n-2}C_n^2+\ldots+(-1)^{p-1}2^{n-p}C_n^p+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-2}2n+(-1)^{n-1}=1-(2-1)^n=1-1=0;$$

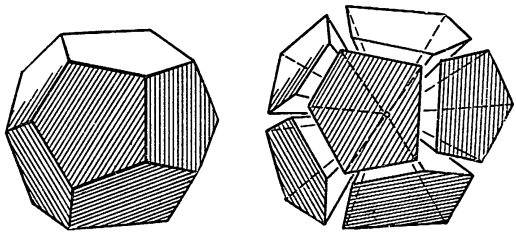
во втором случае, в силу формулы (64) (стр. 381), левая часть формулы (70) равна

$$1-(n+1)+C_{n+1}^2-C_{n+1}^3+\ldots+(-1)^{p-1}C_{n+1}^{p+1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-2}(n+1)+(-1)^{n+1}=(1-1)^{n+1}=0.$$

4.5. Правильные многогранники. Правильные многогранники пространства E^n мы определим по индукции: предположим, что правильные многогранники пространства E^{n-1} уже определены (в пространстве E^3 эти многогранники были определены в кн. IV ЭЭМ, см. стр. 424—429). Будем называть *правильным многогранником* пространства E^n выпуклый многогранник этого пространства, все $(n-1)$-мерные грани которого — равные правильные многогранники пространства E^{n-1}, и середины ребер, примыкающих к каждой его вершине, являются вершинами равных между собой правильных многогранников пространства E^{n-1}, называемых *вершинными фигурами*. Нетрудно проверить, что *вершинные фигуры граней правильного многогранника являются гранями его вершинных фигур*.

Следуя Л. Шлефли, будем обозначать правильные p-угольники символами $\{p\}$; правильные многогранники пространства E^3, грани которых являются правильными p-угольниками, а вершинные фигуры — правильными q-угольниками, — символами $\{p, q\}$; правильные многогранники пространства E^4, грани которых являются правильными многогранниками $\{p, q\}$, а вершинные фигуры — правильными многогранниками $\{q, r\}$, — символами $\{p, q, r\}$, ...; правильные многогранники пространства E^n, грани которых являются правильными многогранниками $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}\}$, а вершинные фигуры — правильными многогранниками $\{p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}\}$, — символами $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$.

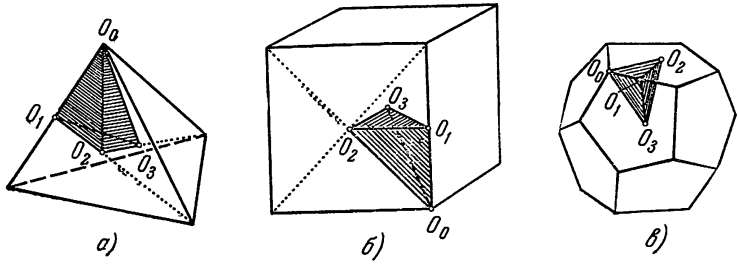
Все вершины правильного многогранника пространства E^n принадлежат одной сфере этого пространства. В самом деле, рассмотрим две смежные грани правильного многогранника. Эти грани расположены в двух пересекающихся гиперплоскостях. Рассмотрим *биссектральную гиперплоскость* этих гиперплоскостей, т. е. гиперплоскость, проходящую через $(n-2)$-мерную плоскость пересечения этих плоскостей и образующую с этими гиперплоскостями равные углы [1]). Если мы построим биссектральные гиперплоскости для данной грани и всех смежных с ней граней, мы получим n-мерный многогранник, являющийся обобщением правильной пирамиды пространства E^3. Если мы построим такую же пирамиду на одной из смежных граней, то мы получим две равные пирамиды, примыкающие друг к другу по боковой грани. Поэтому эти пирамиды имеют общую вершину, лежащую против граней исходного многогранника. Строя аналогичные пирамиды на всех гранях правильного многогранника, мы получим, что все эти пирамиды имеют общую вершину. Поэтому эта общая вершина пирамид равноудалена от всех вершин многогранника и является центром сферы, на которой лежат эти вершины (ср. рис. 22, где соответствующее построение выполнено для правильного многогранника пространства E^3). Будем называть центр этой сферы *центром многогранника.*



а) б)

Рис. 22.

С каждым правильным многогранником пространства E^n можно связать симплекс, вершинами которого являются центр O_n многогранника и центры



а) б) в)

Рис. 23.

O_p вложенных друг в друга p-мерных граней многогранника, где $p=n-1$, $n-2, \ldots,$ вплоть до вершины O_0 многогранника. Этот симплекс $O_0O_1 \ldots O_n$ называется *характеристическим симплексом* многогранника. Угол $O_0O_2O_1$ находится в 2-мерной грани многогранника и, являясь углом между прямыми, соединяющими центр O_2 этой грани с ее вершиной O_0 и с серединой ее ребра, равен π/p_0; угол $O_1O_3O_2$ находится в 2-мерной грани вершинной фигуры многогранника и, являясь углом между прямыми, соединяющими центр O_3 этой грани с ее вершиной O_1 и с серединой ее ребра, равен π/p_2. Точно так же показывается, что каждый угол $O_{k-1}O_{k+1}O_k$, где $k=1, 2, \ldots, n-1$, равен π/p_k, а все остальные углы 2-мерных граней симплекса $O_0O_1 \ldots O_n$—прямые. Поэтому отличны от $\pi/2$ только углы между гранями

[1]) Ср. выше, стр. 367—373.

$O_0O_1 \dots O_{k-1}O_{k+1} \dots O_n$ и $O_0O_1 \dots O_{k-2}O_k \dots O_n$ этого симплекса при $k=1, 2, \dots, n-1$. На рис. 23 изображены тетраэдры $O_0O_1O_2O_3$, отвечающие трем правильным многогранникам трехмерного пространства E^3.

Если мы обозначим единичный вектор, перпендикулярный к грани $O_0O_1 \dots O_{i-1}O_{i+1} \dots O_n$ характеристического симплекса, через e_i, то $|e_i|=1$ и

$$e_0e_1=\cos\frac{\pi}{p_1},\quad e_1e_2=\cos\frac{\pi}{p_2},\quad \dots,\quad e_{n-2}e_{n-1}=\cos\frac{\pi}{p_{n-1}}.$$

Так как эти векторы линейно независимы, то их n-кратное произведение (см. стр. 378 кн. IV ЭЭМ) отлично от нуля и [1])

$$(e_0e_1 \dots e_{n-1})^2=\begin{vmatrix} e_0e_0 & e_0e_1 & \dots & e_0e_{n-1} \\ e_1e_0 & e_1e_1 & \dots & e_1e_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n-1}e_0 & e_{n-1}e_1 & \dots & e_{n-1}e_{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p_1} & 1 & \cos\frac{\pi}{p_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{p_2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \cos\frac{\pi}{p_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cos\frac{\pi}{p_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}>0. \qquad (71)$$

При $n=2$ неравенство (71) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 \end{vmatrix}=\sin^2\frac{\pi}{p}>0 \qquad (72)$$

и выполняется при всех целых числах $p\geqslant 3$, что соответствует существованию правильных p-угольников при любом $p\geqslant 3$. При $n=3$, $p_1=p$, $p_2=q$

---

[1]) Здесь используется формула

$$(a_1a_2 \dots a_n)\cdot(b_1b_2 \dots b_n)=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix},$$

которая является непосредственным следствием правила умножения определителей n-го порядка (ср. стр. 359 кн. IV ЭЭМ).

неравенство (71) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 & \cos\frac{\pi}{q} \\ 0 & \cos\frac{\pi}{q} & 1 \end{vmatrix} > 0, \text{ т. е. } \cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}<1, \tag{73}$$

и выполняется только в 5 случаях, соответствующих правильным многогранникам: $\{3, 3\}$ (правильный тетраэдр), $\{3, 4\}$ (правильный октаэдр), $\{4, 3\}$ (куб), $\{3, 5\}$ (правильный икосаэдр) и $\{5, 3\}$ (правильный додекаэдр).

При $n=4$, $p_1=p$, $p_2=q$, $p_3=r$ неравенство (71) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} & 0 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 & \cos\frac{\pi}{q} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{q} & 1 & \cos\frac{\pi}{r} \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{r} & 1 \end{vmatrix} > 0, \text{ т. е. } \sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}>\cos\frac{\pi}{q}, \tag{74}$$

и выполняется только в 6 случаях, соответствующих правильным многогранникам: $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$ и $\{5, 3, 3\}$.

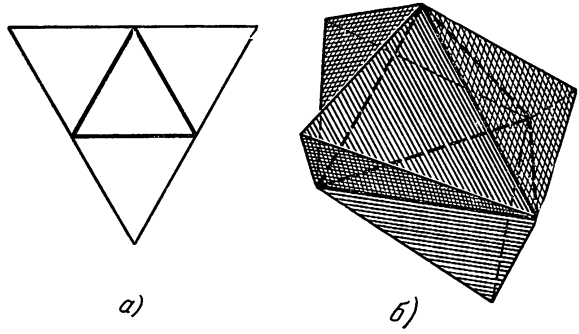


Рис. 24.

При $n>4$ неравенство (71) выполняется только в 3 случаях, соответствующих правильным многогранникам: $\{3,3, 3, \ldots,3,3\}$, $\{3, 3, 3, \ldots 3, 4\}$ и, наконец, $\{4, 3,3, \ldots, 3, 3\}$.

Многогранник, имеющий вид $\{3, 3, 3, \ldots, 3, 3\}$, представляет собой *правильный n-мерный симплекс*. В случае, когда базисные векторы e_i пространства E^n единичны и взаимно перпендикулярны, такой симплекс можно построить следующим образом: если в гиперплоскости $x_n=-1$ построен правильный $(n-1)$-мерный симплекс $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$, то так как центр O n-мерного симплекса делит отрезок прямой OA_n между вершиной A_n и гранью $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ в отношении $n:1$, то вершина A_n имеет радиус-вектор ne_n. Вершина A_{n-1} симплекса $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ может быть построена таким же образом по симплексу $A_0A_1 \ldots A_{n-2}$ и т. д. Все грани и все вершинные фигуры n-мерного симплекса являются правильными $(n-1)$-мерными симплексами. На рис. 24, *а* и *б* изображены «развертки» трехмерного и четырехмерного правильных симплексов.

Многогранник $\{4, 3, 3, \ldots, 3, 3\}$ представляет собой *правильный n-мерный параллелепипед*, называемый также *n-мерным кубом*. В случае, когда базисные векторы e_i пространства E^n единичны и взаимно перпендикуляр-

ны, таким параллелепипедом является параллелепипед, построенный на векторах e_i. Все грани n-мерного куба представляют собой $(n-1)$-мерные кубы, все его вершинные фигуры — правильные $(n-1)$-мерные симплексы. На рис. 25 *а* и *б* изображены «развертки» трехмерного и четырехмерного кубов.

Многогранник $\{3, 3, 3, \ldots, 3, 4\}$ называется *n-мерным крестом*. В случае, когда базисные векторы e_i пространства E^n единичны и взаимно перпендикулярны, за вершины такого многогранника можно принять точки с радиусами-векторами $\pm e_i$ (при $n=2$ такие векторы образуют крест, чем и объясняется название этого многогранника). При $n=3$ этот многогранник является правильным октаэдром. Все грани n-мерного креста — правильные $(n-1)$-мерные симплексы, все вершинные фигуры являются $(n-1)$-мерными

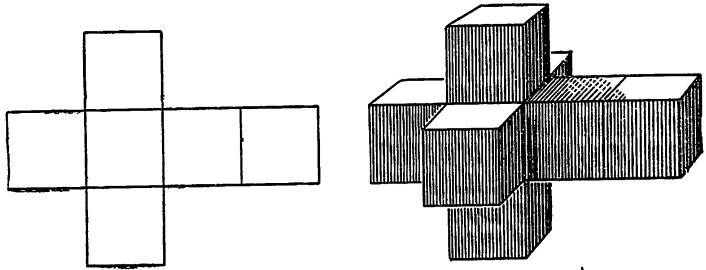


Рис. 25.

крестами. Центры граней правильного n-мерного симплекса являются вершинами другого правильного симплекса, центры граней n-мерного куба являются вершинами n-мерного креста, и наоборот.

Многогранник $\{3, 4, 3\}$ пространства E^4 в случае, когда базисные векторы e_i единичны и взаимно перпендикулярны, может быть построен как многогранник, вершины которого имеют радиусы-векторы $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4$ и $2e_i$. Все грани этого многогранника — правильные октаэдры, все вершинные фигуры — n-мерные кубы. Этот многогранник имеет 24 вершины и 24 грани. Центры его граней являются вершинами такого же многогранника.

Многогранник $\{3, 3, 5\}$ пространства E^4 имеет 120 вершин и 600 граней, все его грани — правильные тетраэдры, все вершинные фигуры — правильные додекаэдры. Многогранник $\{5, 3, 3\}$ пространства E^4 имеет 600 вершин и 120 граней, все его грани — правильные икосаэдры, все вершинные фигуры — правильные тетраэдры. Построение этих двух многогранников слишком сложно, чтобы его можно было описать в этой статье. Центры граней первого из этих многогранников являются вершинами второго, и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, М., Гостехиздат, 1956.
Учебник для студентов университетов и педагогических институтов, содержащий начала теории многомерных пространств разного типа.
[2] А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
[3] И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М., Гостехиздат, 1951.
Учебники линейной алгебры, имеющие весьма много точек соприкосновения с содержанием настоящей статьи.
[4] П. А. Широков, Тензорное исчисление, Казань, Изд-во КГУ, 1961.
Последняя глава этой книги содержит большой материал, относящийся к геометрии n-мерного евклидова пространства.

[5] H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, New York, 1961 (готовится к печати русский перевод).

Последняя глава этого обширного учебника геометрии посвящена геометрии 4-мерного пространства и содержит большой материал, включающий учение о правильных многогранниках в этом пространстве.

[6] В. И. Стрингхем, Правильные фигуры в n-мерном пространстве, журнал «Успехи математических наук», вып. 10, 1944, стр. 22—33.

Подробное исследование правильных многогранников n-мерного евклидова пространства.

[7] H. P. Manning, Geometry of four dimensions, New York, 1955

Обстоятельное сочинение, с большой подробностью трактующее вопросы геометрии 4-мерного евклидова пространства. Изложение весьма элементарно.

[8] R. W. Weitzenböck, Der vierdimensionale Raum, Basel—Stuttgart, 1956.

Обширный обзор, затрагивающий самые разные вопросы, относящиеся к четырехмерному пространству (в том числе, например, вопрос об отражении соответствующей тематики в художественной литературе). Изложение живое и интересное; чисто геометрические вопросы изложены доступно, но достаточно строго.

[9] D. M. Y. Sommerville, An introduction to the geometry of N dimensions, New York, 1958.

Учебник n-мерной геометрии, рассчитанный на студентов математических факультетов.

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Возникновение неевклидовой геометрии Лобачевского 394
1.1. Попытки доказать аксиому параллельности евклидовой геометрии 394
1.2. Исследования Лежандра 397
1.3. Неевклидова геометрия Лобачевского и абсолютная геометрия 402
§ 2. Неевклидова геометрия Римана 404
2.1. Сферическая геометрия и неевклидова геометрия Римана . . . 404
2.2. Основные понятия неевклидовой геометрии Римана. Принцип двойственности 409
2.3. Примеры теорем неевклидовой геометрии Римана. Площадь треугольника и многоугольника 412
2.4. Трехмерная неевклидова геометрия Римана 417
§ 3. Псевдоевклидова геометрия 420
3.1. Псевдоевклидова плоскость 420
3.2. Псевдоевклидовы движения. Примеры теорем псевдоевклидовой геометрии 424
3.3. Псевдоевклидово пространство 427
3.4. Геометрические основы специальной теории относительности 433
§ 4. Неевклидова геометрия Лобачевского 439
4.1. Связь псевдоевклидовой геометрии с планиметрией Лобачевского 439
4.2. Примеры теорем геометрии Лобачевского 441
4.3. Движения и циклы 447
4.4. Трехмерная геометрия Лобачевского 450
§ 5. Неевклидова геометрия Галилея 452
5.1. Геометрия Галилея на плоскости 452
5.2. Примеры теорем геометрии Галилея 456
§ 6. Неевклидовы геометрии и группы преобразований 458
6.1. Проективные модели геометрий Лобачевского и Римана . . . 458
6.2. «Общие» геометрии Кэли—Клейна 460
6.3. Модели Пуанкаре плоских неевклидовых геометрий 460
§ 7. Некоторые другие геометрические системы 464
7.1. Геометрия Минковского—Банаха 464
7.2. Число π в геометрии Минковского—Банаха 469
7.3. Внутренняя геометрия поверхности и общая геометрия Римана 470
7.4. О геометрии реального мира 473
Литература 474

§ 1. Возникновение неевклидовой геометрии Лобачевского

1.1. Попытки доказать аксиому параллельности евклидовой геометрии. Геометрию, изучаемую в средней школе, называют часто евклидовой геометрией, по имени знаменитого древнегреческого математика Евклида, написавшего один из первых курсов элементарной геометрии. По этому курсу (в русском переводе «Начала») изучали геометрию многие поколения людей в течение двух тысячелетий (см. статью «Аксиомы и основные понятия геометрии» в IV книге ЭЭМ). Евклид стремился к строго дедуктивному построению геометрической науки, т. е. к построению, при котором в основу кладется небольшое число недоказываемых предложений — аксиом, связывающих основные геометрические объекты («точка», «прямая» и т. д.) и отношения (например, «точка принадлежит прямой»). Несмотря на то, что замысел этот не был в полной мере осуществлен Евклидом, его «Начала» сыграли выдающуюся роль в истории науки — это был первый развернутый пример дедуктивного изложения научной теории, послуживший прообразом всех дальнейших построений подобного рода.

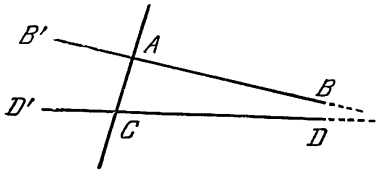


Рис. 1.

Евклид в своих «Началах» не дал полного списка аксиом геометрии и даже не перечислил всех основных, не определяемых ее понятий (косвенное определение этих понятий доставляет список аксиом, описывающий свойства рассматриваемых геометрических объектов и отношений между ними). Однако у Евклида были указаны некоторые аксиомы геометрии, послужившие основой для дальнейшей творческой работы в этом направлении.

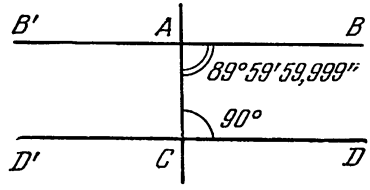


Рис. 2.

Среди аксиом (или постулатов) Евклида особое место занимал так называемый V постулат: «*Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых* (углы *BAC* и *DCA* на рис. 1), *то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых*». Этот постулат трудно назвать очевидным — он является достаточно сложным как по форме, так и по существу, поскольку речь в нем идет о свойствах бесконечных прямых, по поводу которых наша интуиция ничего не может подсказать (как знать, пересекутся ли справа от прямой *AC* изображенные на рис. 2 прямые *AB* и *CD*?). Необходи-

мость этого постулата для построения геометрии не представляется бесспорной: сам Евклид доказывает целый ряд теорем, не опираясь на V постулат, и совершенно неясно, почему в этот ряд не могут быть включены все без исключения теоремы евклидовой геометрии.

Особая роль V постулата, его бо́льшая сложность и меньшая наглядность (по сравнению с другими аксиомами) привели к тому, что математики позднейших веков стали пытаться доказать этот постулат как теорему. Некоторые из них старались вывести этот постулат из остальных аксиом Евклида, не добавляя к ним новых утверждений; другие же открыто заменяли V постулат иной аксиомой, которую они считали более простой и наглядной. Разумеется, новая аксиома содержала утверждение, равносильное V постулату. Но и анализ тех доказательств, в которых V постулат не заменялся другой аксиомой открыто, показывает, что здесь также использовались утверждения, равносильные V постулату, однако это делалось неявно, незаметно для автора доказательства.

Приведем несколько примеров аксиом, содержащих утверждения, равносильные V постулату. Римский математик I века до н. э. Посидоний, византийский или армянский математик V—VI веков Аганис, багдадский математик IX века Сабит ибн Корра и каирский математик X—XI веков Хасан ибн ал-Хайсам доказывали V постулат на основании утверждения: «геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от прямой и находящихся по одну сторону от нее, есть прямая». Греческий математик V века Прокл Диадох доказывал V постулат, опираясь на следующее допущение: «расстояние между двумя перпендикулярами к одной прямой ограничено». Греческий математик VI века Симпликий, багдадский математик IX века Аббас ал-Джаухари, среднеазиатский математик XIII века Шамс ад-Дин ас-Самарканди и французский математик XVIII—XIX веков Адриан Мари Лежандр доказывали V постулат при помощи допущения: «через точку внутри угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны». Среднеазиатский математик XI века Омар Хайям (известный также как поэт) заменял V постулат аксиомой: «две приближающиеся прямые обязательно пересекутся». Английский математик XVII века Джон Валлис заменял V постулат аксиомой: «для всякой фигуры можно построить подобную ей фигуру любых размеров». Французский математик XVIII века Алексис-Клод Клеро строил теорию параллельных линий на основании допущения: «существует хотя бы один прямоугольник». Английский педагог XVIII века Джон Плейфер заменял V постулат аксиомой: «через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данной». Венгерский математик XVIII—XIX веков Фаркаш Бойяи доказывал V

постулат при помощи допущения: «через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность».

Так, например, ясно, что если V постулат имеет место, то через точку A, взятую вне прямой DD', можно провести в плоскости ADD' единственную прямую BB', не пересекающую прямой DD'. Действительно, для такой прямой должны быть выполнены соотношения: $\angle BAC + \angle DCA \geqslant 180°$ (где C—произвольно выбранная точка прямой DD') и $\angle B'AC + \angle D'CA \geqslant 180°$ (рис. 3), т. е. $\angle BAC + \angle DCA = 180°$ (и $\angle B'AC + \angle D'CA = 180°$). С другой стороны, если имеет место аксиома Плейфера, т. е. если через точку A, взятую вне прямой DD', в плоскости ADD' проходит единственная прямая BB', не пересекающая DD', то эта прямая, как нетрудно убедиться, будет определяться условием $\angle BAC + \angle DCA = 180°$ [1]); все же остальные прямые будут пересекать прямую DD', причем именно так, как это указывается в V постулате. Таким образом, V постулат в самом деле эквивалентен аксиоме Плейфера [2]). Ввиду того, что аксиома Плейфера эквивалентна V постулату, но формулируется несколько проще, в современных изложениях элементарной геометрии вместо V постулата используют аксиому параллельности (в форме, предложенной Плейфером). Использована она и в гильбертовой аксиоматике евклидовой геометрии (см. стр. 40 упомянутой статьи об аксиоматическом построении геометрии в IV книге ЭЭМ). Вопрос о доказуемости или недоказуемости V постулата полностью совпадает с вопросом о доказуемости или недоказуемости аксиомы параллельности (аксиомы Плейфера).

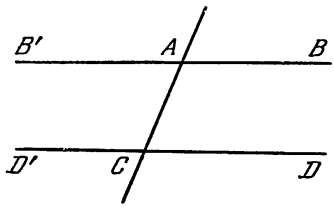


Рис. 3.

---

[1]) Ясно, что если сумма внутренних односторонних углов BAC и DCA, образованных прямыми AB и CD с секущей AC, больше или равна 180°, то лучи AB и CD не могут пересечься: ведь если бы они пересеклись в точке P, то внешний угол треугольника ACP при вершине A был бы меньше не смежного с ним внутреннего угла ACP, а еще Евклид доказал, что во всяком треугольнике внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного,— причем доказал это, не опираясь на V постулат!

[2]) Дж. Плейфер заменил V постулат допущением о существовании в плоскости единственной параллели к a, проходящей через точку A, не принадлежащую прямой a, в выпущенном им «школьном издании» «Начал» Евклида, т. е. в обработке «Начал», призванном играть роль учебника геометрии для английских школьников. (Подобные «школьные издания» Евклида, в которых роль V постулата, как правило, играло допущение Плейфера, были повсеместно распространены в английских школах еще в первой четверти нашего века.)

В заключение приведем в качестве примеров доказательства V постулата (или аксиомы о параллельных), предложенные Валлисом и Бойяи. В следующем пункте мы также рассмотрим доказательства, данные Лежандром.

Пусть прямые AB и CD пересекаются прямой AC, причем углы BAC и ACD составляют в сумме меньше двух прямых углов (рис 4) Валлис передвигает прямую CD по направлению к прямой AB таким образом, что угол ACD остается постоянным. Это передвижение производится до тех пор, пока прямая CD не займет положение $C'D'$, в котором она пересечет прямую AB в точке E'. Получится треугольник $AC'E'$. Но в силу

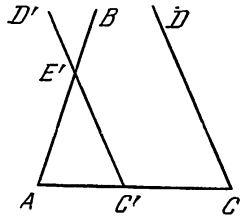


Рис. 4.

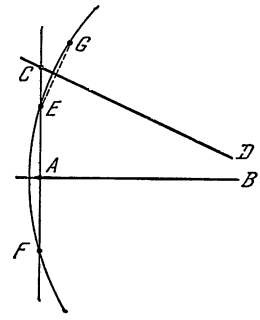


Рис. 5.

аксиомы Валлиса можно на отрезке AC построить треугольник, подобный этому треугольнику. Третья вершина этого треугольника и будет точкой пересечения прямых AB и CD.

Бойяи рассматривает случай, когда прямая AC перпендикулярна к прямой AB (рис. 5; если V постулат доказан для этого случая, его нетрудно доказать и для общего случая). Далее он берет произвольную точку E отрезка AC и находит точки F и G, симметричные точке E относительно прямых AB и CD. Если сумма внутренних односторонних углов $\angle BAC$ и $\angle DCA$ не равна двум прямым, т. е. если прямая CD не перпендикулярна к AC, то точки E, F и G не лежат на одной прямой. Следовательно, они, как считает Бойяи, лежат на одной окружности. В таком случае прямые AB и CD — перпендикуляры, восставленные в серединах хорд окружности, — пересекаются в центре этой окружности.

1.2. Исследования Лежандра. Французский математик и педагог А. М. Лежандр является автором замечательного школьного учебника «Начала геометрии», вышедшего в свет первым изданием в 1794 году и переиздававшегося при жизни автора 14 раз. Лежандр весьма существенно менял свою книгу от издания к изданию. При этом больше всего его заботила теория параллельных. Во всех прижизненных изданиях «Начал геометрии», кроме 9, 10 и 11-го, Лежандр доказывал V постулат, меняя, однако, доказательства от издания к изданию. Объяснялось это тем, что каждый раз после выхода очередного издания Лежандр обнаруживал ошибку в опубликованном доказательстве (точнее, не ошибку, а неявное использование утверждения, эквивалентного V постулату). Безупречного доказательства V постулата Лежандр так и не получил (и, как будет ясно из сказанного ниже, не мог получить). Однако

его исследования очень поучительны и, что самое главное, вскрывают глубокие связи между V постулатом и другими предложениями. Особенно важны три замечательные теоремы Лежандра о связи V постулата с теоремами о сумме углов треугольника. Мы рассмотрим их подробнее. Доказательства этих теорем проводятся без использования V постулата (или аксиомы о параллельных).

Теорема 1. *Во всяком треугольнике сумма внутренних углов не превосходит* 180°.

Доказательство. Предположим, что наша теорема неверна, т. е. что существует треугольник ABA_1, сумма углов которого больше 180°. Продолжим сторону AA_1 этого треугольника и построим на прямой AA_1 ряд треугольников $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_{n-1}B_{n-1}A_n$, $A_nB_nA_{n+1}$, равных треугольнику ABA_1; точки B и B_1, B_1 и B_2, ..., B_{n-1} и B_n соединим отрезками (рис. 6; заметьте, мы не утверждаем, что отрезки BB_1, B_1B_2, ..., $B_{n-1}B_n$

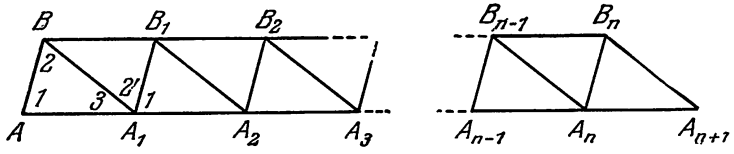


Рис. 6.

составляют прямую линию,— доказать это, не опираясь на V постулат, невозможно). Так как на рис. 6 $\angle 1+\angle 2+\angle 3>180°$, а $\angle 1+\angle 2'+\angle 3=180°$, то $\angle 2'<\angle 2$; таким образом, стороны A_1B и A_1B_1 треугольника A_1BB_1 соответственно равны сторонам BA_1 и BA треугольника ABA_1, а заключенный между ними угол A_1 меньше угла B. Отсюда вытекает, что $AA_1>BB_1$ (заметим, что теорема о двух треугольниках, имеющих по две равные стороны, во всех учебниках геометрии доказывается до аксиомы параллельности и, следовательно, не зависит от V постулата).

Но, очевидно, не только $\triangle ABA_1=\triangle A_1B_1A_2=\ldots=\triangle A_nB_nA_{n+1}$, но и $\triangle BA_1B_1=\triangle B_1A_2B_2=\ldots=\triangle B_{n-1}A_nB_n$. Поэтому, если положить $AA_1-BB_1=a$, то мы получим $AA_n-(BB_1+B_1B_2+\ldots+B_{n-1}B_n)=na$. Выбрав теперь число n настолько большим, что $na>2AB$, мы найдем, что $(AB+BB_1+B_1B_2+\ldots+B_{n-1}B_n+B_nA_n)-AA_n=AB+B_nA_n-na<0$, т. е. что отрезок AA_n больше ломаной $ABB_1\ldots B_nA_n$, соединяющей его концы. Но последнее невозможно (причем невозможность эта устанавливается без обращения к аксиоме параллельности). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если у какого-либо одного треугольника сумма углов равна* 180°, *то она равна* 180° *и у любого треугольника.*

Доказательство. Установим прежде всего, что *если сумма углов прямоугольного треугольника ABC равна* 180°, *то сумма углов прямоугольного треугольника* ABC_1, *катет* BC_1 *которого равен* $2BC$ (рис. 7), *также равна* 180°. Для доказательства построим на стороне AC треугольник ACB', равный ACB (причем так, что $\angle BAC = \angle B'CA$, $\angle BCA = \angle CAB'$); в таком случае все углы четырехугольника $ABCB'$ будут прямыми (ибо сумма острых углов треугольника ABC по предположению равна 90°). Продолжив теперь отрезок AB' на расстояние $B'C' = AB'$ и соединив C' с C_1, мы получим четырехугольник $B'CC_1C'$, равный $ABCB'$ (их можно совместить при помощи симметрии относительно прямой $B'C$). Поэтому мы получаем четырехугольник ABC_1C' с четырьмя прямыми углами; диагональ AC_1 разбивает его на два прямоугольных треугольника, сумма углов каждого из которых равна 180°.

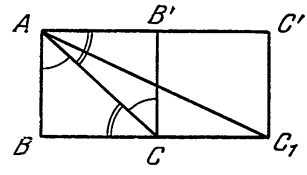


Рис. 7.

Далее мы докажем, что *если в одном прямоугольном треугольнике ABC сумма углов равна* 180°, *то сумма углов и любого другого прямоугольного треугольника* $A_1B_1C_1$ *равна* 180°. Мы можем считать, что оба катета треугольника ABC больше соответствующих катетов треугольника $A_1B_1C_1$; если бы это было не так, то мы добились бы нужного нам положения вещей, последовательно удвоив несколько раз катеты треугольника ABC (ведь, по доказанному выше, при удвоении одного из катетов прямоугольного треугольника с суммой углов 180° сумма его углов не меняется). Наложим теперь треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы у них совпали прямые углы (рис. 8), и проведем отрезок AC_1. По теореме 1, сумма углов каждого из треугольников ABC_1 и AC_1C не больше 180°; если хотя бы у одного из них сумма углов была бы меньше 180°, то и сумма углов прямоугольного треугольника ABC (получающаяся, если из суммы всех углов треугольников ABC_1 и ACC_1 вычесть 180°) была бы меньше 180°, что противоречит сделанному предположению. Поэтому сумма углов треугольника ABC_1 также равна 180°. Отсюда, в точности так же как выше, заключаем, что в каждом из треугольников A_1BC_1 и A_1AC_1 сумма углов равна 180°.

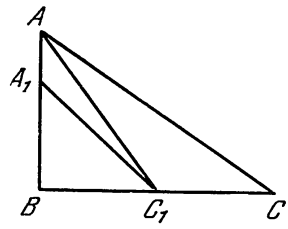


Рис. 8.

Теперь уже нетрудно доказать теорему 2. Пусть сумма углов некоторого треугольника ABC равна 180°. Опустив на его бо́льшую сторону высоту BD, мы разобьем его на два прямоугольных

треугольника ABD и CBD (рис. 9, *а*). Сумма углов каждого из треугольников ABD, CBD также равна 180° (ибо если бы сумма острых углов хотя бы одного из треугольников ABD и CBD была меньше 90°, то сумма углов треугольника ABC также была бы меньше 180°). По доказанному выше, отсюда следует, что сумма острых углов любого прямоугольного треугольника равна 90°. Но каждый треугольник $A_1B_1C_1$ можно разбить на два прямоугольных треугольника высотой, опущенной на бо́льшую сторону (рис. 9, *б*). Так как сумма острых углов каждого из этих треугольников ($A_1B_1D_1$ и $B_1C_1D_1$ на рис. 9, *б*) равна 90°, то сумма углов треугольника $A_1B_1C_1$ равна 180°, что и завершает доказательство теоремы.

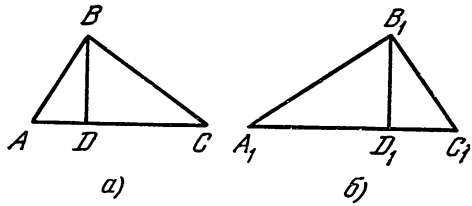


Рис. 9.

Теорема 3. *Если сумма углов любого треугольника равна* 180°, *то справедлив V постулат.*

Пусть A — точка, лежащая вне прямой DD' (рис. 10). Опустим из точки A перпендикуляр AC на прямую DD' и проведем через точку A прямую BB', перпендикулярную к AC. Ясно, что прямые BB' и DD' не пересекаются (иначе образовался бы треугольник с суммой углов, большей 180°). Надо доказать, что любая другая прямая MN, проходящая через точку A, пересекается с прямой DD'. Из двух лучей AM, AN выберем тот, который с отрезком AC составляет о с т р ы й угол; пусть это будет луч AN и пусть (как на рис. 10) точки B и N лежат по одну сторону от прямой AC (в противном случае можно было бы поменять обозначения точек B и B'). Угол $\angle BAN$ обозначим через α.

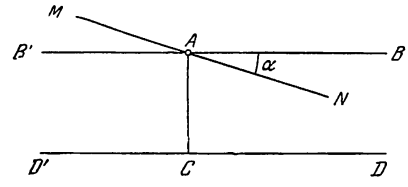


Рис. 10.

Если мы установим существование луча AP, составляющего с лучом AB угол, м е н ь ш и й чем α, и пересекающего прямую DD', то станет ясно, что и луч AN должен пересечь прямую DD' (рис. 11). Существование требуемого луча AP Лежандр устанавливает следующим образом.

Отложим на луче CD отрезок $CP_1 = CA$ (рис. 12). Тогда в равнобедренном прямоугольном треугольнике ACP_1 каждый из углов $\angle A$, $\angle P_1$ равен $45° = \frac{1}{2} \cdot 90°$ (ведь, по предположению, сумма углов треугольника равна 180°!). Отложим теперь на прямой CD отрезок $P_1P_2 = P_1A$. Тогда в равнобедренном треугольнике AP_1P_2 каждый из углов $\angle P_1AP_2$, $\angle P_2$, как легко подсчитать, равен

$\frac{1}{2}\cdot 45^\circ = \frac{1}{4}\cdot 90^\circ$. Затем мы построим точку P_3 прямой CD (так, чтобы было $AP_2 = P_2P_3$) и т. д. В результате мы получим лучи AP_1, AP_2, AP_3, ..., каждый из которых пересекает прямую CD. При этом $\angle BAP_1 = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ$, $\angle BAP_2 = \frac{1}{4}\cdot 90^\circ$, $\angle BAP_3 = \frac{1}{8}\cdot 90^\circ$, ... Ясно, что после конечного числа шагов мы получим такой луч AP_n (пересекающий прямую DD'), для которого $\angle BAP_n = \frac{1}{2^n}\cdot 90^\circ < \alpha$. Этим и завершается доказательство теоремы.

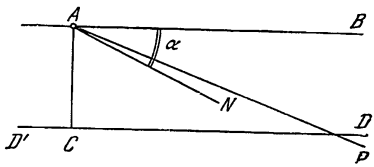


Рис. 11.

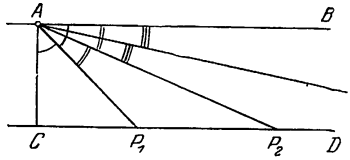


Рис. 12.

Как известно, из V постулата (или из аксиомы параллельности) вытекает, что сумма углов любого треугольника равна 180°. Таким образом, теорема 3 показывает, что *утверждение «сумма углов треугольника равна* 180°» *эквивалентно* V *постулату*[1]).

В заключение приведем одно из доказательств V постулата, помещенных Лежандром в его книге «Начала геометрии». Для доказательства V постулата нужно лишь установить, что сумма углов треугольника не может быть меньше 180°: ведь тогда из теоремы 1 будет вытекать, что сумма углов треугольника в точности равна 180°, а потому, согласно теореме 3, будет справедлив V постулат. Доказательство проводится «от противного»: пусть существует треугольник ABC, сумма углов которого меньше 180°, скажем, равна $180^\circ - \alpha$ (рис. 13). Построим на стороне BC вне треугольника ABC треугольник BCD, равный ABC, и проведем через точку D прямую, пересекающую стороны AB и AC угла BAC в точках M и N. В таком случае сумма углов треугольника BCD также равна $180^\circ - \alpha$, а у треугольников BDM и CDN суммы углов не превосходят 180° (теорема 1). По этому сумма 12 углов четырех треугольников: ABC, BCD, BDM и CDN не превосходит $720^\circ - 2\alpha$. Но суммы трех углов при точках B, C и D равны 180°; поэтому сумма оставшихся трех углов при вершинах A, M и N не превосходит $(720^\circ - 2\alpha) - 540^\circ = 180^\circ - 2\alpha$. Таким образом, мы построили треугольник AMN, сумма углов которого не превосходит $180^\circ - 2\alpha$. Далее таким же способом строим треугольник, сумма углов которого не превосходит $180^\circ - 4\alpha$, затем треугольник, сумма углов которого не превосходит $180^\circ - 8\alpha$, и т. д. Но таким путем мы, в конце концов, придем к треугольнику с отрицательной суммой углов, — а такого треугольника явно не может быть! Полученное противоречие и доказывает, что сумма углов любого треугольника равна 180°, а значит (теорема 3), V постулат имеет место.

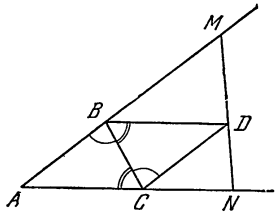


Рис. 13.

[1]) Эта эквивалентность имеет место только при выполнении остальных аксиом геометрии Евклида, ср. стр. 410.

Ошибочность этого доказательства состоит в том, что Лежандр, не оговаривая этого явно, пользуется следующим утверждением: *через любую точку D, взятую внутри угла CAB, можно провести прямую, пересекающую обе стороны этого угла.* Но это предположение эквивалентно самому V постулату: его так же не удается доказать, исходя из остальных аксиом, как и V постулат.

1.3. Неевклидова геометрия Лобачевского и абсолютная геометрия. Многие попытки доказательства V постулата проводились по схеме «доказательства от противного», т. е. предполагалось, что V постулат не имеет места, и делался ряд выводов, имеющих место в этом случае. Если бы при этом удалось прийти к противоречию, то V постулат был бы доказан. По этому пути шли упомянутые нами Хасан ибн ал-Хайсам и Омар Хайям, а также во многом следовавшие за Хайямом азербайджанский математик XIII века Насир ад-Дин ат-Туси, итальянский математик XVII—XVIII веков Джироламо Саккери и немецкий математик XVIII века Иоганн Генрих Ламберт. При этом было накоплено много фактов, которые имели бы место в геометрии, в которой верны все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельности, а последняя неверна. Особенно много удивительных теорем, которые имели бы место в такой «геометрии», если бы только последняя была возможна, получил И. Г. Ламберт. Однако никто из перечисленных выше математиков не допускал и мысли о том, что, помимо геометрии Евклида, возможна другая непротиворечивая геометрия. В большинстве случаев все их построения завершались тем, что явно или неявно применялась аксиома, содержащая утверждение, равносильное V постулату, в результате чего и обнаруживалось противоречие. Однако сегодня мы ценим упомянутые исследования как заложившие начала *неевклидовой геометрии Лобачевского.* Под этим названием понимается та совокупность теорем, которая может быть выведена из системы аксиом, получаемой, если заменить аксиому параллельных евклидовой геометрии противоположным утверждением: *в плоскости через точку A, не принадлежащую прямой a, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с a* (рис. 14). Эта геометрическая система носит имя Николая Ивановича Лобачевского, профессора и ректора Казанского университета. Независимо от него, существование новой геометрии установили великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс и замечательный венгерский математик Янош Бойяи, сын Фаркаша Бойяи. Названные три автора первоначально шли тем путем, который мы указали выше. Стремясь доказать V постулат от противного, они

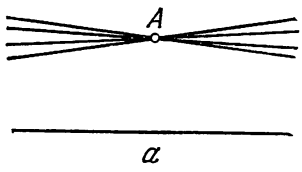


Рис. 14.

глубоко развили аксиоматическую систему, получающуюся при отрицании истинности V постулата [1]), но не обнаружили при этом никаких противоречий. Однако, в противоположность своим предшественникам, эти три великих математика сделали из полученных ими результатов вывод о существовании геометрической системы, отличной от евклидовой. При этом они продолжали исследовать новую геометрию, получая дальнейшие относящиеся к ней теоремы. По-видимому, Гаусс владел основными идеями новой геометрии уже в начале 10-х годов прошлого века; однако, боясь быть непонятым, он никому не сообщил о своем замечательном открытии. Мужественнее поступили Н. И. Лобачевский и Я. Бойяи, которые опубликовали первые работы, излагающие существо неевклидовой геометрии, и отстаивали свои идеи. Первая публикация в этом направлении принадлежит Лобачевскому, напечатавшему в 1829 году в журнале «Казанский вестник» статью «О началах геометрии». Вслед за этим Лобачевский напечатал много других статей и книг, широко раскрывающих содержание открытой им геометрической системы. Я. Бойяи опубликовал свое открытие в 1832 году в виде приложения («Appendix») к обширному сочинению своего отца. Этот краткий мемуар по достоинству считается одним из замечательнейших произведений мировой математической литературы.

Ни Лобачевский, ни Гаусс, ни Бойяи не дали строго логического доказательства непротиворечивости изученной ими геометрии; такое доказательство впервые было получено итальянским геометром Эудженио Бельтрами (1868 г.) и немецким математиком Феликсом Клейном (1870 г.). Эти доказательства сводились к построению, в рамках евклидовой геометрии, «моделей» неевклидовой геометрии Лобачевского, т. е. такой системы объектов, для которой выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского. Ниже мы укажем, как строится такая модель.

Заметим еще, что некоторые попытки доказательства V постулата не использовали метода доказательства от противного. Их авторы систематически развивали геометрическую теорию, базирующуюся на всех аксиомах евклидовой геометрии, кроме V постулата, пытаясь получить на таком пути доказательство V постулата. При этом были намечены контуры аксиоматической системы, базирующейся на части полного списка аксиом евклидовой геометрии — на всех ее аксиомах за вычетом аксиомы параллельности. Особенно глубоко изучил эту систему Янош Бойяи, давший ей название «*абсолютная геометрия*». Утверждение о непротиворечивости

---

[1]) Заметим, впрочем, что полная система аксиом евклидовой геометрии была установлена лишь на рубеже XIX и XX веков, так что все построения Лобачевского, Гаусса и Бойяи не являются чисто дедуктивными.

неевклидовой геометрии Лобачевского можно формулировать в виде заключения о независимости аксиомы параллельности от остальных аксиом евклидовой геометрии или в виде заключения о том, что аксиоматика абсолютной геометрии не является полной (ср. статью «Аксиомы и основные понятия геометрии» в IV кн. ЭЭМ). Начатки абсолютной геометрии имеются уже у Евклида, пытавшегося возможно далее не использовать V постулата. В качестве типичной теоремы абсолютной геометрии можно упомянуть следующую: *внешний угол треугольника меньше не смежного с ним внутреннего угла* [1]) (см. сноску [1]) на стр. 396). К абсолютной геометрии относится, например, и теорема 1 Лежандра (стр. 398), утверждающая, что *сумма углов треугольника не может быть больше* 180°.

§ 2. Неевклидова геометрия Римана

2.1. Сферическая геометрия и неевклидова геометрия Римана. Огромное впечатление, произведенное на умы математиков открытием Лобачевского, Бойяи и Гаусса, быть может, было бы несколько менее сильным, если бы люди заметили, что еще задолго до Лобачевского они фактически уже владели содержательной геометрической схемой, отличной от традиционной геометрии Евклида, т. е. уже знали одну из неевклидовых геометрий. Однако твердое убеждение всех ученых в универсальности системы Евклида не позволило им оценить по достоинству тот запас знаний, которым они располагали. Именно поэтому первым примером геометрической системы, отличной от классической геометрии Евклида, считается обычно неевклидова геометрия Лобачевского. Значительно же более простая схема, по существу разработанная с большими деталями за много веков до Лобачевского, связывается обычно с именем гениального немецкого математика Бернхарда Римана, впервые обратившего внимание на родство этой схемы с классической геометрией Евклида и неевклидовой геометрией Лобачевского. Мы, однако, здесь не будем следовать истории вопроса и изложим более простую схему Римана до геометрии Лобачевского.

Когда мы говорим, что *неевклидова геометрия Римана* была известна задолго до открытия Лобачевского, мы имеем в виду тесную связь ее со *сферической геометрией* (геометрией на поверхности сферы). Основные факты сферической геометрии были основательно изучены еще в древности в связи с задачами астрономии. Поскольку поверхность земли приближенно имеет форму

---

[1]) Более сильная теорема: *внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним*, — доказывается с применением аксиомы параллельности. Эта теорема относится к евклидовой (а не абсолютной) геометрии.

сферы, можно утверждать, что «земная геометрия» также является геометрией сферической (это реально ощущается при измерениях, затрагивающих значительные участки земной поверхности). Сферической геометрии посвящена специальная статья в IV книге ЭЭМ («Основные понятия сферической геометрии и тригонометрии»).

Роль прямых линий на сфере, т. е. самых коротких линий, соединяющих две точки сферы, играют так называемые *большие окружности* — сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр (рис. 15). *Углы* между большими окружностями, как и углы между любыми другими линиями на сфере, принимаются равными

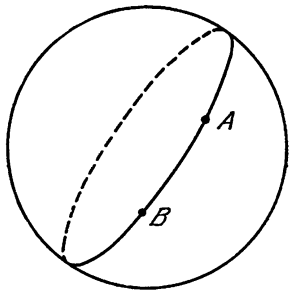


Рис. 15.

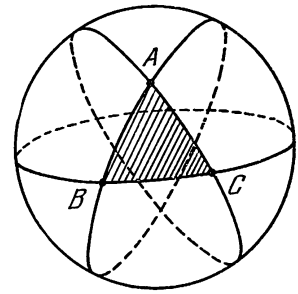


Рис. 16.

углам между касательными к этим линиям в точках пересечения. Роль треугольников и многоугольников в сферической геометрии играют *сферические треугольники* и *многоугольники*, образованные дугами больших окружностей (рис. 16). Под *расстоянием* между двумя точками на сфере понимается длина меньшей из двух дуг большой окружности, соединяющей эти точки. Это определение следует видоизменить лишь для случая диаметрально противоположных точек A и A_1 сферы; для них существует бесконечно много соединяющих их дуг больших окружностей, и все они имеют одну и ту же длину πr (где r — радиус сферы), которую мы и принимаем за расстояние между A и A_1.

Роль окружностей в сферической геометрии играют так называемые *малые окружности*, т. е. сечения сферы плоскостями, не проходящими через ее центр. Ясно, что любую окружность (и большую и малую) можно в сферической геометрии определить как *множество точек, удаленных от фиксированной точки Q на постоянное расстояние* ρ; точка Q называется при этом центром (или полюсом) окружности, а расстояние ρ — ее радиусом. У каждой окружности на сфере имеются два полюса Q_1, Q_2 (являющихся диаметрально противоположными точками сферы, рис. 17) и соответственно этому два радиуса ρ_1, ρ_2. Если эти

радиусы различны, то мы имеем малую окружность, если же они совпадают (и равны $\pi r/2$), то — большую окружность.

Большие и малые окружности сферы аналогичны прямым и окружностям на плоскости еще и в том отношении, что существуют движения сферы (повороты, рис. 18), переводящие их в себя. Из этого ясно, что большие и малые окружности являются «однородными» линиями, т. е. во всех своих точках они устроены совершенно одинаково.

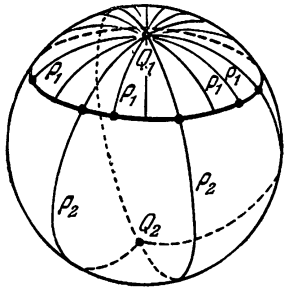


Рис. 17.

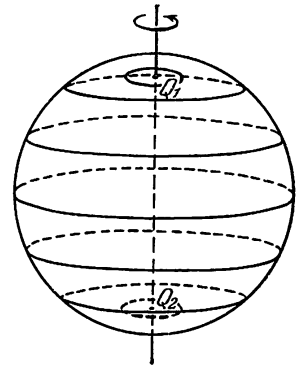


Рис. 18.

Однако между геометрией на сфере и геометрией на плоскости имеется и одно существенное различие. Мы знаем, что через каждые две точки плоскости проходит единственная прямая линия; другими словами, никакие две прямые не могут пересечься в двух точках. В противоположность этому каждые две большие окружности сферы пересекаются в двух (диаметрально противоположных) точках. Это обстоятельство резко отличает сферическую геометрию как от евклидовой геометрии, так и от неевклидовой геометрии Лобачевского. Для того чтобы устранить его, мы условимся называть «точкой» сразу пару диаметрально противоположных точек сферы. Полученный геометрический образ — сферу, понимаемую как множество пар диаметрально противоположных точек, — мы и назовем *неевклидовой плоскостью Римана*. Под «прямыми» неевклидовой геометрии Римана мы будем понимать большие окружности сферы (рассматриваемые как множество пар диаметрально противоположных точек). Условимся, далее, принимать за «расстояние» между двумя «точками» A и B плоскости Римана (не превосходящее четверти большой окружности) расстояние между соответствующими им точками сферы (так что расстояние между «точками», изображаемыми имеющимися на рис. 19 парами A, A_1 и B, B_1, равно дугам AB или A_1B_1, но не AB_1!). При таком определении полная длина «прямой» будет равна πr, но не $2\pi r$ (ибо, пройдя по «прямой» путь AA_1, равный πr, мы

придем к «точке» A_1, совпадающей с исходной «точкой» A, рис. 20). Под «углами» между «прямыми» неевклидовой геометрии Римана мы будем понимать углы между отвечающими этим «прямым» большими окружностями сферы. «Окружность» с центром Q и радиусом ρ естественно определить как множество «точек», удаленных от Q на «расстояние» ρ; на сфере она изображается малой окружностью

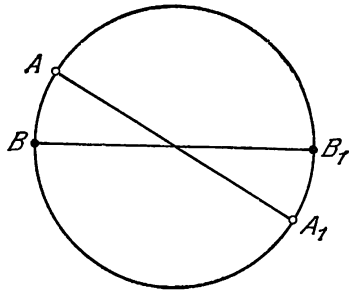


Рис. 19.

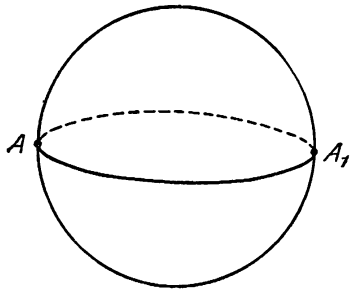


Рис. 20.

(точнее, парой диаметрально противоположных малых окружностей, рис. 21). «Движения» неевклидовой геометрии Римана можно описать как вращения сферы: так как каждое вращение сферы переводит две ее диаметрально противоположные точки снова в диаметрально противоположные точки, то «движение» представляет

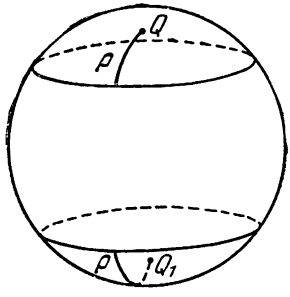


Рис. 21.

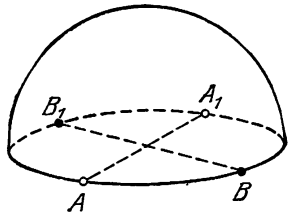


Рис. 22.

собой «точечное» преобразование плоскости Римана, переводящее каждую ее «точку» снова в «точку».

Плоскость Римана можно также представлять себе как полусферу, склеенную весьма своеобразным образом — так, чтобы совпали диаметрально противоположные точки ограничивающей ее окружности (рис. 22). Относительно дальнейших свойств этой плоскости см. в этой книге ЭЭМ статью «Основные топологические понятия», стр. 502—505.

Введем теперь в пространстве прямоугольные координаты x, y, z с началом в центре рассматриваемой сферы. Для этого про-

ведем через центр O сферы три взаимно перпендикулярные плоскости, например горизонтальную и две вертикальные (рис. 23), и условимся характеризовать каждую точку пространства тремя числами x, y, z, абсолютные величины которых равны расстояниям этой точки от указанных плоскостей, а знаки положительны для точек, расположенных по одну сторону от соответственной плоскости, и отрицательны по другую сторону от этой плоскости. Так, например, координата x по абсолютной величине равна расстоянию от профильной вертикальной плоскости; она положительна, когда данная точка лежит справа от этой плоскости, и отрицательна, когда точка лежит слева. Координата y по абсолютной величине равна расстоянию от фронтальной вертикальной плоскости; она положительна для точек, расположенных перед этой плоскостью, и отрицательна для точек, расположенных за ней. Координата z по абсолютной величине равна расстоянию от горизонтальной плоскости; она положительна для точек, лежащих над этой плоскостью, и отрицательна для точек, лежащих под ней.

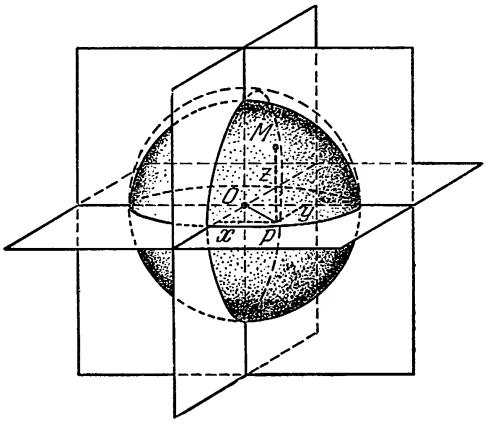


Рис. 23.

Расстояние OM от начала координат O до произвольной точки M с координатами x, y, z определяется соотношением

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{1}$$

В самом деле, обозначив через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на горизонтальную плоскость, мы получим, в силу теоремы Пифагора, $OM^2 = OP^2 + z^2$, а $OP^2 = x^2 + y^2$, откуда и следует, что $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Если радиус нашей сферы равен r, то, в силу соотношения (1), координаты всех точек сферы удовлетворяют условию

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{2}$$

«Точки» неевклидовой плоскости Римана можно описать тем же уравнением, если только условиться считать, что $M(x, y, z)$ и $M_1(-x, -y, -z)$ — это одна точка.

Расстояние M_1M_2 между двумя произвольными точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ пространства определяется по общей формуле

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{3}$$

(частным случаем которой является формула (1)), а угол φ между двумя отрезками OM_1 и OM_2, исходящими из точки O, — по формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{4}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости этих формул, напомним, что если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два вектора с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, то

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

(где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$) и, в частности,

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

(см. в IV книге ЭЭМ статью «Векторы и их применения в геометрии», стр. 330). Формула (3) вытекает теперь из того, что $M_1M_2^2 = \overline{M_1M_2}^2$ (поскольку вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$), а формула (4) — из того, что $\cos\varphi = \dfrac{\overline{OM_1}\cdot\overline{OM_2}}{OM_1\cdot OM_2}$ (поскольку векторы $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ имеют координаты x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2).

Если M_1 и M_2 — точки нашей сферы, то обычное расстояние между ними измеряется по формуле (3). Расстояние же ω между этими точками, измеренное по большой окружности сферы, в соответствии с соглашениями, принятыми в сферической геометрии, равно углу φ между отрезками OM_1 и OM_2, умноженному на радиус r сферы; поэтому, согласно соотношениям (2) и (4), это расстояние вычисляется по формуле

$$\cos\frac{\omega}{r} = \frac{1}{r^2}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \tag{5}$$

Для определения «расстояния» между двумя «точками» M_1 и M_2 неевклидовой геометрии Римана можно воспользоваться той же формулой (5), где только надо учесть, что если ω окажется больше $\pi r/2$ (т. е. если угол φ будет тупым), то одну из точек M_1, M_2 надо будет заменить центрально-симметричной (т. е. изменить знаки у чисел x_1, y_1, z_1 или у чисел x_2, y_2, z_2). Отсюда мы получаем следующую формулу для «расстояния» между двумя «точками» неевклидовой плоскости Римана:

$$\cos\frac{\omega}{r} = \frac{1}{r^2}\,|\,x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,|. \tag{6}$$

2.2. Основные понятия неевклидовой геометрии Римана. Принцип двойственности. Далее мы будем говорить лишь о неевклидовой геометрии Римана, в соответствии с чем откажемся от

кавычек, указывающих на образы этой геометрии. При этом мы будем все время иметь в виду тесную связь рассматриваемой геометрии со сферической, позволяющую выводить все теоремы неевклидовой геометрии Римана из известных фактов сферической геометрии.

Мы не ставим перед собой задачи дать полный перечень аксиом геометрии Римана. Укажем только, что основная аксиома «через всякие две точки можно провести прямую и притом только одну» евклидовой геометрии сохраняет силу и в геометрии Римана; но наряду с ней здесь имеет место также и аксиома «всякие две прямые пересекаются в точке и притом только в одной» (на сфере всякие две большие окружности пересекаются в двух диаметрально противоположных точках, но после отождествления диаметрально противоположных точек эти две точки превращаются в одну). Из этой аксиомы вытекает, что *на неевклидовой плоскости Римана выполняется* V *постулат Евклида*: если на этой плоскости пересекаются всякие две прямые, то в том числе пересекаются и прямые, удовлетворяющие условию V постулата [1]). Однако на неевклидовой плоскости Римана не выполняются аксиомы порядка евклидовой плоскости, так как в случае неевклидовой плоскости Римана каждую из трех точек прямой можно считать лежащей между двумя другими, подобно тому как это имеет место для трех точек евклидовой окружности. По этой причине на неевклидовой плоскости Римана не проходит приведенное нами в п. **1.2** доказательство теоремы Лежандра о том, что сумма углов треугольника не превосходит 180°. Напротив, из того, что сумма углов сферического треугольника больше 180° (см. IV кн. ЭЭМ, стр. 538) вытекает, что *сумма углов любого треугольника на неевклидовой плоскости Римана больше* 180°. Поэтому утверждение Лежандра о том, что V постулат эквивалентен предположению о равенстве суммы углов треугольника двум прямым углам, справедливо только при выполнении остальных аксиом геометрии Евклида — на неевклидовой плоскости Римана, на которой V постулат выполняется, но не выполняются аксиомы порядка геометрии Евклида, эти утверждения уже не эквивалентны.

Если на сфере у каждой большой окружности имеются два диаметрально противоположных полюса, то на неевклидовой плоскости Римана у каждой прямой имеется только один полюс. Прямую неевклидовой плоскости Римана можно рассматривать как множество всех точек, отстоящих от полюса на расстоянии $\pi r/2$. Если на рис. 21 мы будем приближать расстояние ρ к $\pi r/2$, то

[1]) Впрочем, заключительная часть V постулата, указывающая, по какую сторону от секущей пересекутся две встречающие ее прямые, в неевклидовой геометрии Римана теряет смысл, поскольку прямая не разбивает неевклидовой плоскости Римана на две части.

увидим, что окружность радиуса ρ с центром Q будет приближаться к прямой с полюсом Q с двух сторон и в пределе окружность перейдет в прямую, пройденную не один, а два раза («дважды взятую» прямую). Это соответствует тому, что длина окружности радиуса ρ, равная $C = 2\pi r \sin\frac{\rho}{r}$ (см. формулу (5) на стр. 541 кн. IV ЭЭМ), при стремлении ρ к $\pi r/2$ стремится к $2\pi r$, а длина прямой на неевклидовой плоскости Римана равна πr.

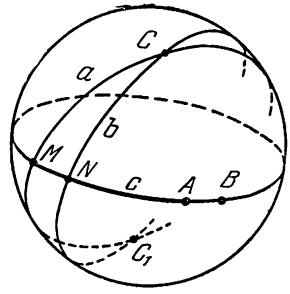


Рис. 24.

Из свойств сферических окружностей вытекает, что *все перпендикуляры к одной прямой на неевклидовой плоскости Римана пересекаются в полюсе этой прямой.* Далее, *всякие две прямые на плоскости Римана обладают общим перпендикуляром, полюсом которого является точка пересечения этих прямых.* Из этого вытекает, что при $r = 1$ *угол*[1]) *между двумя прямыми a и b* (рис. 24) *равен расстоянию между точками M и N их пересечения с их общим перпендикуляром c, а также равен расстоянию между полюсами A и B этих прямых.* Последний факт показывает, что прямые неевклидовой плоскости Римана находятся во взаимно однозначном соответствии с ее точками — полюсами этих прямых, причем углы между прямыми равны расстояниям соответствующих точек. Таким образом, *прямые неевклидовой плоскости Римана, если считать углы между ними расстояниями, образуют модель той же плоскости.*

Последнее обстоятельство можно пояснить также следующим образом. Рассмотрим своеобразное «преобразование» неевклидовой плоскости Римана, сопоставляющее каждой прямой a этой плоскости определенную точку A — полюс прямой a, а каждой точке A — прямую a, полюсом которой является точка A (эта прямая называется *полярой* точки A). Если рассматривать множество точек и прямых неевклидовой плоскости Римана как множество пар точек и больших окружностей сферы, то это преобразование сводится к замене каждой большой окружности парой ее полюсов и каждой пары диаметрально противоположных точек — большой окружностью (являющейся «экватором» сферы, если наши точки принять за «северный полюс» и «южный полюс»). Радиус сферы мы примем равным 1; это равносильно такому выбору единицы измерения длин на плоскости Римана, при котором длина прямой оказывается равной π. Соответствующее преобразование, заменяющее прямые точками, а точки прямыми, называется *полярным преобра-*

[1]) Здесь, разумеется, говорится о радианной мере угла.

зованием. В силу доказанного выше, две точки A и B переводятся полярным преобразованием в такие прямые a и b, что расстояние между A и B равно углу между a и b и наоборот; далее, если точки A и B принадлежат прямой c, то полярное преобразование переводит их в прямые a и b, пересекающиеся в точке C, отвечающей, в силу полярного преобразования, прямой c (см. рис. 24).

Существование полярного преобразования с такими замечательными свойствами обеспечивает выполнение в неевклидовой геометрии Римана принципа двойственности, заключающегося в следующем (ср. п. **1.5** статьи «Основные понятия сферической геометрии и тригонометрии» в IV кн. ЭЭМ): *если заменить в любом предложении неевклидовой геометрии Римана слова «точка», «лежит на», «расстояние» соответственно словами «прямая», «проходит через», «угол» и наоборот, то мы придем к новому предложению, также являющемуся правильным.* Для доказательства достаточно подвергнуть выражающий первое предложение чертеж, а также все относящиеся к нему рассуждения полярному преобразованию. Предложения, получаемые одно из другого таким образом, называются *двойственными* друг другу. Так, например, аксиоме о том, что каждые две точки неевклидовой плоскости Римана принадлежат единственной прямой, двойственна аксиома: каждые две прямые неевклидовой геометрии Римана пересекаются в одной точке. Другие примеры двойственных друг другу предложений будут приведены ниже.

2.3. Примеры теорем неевклидовой геометрии Римана. Площадь треугольника и многоугольника. Неевклидова геометрия Римана имеет много общего с обычной геометрией Евклида. Так, например, здесь также справедливы теоремы о сравнительной длине сторон треугольника (каждая сторона меньше суммы двух других и больше их разности), о свойствах равнобедренного треугольника, о замечательных точках треугольника. Справедливы также и признаки равенства треугольников; только наряду с «третьим признаком равенства треугольников» (два треугольника равны, если стороны одного соответственно равны сторонам другого) в неевклидовой геометрии Римана имеет место еще так называемый «четвертый признак равенства треугольников»: *два треугольника равны, если углы одного из них соответственно равны углам второго.* (С этим связано отсутствие в неевклидовой геометрии Римана преобразований подобия[1].) Первый и второй признаки равенства треугольников доказываются так же, как и в случае евклидовой геометрии:

---

[1]) Отсутствие преобразований подобия в неевклидовой геометрии Римана можно также усмотреть из того, что на неевклидовой плоскости Римана каждая прямая имеет конечную длину πr, а вся плоскость — конечную площадь.

с использованием «неевклидовых движений», роль которых играют повороты неевклидовой плоскости Римана вокруг точки (ср. выше, рис. 18) и симметрии относительно прямой (см. рис. 25). Третий признак равенства треугольников также может быть доказан с помощью обычного приема — с использованием теорем о равнобедренном треугольнике, вывод которых не составляет труда (отметим, что симметрия относительно биссектрисы AD равнобедренного треугольника ABC, где $AB = AC$, переводит треугольник ABD в

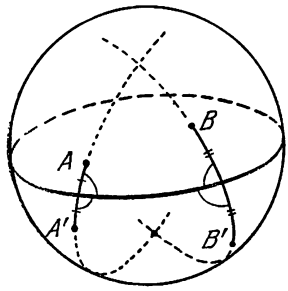


Рис. 25.

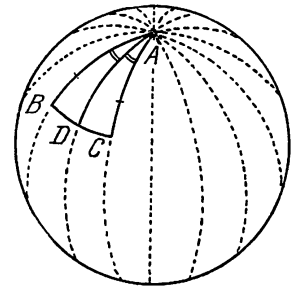


Рис 26.

треугольник ACD, рис. 26). Наконец, четвертый признак равенства треугольников получается из третьего с помощью принципа двойственности.

Теоремы о точке пересечения биссектрис треугольника ABC и о точке пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах, доказываются в точности так же, как в геометрии Евклида; первая из этих точек является центром вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 27, *а*), а вторая — центром описанной окружности (рис. 27, *б*). Несколько сложнее доказываются здесь теоремы о точке пересечения медиан и о точке пересечения его высот; соответствующие доказательства мы здесь не приводим [1]).

До сих пор мы больше говорили о тех теоремах неевклидовой геометрии Римана, которые аналогичны известным теоремам евклидовой геометрии. Для того чтобы дать представление о различии этих двух геометрий, остановимся на вопросе о площади многоугольника в неевклидовой геометрии Римана. Вспомним прежде всего, что в этой геометрии *сумма углов треугольника всегда больше* π. Отсюда можно вывести, что *сумма углов n-угольника в неевклидовой геометрии Римана всегда больше* $(n-2)\pi$.

[1]) Рекомендуем читателю попытаться самостоятельно доказать эти теоремы, руководствуясь связью неевклидовой геометрии Римана со сферической геометрией.

В самом деле, *каждый n-угольник можно разбить на n—2 треугольников непересекающимися диагоналями* (это относится как к неевклидовой геометрии Римана, так и к обычной геометрии Евклида и, разумеется, нуждается в доказательстве, которое мы

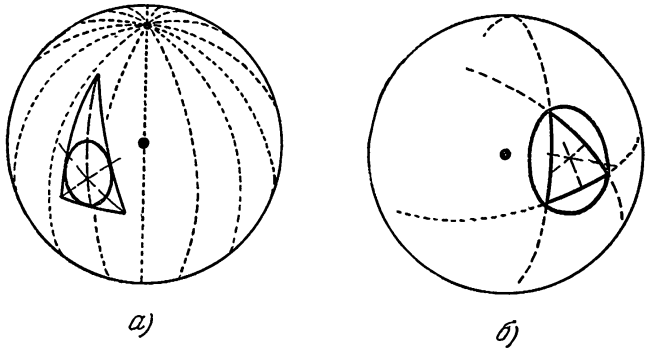


Рис. 27.

здесь опускаем; случай $n=7$ изображен на рис. 28). При этом сумма углов n-угольника равна сумме всех углов всех $n-2$ треугольников; отсюда и вытекает, что сумма углов n-угольника в неевклидовой геометрии Римана всегда больше $(n-2)\pi$. (Из аналогичных соображений вытекает, что в евклидовой геометрии сумма углов любого, может быть невыпуклого, n-угольника равна $(n-2)\pi$.)

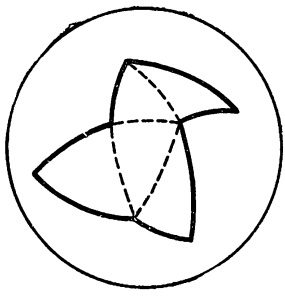


Рис. 28.

Задача измерения площадей состоит в том, чтобы сопоставить каждому многоугольнику M некоторое число $S(M)$ — *площадь* этого многоугольника — с соблюдением следующих требований:

а) положительность: для любого многоугольника M (содержащего внутренние точки) $S(M)>0$;

б) инвариантность: если многоугольники M_1 и M_2 равны, то $S(M_1)=S(M_2)$;

в) аддитивность: если многоугольник M разбит на неперекрывающиеся части M_1 и M_2, то $S(M)=S(M_1)+S(M_2)$;

г) нормировка: для многоугольника M_0, признанного «единичным», $S(M_0)=1$ (см. стр. 7—8 этой книги ЭЭМ; разумеется, все сказанное одинаково относится как к геометрии Евклида, так и к неевклидовой геометрии Римана [1]).

---

[1]) Разумеется, такое (аксиоматическое) определение площади является осмысленным лишь в том случае, если действительно существует функция S, сопоставляющая каждому многоугольнику M число $S(M)$ с указан-

Очень просто указать число, удовлетворяющее наиболее важным условиям б) и в), — в качестве него можно взять угловой избыток (эксцесс) $\varepsilon(M)$ рассматриваемого n-угольника M, т. е. превышение суммы его углов над $(n-2)\pi$:

$$\varepsilon(M) = A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)\pi$$

(здесь A_1, A_2, ..., A_n — углы n-угольника, измеренные в радианной мере). В самом деле, поскольку равные многоугольники M_1 и M_2 имеют одинаковые углы, то и избытки их, очевидно, равны:

$$\varepsilon(M_1) = \varepsilon(M_2);$$

таким образом, свойство инвариантности выполнено.

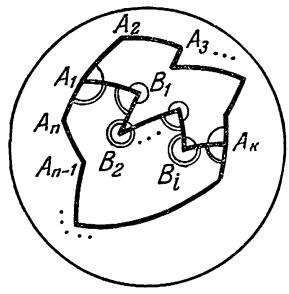


Рис. 29.

Пусть теперь n-угольник M разбит ломаной линией $A_1B_1B_2 \ldots B_iA_k$ на два меньших многоугольника M_1 и M_2 (рис. 29). Мы можем считать, что точки A_1 и A_k являются вершинами n-угольника M. В самом деле, если бы, скажем, точка A_1 принадлежала стороне многоугольника M, то мы могли бы M объявить $(n+1)$-угольником с фиктивной вершиной A_1 и углом при этой вершине, равным π; это не изменило бы углового избытка $\varepsilon(M)$ многоугольника M, поскольку сумма углов увеличилась на π и величина $(n-2)\pi$ — также на π. Теперь имеем (см. рис. 29, где углы $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$, ..., $B_i^{(1)}$, $A_k^{(1)}$ многоугольника M_1 отмечены одной дугой, а соответствующие углы $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, ..., $B_i^{(2)}$, $A_k^{(2)}$ многоугольника M_2 — двумя дугами):

$$\varepsilon(M_1) = A_1^{(1)} + A_2 + \ldots + A_{k-1} + A_k^{(1)} + B_1^{(1)} + B_2^{(1)} + \ldots + B_i^{(1)} - (k+i-2)\pi$$

ными свойствами, и притом такая функция имеется лишь одна (т. е. указанные свойства а)—г) определяют функцию S однозначно). В случае евклидовой геометрии вопросы существования и единственности подробно разбирались в статье «Площадь и объем» (стр. 24—29). В неевклидовой геометрии Римана также существует теорема о том, что условия а)—г) однозначно определяют функцию S (площадь), но доказательство ее мы здесь не приводим. Впрочем, существование функции S будет ясно из дальнейшего, ибо мы укажем величину (угловой избыток), удовлетворяющую условиям а)—г). Единственность же позволит утверждать, что указанная величина (угловой избыток) как раз и является площадью, поскольку, кроме нее, не существует никакой другой функции, удовлетворяющей условиям а)—г). Таким образом, единственность является важным элементом при построении теории площадей, и если мы опускаем здесь доказательство единственности, то не из-за его малой значимости, а лишь из-за нежелания перегружать статью.

и

$$\varepsilon(M_2) = A_k^{(2)} + A_{k+1} + \ldots + A_n + A_1^{(2)} + B_1^{(2)} + B_2^{(2)} + \ldots$$
$$\ldots + B_i^{(2)} - \{[n-(k-2)] + i - 2\}\pi.$$

Складывая эти выражения и учитывая, что $A_1^{(1)} + A_1^{(2)} = A_1$, $A_k^{(1)} + A_k^{(2)} = A_k$ и $B_\alpha^{(1)} + B_\alpha^{(2)} = 2\pi$, $\alpha = 1, 2, \ldots, i$, получаем:

$$\varepsilon(M_1) + \varepsilon(M_2) = A_1 + A_2 + \ldots + A_k + A_{k+1} + \ldots + A_n + i \cdot 2\pi -$$
$$-(k + i - 2)\pi - (n - k + i)\pi = A_1 + A_2 + \ldots + A_n -$$
$$-(n-2)\pi = \varepsilon(M), \quad (7)$$

что и доказывает выполнение для углового избытка свойства аддитивности.

В евклидовой геометрии аддитивность углового избытка никак не может быть использована для построения теории площадей: она является просто следствием того обидного с точки зрения наших настоящих интересов обстоятельства, что угловой избыток каждого многоугольника равен в евклидовой геометрии нулю. Однако в неевклидовой геометрии Римана угловой избыток положителен, т. е. удовлетворяет и условию а). Таким образом, для того чтобы получить величину, удовлетворяющую всем четырем условиям а) — г), нам надо лишь нормировать угловой избыток (умножив его на постоянный множитель пропорциональности k) с тем, чтобы соблюдалось и условие г). При этом выбор числа k существенно зависит от выбора единицы измерения площадей. Выберем эту единицу так, чтобы треугольник с тремя прямыми углами (в сферической геометрии отвечающий одной восьмой части полной сферы, рис. 30) имел площадь, равную его угловому избытку, т. е. равную $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$; при этом площадь всей сферы будет равна 4π (таким образом, радиус сферы принимается здесь за 1), а площадь всей неевклидовой плоскости Римана равна 2π. При этом мы будем иметь $k = 1$, т. е. площадь каждого многоугольника будет равна его угловому избытку:

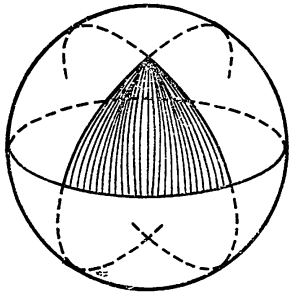


Рис. 30.

$$s(M) = \varepsilon(M) = A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)\pi. \quad (8)$$

В частности, площадь произвольного треугольника ABC будет равна

$$s_{\triangle ABC} = A + B + C - \pi \quad (8а)$$

(ср. стр. 538 кн. IV ЭЭМ). Заметим еще, что при таком выборе единицы измерения площадей площадь круга радиуса ρ будет

равна

$$s = 4\pi \sin^2 \frac{\rho}{2r} \tag{9}$$

(ср. стр. 541 кн. IV ЭЭМ; длина прямой в плоскости Римана принимается здесь равной πr).

В заключение этого пункта выпишем еще основные тригонометрические зависимости, связывающие элементы треугольника ABC неевклидовой геометрии Римана со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ (в рамках сферической геометрии эти формулы были установлены весьма давно; см. стр. 368 и 545—557 кн. IV ЭЭМ):

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A, \tag{10}$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos\frac{a}{r} \tag{10а}$$

(теоремы косинусов) и

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin C} \tag{11}$$

(теорема синусов). [Как и выше, здесь принято, что длина всей прямой в плоскости Римана равна πr.]

2.4. Трехмерная неевклидова геометрия Римана. Совершенно аналогично, отождествляя диаметрально противоположные точки гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве (см. статью «Многомерные пространства» в этой книге ЭЭМ, стр. 373), мы получим трехмерное *неевклидово пространство Римана*. Если мы введем в четырехмерном пространстве прямоугольные координаты x, y, z, t, то найдем, что расстояние OM от начала координат до произвольной точки M с координатами x, y, z, t определяется соотношением

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \tag{12}$$

(ср. выше, стр. 352). Таким образом, если начало координат находится в центре гиперсферы, то ее точки удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2. \tag{12а}$$

Точки неевклидова пространства Римана можно описать тем же уравнением (12а), если только условиться считать, что $M(x, y, z, t)$ и $M_1(-x, -y, -z, -t)$ — это одна точка.

Расстояние M_1M_2 между двумя произвольными точками $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ четырехмерного пространства определяется по более общей формуле

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (t_2 - t_1)^2, \tag{12б}$$

а угол φ между отрезками OM_1 и OM_2 — по формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + t_1t_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2}} \tag{13}$$

(см. стр. 352).

Если M_1 и M_2—точки гиперсферы, то расстояние ω между этими точками, измеренное по большой окружности, равно углу между отрезками OM_1 и OM_2, умноженному на радиус r гиперсферы, т. е.

$$\cos\frac{\omega}{r}=\frac{1}{r^2}(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+t_1t_2), \tag{14}$$

а в неевклидовом пространстве Римана, где расстояние ω между точками

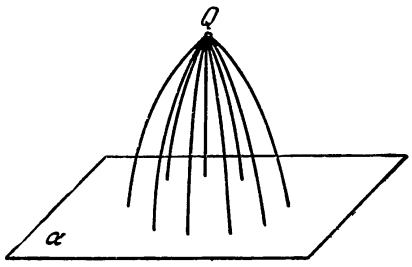


Рис. 31.

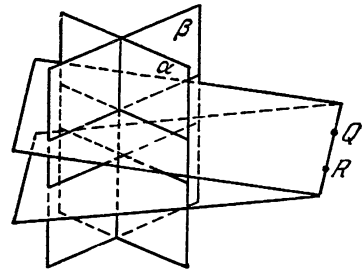


Рис. 32.

не может быть больше $\frac{\pi r}{2}$, это расстояние определяется по формуле

$$\cos\frac{\omega}{r}=\frac{1}{r^2}\,|\,x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+t_1t_2\,|. \tag{14a}$$

Будем называть *прямой линией* и *плоскостью* в неевклидовом пространстве Римана множество точек этого пространства, получающееся при отождествлении диаметрально противоположных точек, лежащих соответственно на большой окружности и большой сфере гиперсферы. Плоскость неевклидова пространства Римана, очевидно, является неевклидовой плоскостью Римана. Если на гиперсфере у каждой большой сферы имеются два диаметрально противоположных полюса, то в неевклидовом пространстве Римана у каждой плоскости имеется только один полюс. Плоскость можно рассматривать как множество всех точек, отстоящих от полюса на расстоянии $\pi r/2$. Так же как в случае прямых на плоскости, показывается, что все перпендикуляры к плоскости в неевклидовом пространстве Римана пересекаются в полюсе этой плоскости (рис. 31) и что всякие две плоскости в этом пространстве обладают общим перпендикуляром, причем каждая точка пересечения плоскостей является полюсом одной из плоскостей, проходящих через этот общий перпендикуляр (рис. 32). Отсюда вытекает, что при $r=1$ угол между двумя плоскостями α и β (рис. 33) равен расстоянию между точками A и B их пересечения с их общим перпендикуляром, а также равен расстоянию между полюсами Q и R этих плоскостей. Последний факт показывает, что плоскости неевклидова пространства Римана находятся во взаимно однозначном соответствии с его точками—полюсами этих плоскостей, причем углы между плоскостями равны расстояниям между

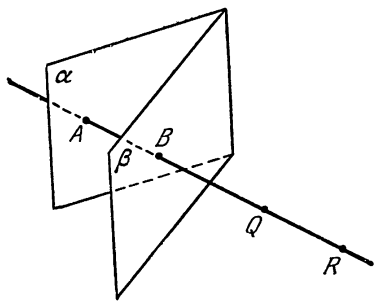


Рис. 33.

соответствующими точками. Таким образом, *плоскости неевклидова пространства Римана, если считать углы между ними расстояниями, образуют модель того же пространства*; отсюда естественно вытекает, что и в пространственной неевклидовой геометрии Римана имеет место своеобразный принцип двойственности. Общий перпендикуляр двух плоскостей и линия их пересечения называются *взаимными полярами*; каждая из этих двух прямых является множеством всех точек, отстоящих одна от другой на расстоянии $\pi r/2$; полюс всякой плоскости, проходящей через одну из этих прямых, лежит на другой из них. Отсюда вытекает, что всякий перпендикуляр к прямой пересекается с ее полярой, а общий перпендикуляр двух прямых пересекается с полярами обеих этих прямых. Из свойств двумерных плоскостей четырехмерного пространства (см. стр. 369) следует, что две прямые неевклидова пространства Римана в общем случае обладают двумя общими перпендикулярами, на одном из которых осуществляется максимальное, а на другом — минимальное расстояние между ними; в том же случае, если эти расстояния равны, прямые обладают бесконечным множеством общих перпендикуляров равной длины. В последнем случае прямые называются *паратактичными*. Через каждую точку A пространства, не лежащую на прямой a и на ее поляре, можно провести две прямые, паратактичные к данной прямой a (рис. 34): если AP — перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую a, b — поляра этого перпендикуляра, пересекающаяся с прямой A в точке Q, а B и C — такие точки прямой b,

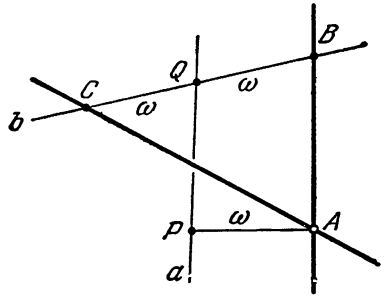


Рис. 34.

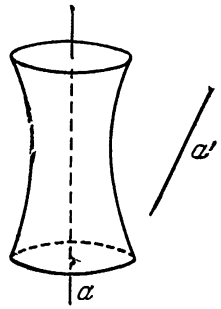


Рис. 35.

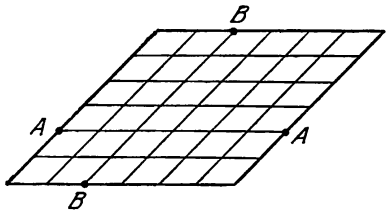


Рис. 36.

что расстояния BQ и CQ равны расстоянию $\omega = AP$, то искомые прямые — AB и AC; нетрудно видеть, что угол BAC равен углу $2\omega/r$. Множество всех точек, отстоящих от прямой a на расстоянии $\rho < \pi r/2$, является поверхностью второго порядка, прямолинейные образующие которой паратактичны прямой a и ее поляре a' (рис. 35); каждая пара прямолинейных образующих разных семейств пересекается под одним и тем же углом $2\omega/r$. Замечательным свойством этой поверхности, открытой английским геометром В. К. Клиффордом, является то, что *на ней господствует евклидова геометрия*: поверхность Клиффорда изометрична евклидову ромбу с острым углом $2\omega/r$ и стороной πr, у которого отождествлены точки противоположных сторон, соединяемые прямыми, параллельными другим сторонам (рис. 36).

§ 3. Псевдоевклидова геометрия

3.1. Псевдоевклидова плоскость. Известно, что в евклидовой плоскости расстояние от начала координат O до точки $M(x, y)$ выражается (в прямоугольных координатах) формулой

$$OM^2 = x^2 + y^2, \tag{15}$$

а расстояние между двумя произвольными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — формулой

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{15а}$$

Далее, угол φ между отрезками OM_1 и OM_2 вычисляется с помощью соотношения

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \tag{16}$$

(ср. стр. 328—330 кн. IV ЭЭМ). Заменим теперь эти формулы следующими:

$$OM^2 = x^2 - y^2, \tag{15′}$$

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2, \tag{15′а}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 - y_1^2}\sqrt{x_2^2 - y_2^2}}. \tag{16′}$$

Иными словами, мы будем рассматривать ту же самую плоскость (с введенной в ней системой координат x, y), но вместо обычной евклидовой метрики введем в ней новые расстояния и углы по формулам (15′), (15′а), (16′).

Расстояние (15′) является положительным действительным числом лишь в случае, если $|x| > |y|$; если же $|x| < |y|$, то расстояние OM мнимо, а если $|x| = |y|$, то расстояние OM равно нулю, хотя точка M и не совпадает с O. Соответственно этому в плоскости с таким определением длин и углов существуют три разных типа прямых: прямые, все отрезки которых имеют положительную действительную длину; прямые, все отрезки которых имеют мнимую длину; прямые, все отрезки которых имеют нулевую длину.

Плоскость, в которой длины определяются формулой (15′) (или (15′а)), в некоторых отношениях очень близка к обычной евклидовой плоскости; однако в ряде отношений она резко отличается от плоскости Евклида. Эту плоскость принято называть *псевдоевклидовой плоскостью*. Так как соответствующая геометрическая схема (отличающаяся, разумеется, от обычной евклидовой геометрии) была впервые развита выдающимся немецким математиком и физиком Германом Минковским, то псевдоевклидову плоскость можно назвать *неевклидовой плоскостью Минковского*.

Все точки M, для которых $OM=0$, удовлетворяют условию

$$x^2-y^2=0, \tag{17}$$

т. е. расположены на двух прямых $y=x$ и $y=-x$ (рис. 37). Координаты всех точек, удаленных от точки O на постоянное расстояние r (т. е. точек, лежащих на *«окружности»* радиуса r с центром в точке O), удовлетворяют уравнению

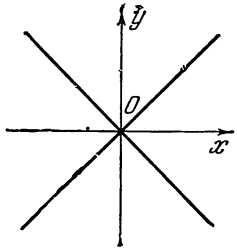


Рис. 37.

$$x^2-y^2=r^2. \tag{18}$$

В случае мнимого радиуса $r=qi$ уравнение (18) можно переписать в виде

$$x^2-y^2=-q^2, \tag{18'}$$

а в случае, когда $r=0$, — в виде (17). Уравнения (18) и (18′) на евклидовой плоскости являются уравнениями гипербол (см. стр. 591 этой книги ЭЭМ). На рис. 38 изображены окружности (18) и (18′).

Ясно, что определяемая по формуле (15′а) *длина отрезка* M_1M_2 равна длине отрезка OM, полученного из отрезка M_1M_2 параллельным переносом. Если длина отрезка OM действительна, то ее можно определить как отношение $\frac{OM}{OM^0}$, где OM^0 — «единичный отрезок» направления OM, т. е. отрезок, определяемый точкой M^0 пересечения прямой OM с «единичной окружностью»

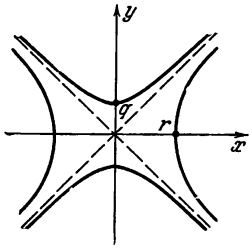


Рис. 38.

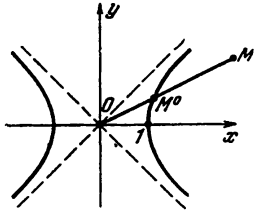


Рис. 39.

$$x^2-y^2=1 \tag{18а}$$

(рис. 39). Величину же отрезка ON мнимой длины можно определить как умноженное на i отношение $\frac{ON}{ON^0}$, где N^0 — точка пересечения прямой ON с «единичной окружностью мнимого радиуса»

$$x^2-y^2=-1. \tag{18'а}$$

Отсюда, в частности, следует, что если из двух параллельных отрезков AB и CD один, скажем, вдвое больше другого в смысле евклидовой геометрии, то и псевдоевклидова длина его будет вдвое бо́льше псевдоевклидовой длины второго отрезка. Однако для отрезков разных направлений отношение их псевдоевклидовых длин вовсе не совпадает с отношением их длин в евклидовой геометрии.

Перейдем теперь к понятию *угла* в псевдоевклидовой геометрии. Найдем по формуле (16) угол φ между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OM}$ с координатами 1, 0 и x, y. В этом случае формулу (16) можно переписать в виде

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}. \qquad (16'')$$

Если $x>0$, $x^2-y^2>0$, то из формулы (16″) следует, что $\cos\varphi > 1$, — получается абсурдный результат с точки зрения евклидовой геометрии, поскольку косинус (вещественного) угла φ не может превосходить 1. Поэтому приходится считать угол φ мнимым: $\varphi = i\psi$; при этом (в соответствии с формулами, обосновываемыми в курсах математического анализа) мы положим $\cos\varphi = \cos(i\psi) = \operatorname{ch}\psi$, где $\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{2}(e^{\psi}+e^{-\psi})$ — функция, называемая *гиперболическим косинусом* угла ψ.

Нетрудно пояснить, с чем связано такое название. Обыкновенный косинус угла φ между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OM}$ можно определить как абсциссу M_0P точки M_0, в которой луч OM пересекается с окружностью $x^2+y^2=1$, имеющей центр O и радиус 1 (рис. 40, *а*);

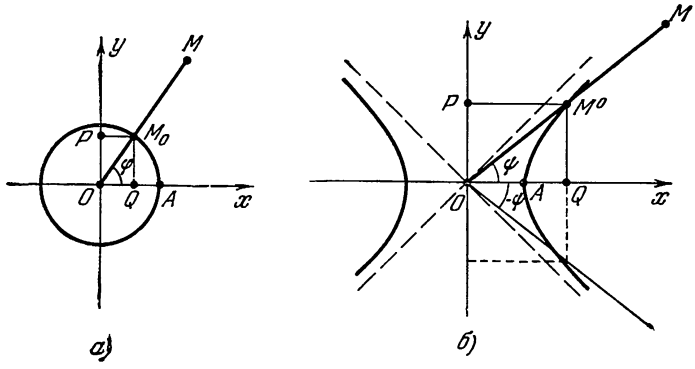


Рис. 40.

с этим обстоятельством связан общеупотребительный термин «круговые функции» для функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ (заметим, что $\sin\varphi$ можно определить как ординату точки M_0). Величина же $x/\sqrt{x^2-y^2}$ (см. формулу (16″)) может быть определена как абсцисса M^0P точки M^0 пересечения луча OM с псевдоевклидовой окружностью, т. е. с гиперболой (рис. 40, *б*). Ординату M^0Q точки M^0 принимают за *гиперболический синус* $\operatorname{sh}\psi = \frac{1}{2}(e^{\psi}-e^{-\psi})$ псевдоевклидова угла ψ между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OM}$. Из рис. 40,*б* сразу следует, что $\operatorname{ch}\varphi \geqslant 1$; при этом $\operatorname{ch}\psi = 1$, лишь если $\psi = 0$, т. е. если луч OM совпадает с лучом OA.

В силу уравнения (18а) «единичной окружности», функции $\operatorname{ch}\psi$ и $\operatorname{sh}\psi$ связаны между собой соотношением

$$\operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi = 1. \tag{19}$$

Это соотношение сохраняет силу и для отрицательных углов $-\psi$, образуемых с лучом OA лучами, получаемыми из OA поворотом в направлении вращения часовой стрелки (здесь мы, как обычно, считаем положительными углы, отсчитываемые в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки). Из рис. 40, *б* видно, что гиперболические функции отрицательных

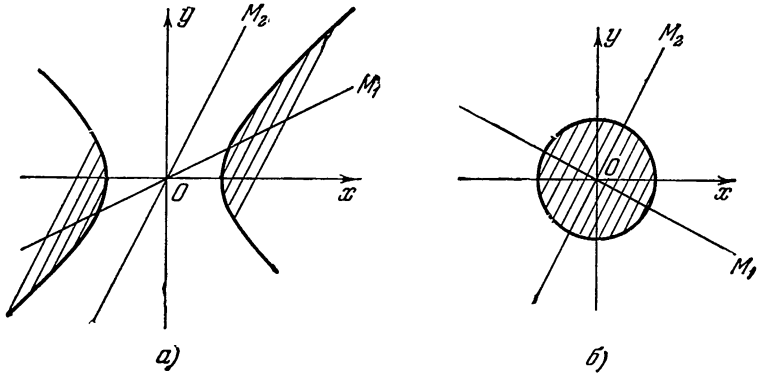


Рис. 41.

углов связаны с функциями положительных углов соотношениями, в точности копирующими соотношения, выполняющиеся для тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch}(-\psi) = \operatorname{ch}(\psi), \qquad \operatorname{sh}(-\psi) = -\operatorname{sh}\psi.$$

Условимся, наконец, считать отрезки OM_1 и OM_2 *перпендикулярными* (в смысле псевдоевклидовой геометрии), если они образуют такой псевдоевклидов угол φ, что $\cos\varphi = 0$, т. е.

$$x_1x_2 - y_1y_2 = 0. \tag{20}$$

Так, например, отрезку OA будет перпендикулярен отрезок OB, где точка B имеет координаты 0, 1. Нетрудно проверить, что перпендикулярные в этом смысле прямые OM_1 и OM_2 будут *сопряжены* относительно псевдоевклидовой окружности (18а), т. е. каждая из них будет делить пополам хорды гиперболы, параллельные другой прямой (рис. 41, *а*). Это обстоятельство подчеркивает близость «псевдоевклидовой перпендикулярности» к обычной перпендикулярности в смысле Евклида: ведь в геометрии Евклида перпендикулярные прямые также сопряжены относительно (евклидовой) окружности (рис. 41, *б*).

Псевдоевклидову геометрию можно определить и чисто аксиоматически. Для этого достаточно взять те же аксиомы 1°—10° и 14°—16°, с помощью которых в статье «Векторы и их применение в геометрии» определялось пространство Евклида (см. стр. 369—370 и 376 кн. IV ЭЭМ), заменив аксиомы 12° и 13°, относящиеся к случаю пространства, следующими характеризующими плоскость аксиомами:

12°а. *В множестве R существуют два линейно независимых вектора*;

13°а. *Всякие три вектора из R линейно зависимы*, а аксиому 11°—следующей аксиомой:

11°а. *В множестве R существуют как векторы* $\boldsymbol{a}$, *для которых* $\boldsymbol{aa} > 0$, *так и векторы* $\boldsymbol{b}$, для которых $\boldsymbol{bb} < 0$.

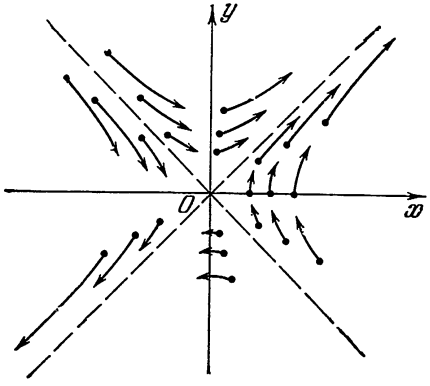


Рис. 42.

3.2. Псевдоевклидовы движения. Примеры теорем псевдоевклидовой геометрии. Преобразования псевдоевклидовой плоскости, сохраняющие (псевдоевклидовы) расстояния между точками, называются (псевдоевклидовыми) *движениями*. Ясно, что каждый параллельный перенос является псевдоевклидовым движением, — ведь если отрезки AB и $A'B'$ получаются один из другого параллельным переносом, то их псевдоевклидовы длины равны.

Наряду с этим псевдоевклидовыми движениями являются «псевдоевклидовы повороты», т. е. преобразования, переводящие точку (x, y) в точку (x', y') по формулам:

$$x' = x \operatorname{ch} \psi + y \operatorname{sh} \psi, \qquad y' = x \operatorname{sh} \psi + y \operatorname{ch} \psi. \tag{21}$$

Это преобразование оставляет на месте точку O; с другой стороны, поскольку

$$x'^2 - y'^2 = (x^2 \operatorname{ch}^2 \psi + 2xy \operatorname{ch} \psi \operatorname{sh} \psi + y^2 \operatorname{sh}^2 \psi) -$$
$$- (x^2 \operatorname{sh}^2 \psi + 2xy \operatorname{ch} \psi \operatorname{sh} \psi + y^2 \operatorname{ch}^2 \psi) = (x^2 - y^2)(\operatorname{ch}^2 \psi - \operatorname{sh}^2 \psi) = x^2 - y^2$$

(см. (19)), то расстояние точки M от точки O при псевдоевклидовом повороте не меняется, т. е. каждая точка M плоскости двигается при этом преобразовании по (псевдоевклидовой) окружности с центром O (рис. 42). Таким образом, с евклидовой точки зрения при преобразовании (21) каждая точка плоскости смещается по гиперболе, в связи с чем это преобразование часто называют *гиперболическим поворотом*.

Наконец, псевдоевклидовым движением является также симметрия

$$x' = x, \qquad y' = -y$$

относительно оси x (ясно, что при этом преобразовании расстояние (15′а) между двумя точками не меняется), а также симметрия

относительно произвольной прямой l (рис. 43), при которой каждая точка A переходит в такую точку A', что отрезок AA' перпендикулярен к l (в смысле псевдоевклидовой геометрии) и делится прямой l пополам.

Псевдоевклидовы движения могут быть использованы для вывода многих геометрических фактов, относящихся к псевдоевклидовой геометрии. Большинство теорем псевдоевклидовой геометрии очень близко к теоремам обычной геометрии Евклида, которые, впрочем, иногда на псевдоевклидовой плоскости своеобразно искажаются. Так, без всяких изменений переносятся в псевдоевклидову геометрию три признака равенства треугольников или теоремы о равнобедренном треугольнике (см. рис. 44, где $AB = AC$; заметьте, что псевдоевклидова симметрия относительно прямой AD — высоты, биссектрисы и медианы треугольника — переводит треугольник ABD в треугольник ACD!). Сохраняются в псевдоевклидовой геометрии и теоремы о замечательных точках треугольника с тем лишь видоизменением, что здесь некоторый угол BAC имеет биссектрису (прямую, образующую р а в н ы е углы с его сторонами) лишь в том случае, если стороны AB и AC угла являются прямыми о д н о г о р о д а (обе с вещественной или обе с мнимой длиной отрезков); поэтому говорить о точке пересечения биссектрис треугольника можно лишь в том случае, если все его стороны — прямые одного рода. Доказательство теорем о точках пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в его серединах, и о точке пересечения биссектрис трех углов треугольника (если все эти биссектрисы существуют) непосредственно переносится в псевдоевклидову геометрию из евклидовой. Еще проще обстоит дело с теоремой о точке пересечения медиан, поскольку псевдоевклидовы медианы треугольника ABC одновременно являются и его евклидовыми медианами (и, значит, наверное пересекаются в одной точке). [Отсюда вытекает также, что *в псевдоевклидовой геометрии медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении* 2:1, *считая от вершины.*] Большинство доказательств теоремы о точке пересечения высот

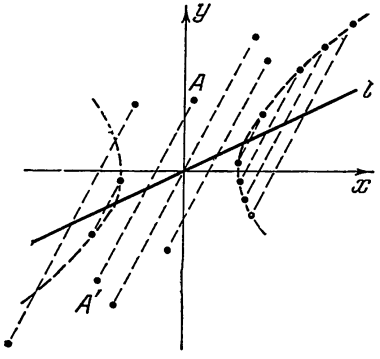


Рис. 43.

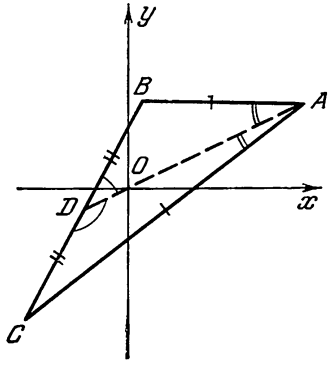


Рис. 44.

треугольника тоже переносится в псевдоевклидову геометрию без всяких изменений. Так, например, из того, что преобразование гомотетии, переводящее треугольник ABC в треугольник DEF, образованный средними линиями треугольника ABC, переводит высоты треугольника ABC в перпендикуляры, восставленные к его сторонам в их серединах, вытекает, что *высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H, лежащей на одной прямой с центром Q описанной вокруг ABC окружности, и с точкой M пересечения его медиан, причем* $HM:MQ=2:1$ (рис. 45). Наконец, из известных свойств гиперболы вытекает, что *если M — произвольная точка* (псевдоевклидовой) *окружности S, а AB — ее диаметр* (хорда, проходящая через центр окружности), *то прямые MA и MB перпендикулярны* (в смысле псевдоевклидовой геометрии;

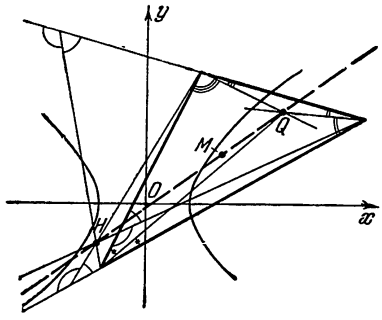


Рис. 45.

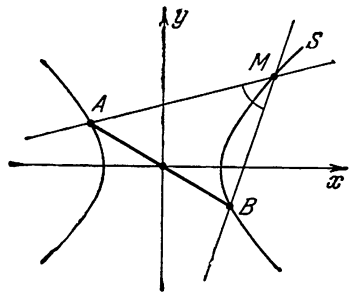


Рис. 46.

рис. 46). Также и более общая теорема евклидовой геометрии: «*множество точек, из которых данный отрезок AB виден под постоянным* (направленным) *углом, представляет собой окружность*» — может быть перенесена в псевдоевклидову геометрию.

Нетрудно доказать в псевдоевклидовой геометрии и т е о р е м у П и ф а г о р а: *если отрезки OM и ON перпендикулярны* (т. е. имеет место равенство (20), где x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты векторов $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$), *то*

$$MN^2=(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2=(x_2^2-y_2^2)+2(x_1x_2-y_1y_2)+$$
$$+(x_1^2-y_1^2)=(x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)=OM^2+ON^2$$

(рис. 47). Заметим только, что при этом, если, скажем, гипотенуза MN и катет OM треугольника имеют вещественную длину, то длина катета ON обязательно окажется мнимой, так что здесь гипотенуза MN будет к о р о ч е катета OM. Последнее обстоятельство можно сопоставить со следующим неожиданным фактом. Если точки A, B и C псевдоевклидовой плоскости принадлежат

одной прямой и точка B лежит между A и C, то, очевидно, $AB+BC=AC$ (рис. 48, *а*). Но если точки A, B и C не лежат на одной прямой и, скажем, все стороны треугольника ABC имеют вещественную длину, то бо́льшая сторона треугольника обязательно будет б о л ь ш е суммы двух других; это легко усмотреть из рис. 48, *б*, где $AB=AB_1$ и $CB=CB_2$.

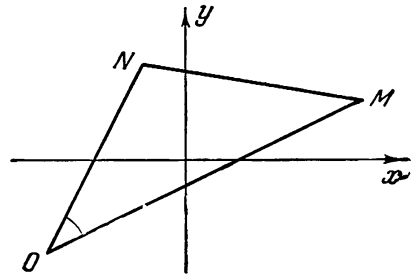


Рис. 47.

Обобщением теоремы Пифагора является т е о р е м а к о с и н у с о в: *для произвольного треугольника ABC*

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot \operatorname{ch} A, \tag{22}$$

где, однако, длины сторон могут быть как действительными, так и мнимыми, а под углом A понимается псевдоевклидов угол между сторонами AB и AC (см. выше, стр. 422). Из этой формулы можно снова вывести, что если все стороны треугольника ABC вещественны, то одна из них обязательно больше суммы двух других; мы предоставляем сделать это читателю.

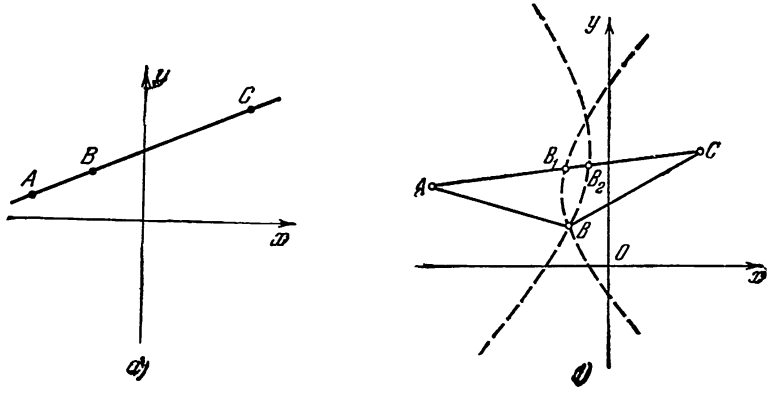


Рис. 48.

3.3. Псевдоевклидово пространство. Изменим теперь закон определения расстояний между точками п р о с т р а н с т в а: будем определять расстояние OM не по формуле (1) (стр. 408), а по формуле

$$OM^2=x^2+y^2-z^2. \tag{1'}$$

Расстояние OM, очевидно, является положительным действительным числом только в том случае, когда $x^2+y^2>z^2$; в случае же, когда $x^2+y^2<z^2$, расстояние OM представляет собой мнимое

число, а в случае, когда $x^2+y^2=z^2$, расстояние OM равно нулю, хотя точка M и не совпадает с точкой O.

Соответственно заменим формулу (3) для определения расстояний между произвольными точками M_1 и M_2 формулой

$$M_1M_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2, \qquad (3')$$

а формулу (4) для углов между отрезками OM_1 и OM_2 — формулой

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2-z_2^2}}. \qquad (4')$$

Пространство, в котором длины и углы определяются формулами (1′), (3′) и (4′), сохраняет много свойств пространства Евклида, но в ряде отношений резко отличается от него. Это пространство называют *псевдоевклидовым пространством*. В псевдоевклидовом пространстве, как видно из определения расстояний в нем, имеется три вида прямых: прямые, все отрезки которых имеют положительную действительную длину; прямые, все отрезки которых имеют мнимую длину, и прямые, все отрезки которых имеют нулевую длину. По причинам, которые будут выяснены в следующем пункте, первые из них называются *пространственноподобными* прямыми, вторые — *времяподобными*, а третьи (т. е. прямые, все отрезки которых имеют нулевую длину) — *изотропными*.

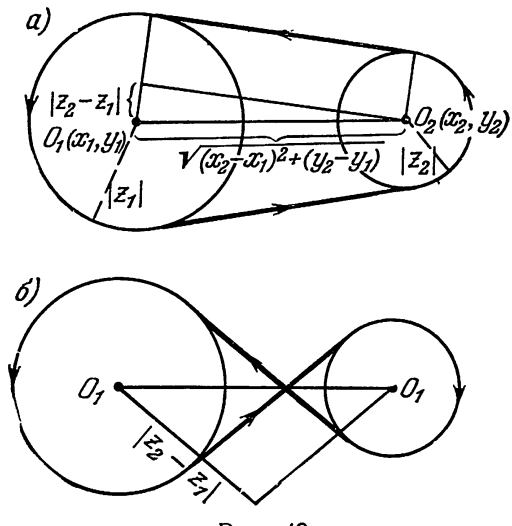


Рис. 49.

Нетрудно построить модель псевдоевклидова пространства на евклидовой плоскости: точки этого пространства изображаются окружностями с некоторым направлением обхода (ср. стр. 480 кн. IV ЭЭМ), причем точка с координатами x, y, z изображается окружностью, центр которой имеет координаты x, y, радиус равен $|z|$, а направление обхода противоположно движению часовой стрелки при $z>0$ и совпадает с направлением движения часовой стрелки при $z<0$. Если мы условимся называть *касательным расстоянием* между такими окружностями расстояние между точками касания этих окружностей и такой их общей касательной, на которой направления обхода окружностей определяют одно и то же направление (см. стр. 485 кн. IV ЭЭМ), то касательное расстояние между окружностями с центрами O_1 и O_2, соответствующими точкам псевдоевклидова пространства $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, равно выражению M_1M_2,

определяемому соотношением (3′) (рис. 49). В том случае, когда расстояние между несовпадающими точками псевдоевклидова пространства равно нулю, отвечающие этим точкам окружности касаются друг друга и направления их обхода определяют на общей касательной одно и то же направление (рис. 50, *а*); в том случае, когда расстояние между точками является мнимым, соответствующие этим точкам окружности не имеют общей касательной, на которой направления обхода окружностей определяли бы одно и то же направление (рис. 50, *б*). На рис. 51, *а—в* изображены в нашей модели три типа прямых псевдоевклидова пространства—с положительной, нулевой и мнимой длиной отрезков.

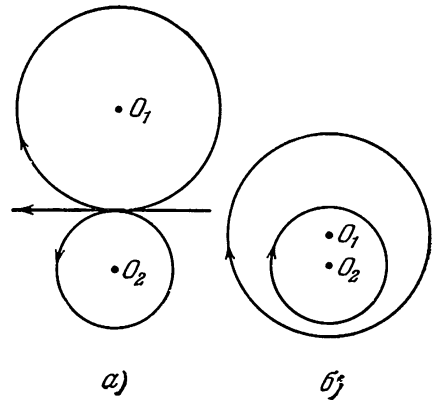


Рис. 50.

Из формулы (1′) вытекает, что все точки M, для которых $OM = 0$, расположены на поверхности, определяемой уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0; \qquad (23)$$

эта поверхность представляет собой конус с вершиной в точке O (рис. 52). Все прямые нулевой длины, проходящие через точку O, представляют собой прямолинейные образующие этого конуса.

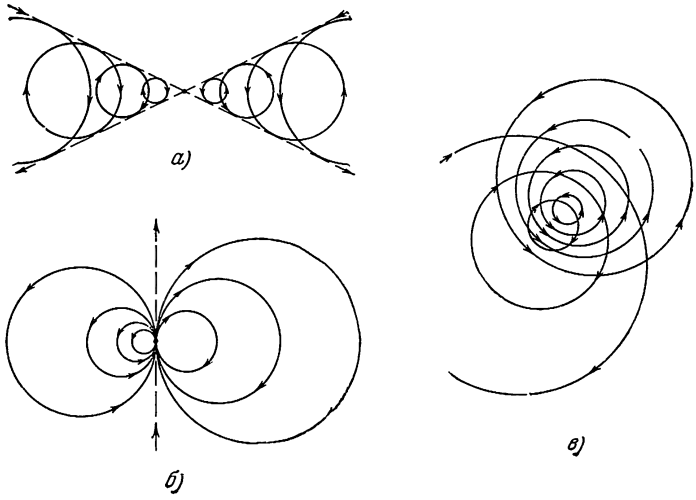


Рис. 51.

Нетрудно проверить, что все прямые действительной длины, проходящие через точку O, расположены вне этого конуса, а прямые мнимой длины, проходящие через точку O, расположены внутри конуса.

В псевдоевклидовом пространстве имеются и три вида плоскостей. Например, среди плоскостей, проходящих через точку O, имеются: плоскости, пересекающие конус (23) только в его вершине (рис. 53, *а*), плоскости, пересекающие конус по двум его прямолинейным образующим (рис. 53, *б*), и плоскости, касающиеся конуса вдоль одной прямолинейной образующей (рис. 53, *в*). В первом случае на плоскости все прямые являются прямыми действительной длины, т. е. геометрия такой плоскости является обычной евклидовой геометрией. Во втором случае через каждую точку плоскости проходят две прямые нулевой длины, разделяющие прямые действительной и мнимой длины, проходящие через эту точку; эта плоскость является *псевдоевклидовой* плоскостью. В третьем случае через каждую точку плоскости проходит единственная прямая нулевой длины, а все остальные прямые такой плоскости — прямые действительной длины; такие плоскости мы будем называть *полуевклидовыми* (ср. ниже, § 5 этой статьи).

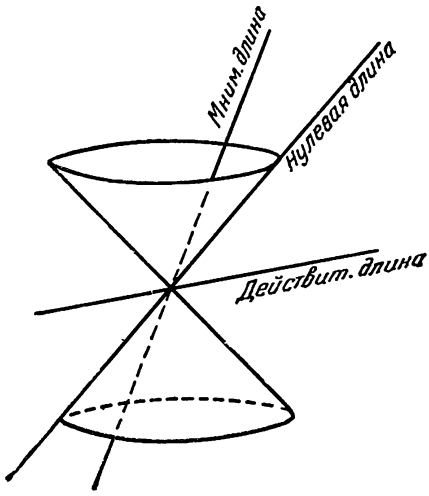


Рис. 52.

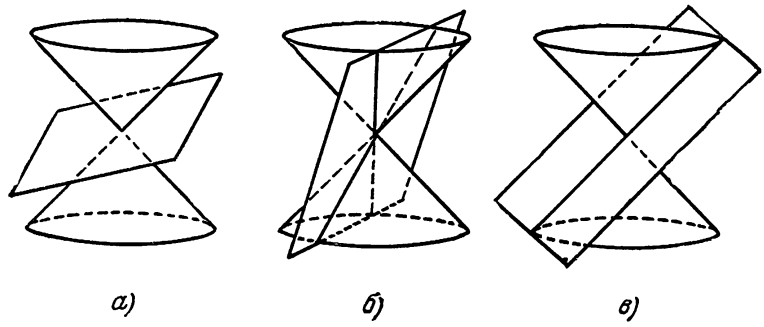


Рис. 53.

Будем называть *сферой* псевдоевклидова пространства множество всех его точек, удаленных от одной точки, называемой центром, на постоянное расстояние, называемое радиусом. Как видно из определения расстояний в псевдоевклидовом пространстве, в этом пространстве имеются три вида сфер: сферы действительного радиуса, сферы мнимого радиуса и сферы нулевого радиуса. В силу соотношения (1′), координаты всех точек

сферы радиуса r с центром в точке O удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2-z^2=r^2. \qquad (2')$$

В случае мнимого радиуса $r=qi$ уравнение (2′) можно переписать в виде

$$x^2+y^2-z^2=-q^2, \qquad (2'')$$

а в случае, когда $r=0$,— в виде (23).

Мы уже видели, что поверхность, определяемая уравнением (23), представляет собой конус. Поверхности, определяемые уравнениями (2′) (при действительном r) и (2″) в евклидовом пространстве, называются *гиперболоидами*; такие поверхности можно получить вращением гиперболы вокруг одной из ее осей симметрии. Поверхности с уравнениями (2′) и (2″) являются соответственно однополостным гиперболоидом (рис. 54, *а*) и двуполостным гиперболоидом (рис. 54, *б*).

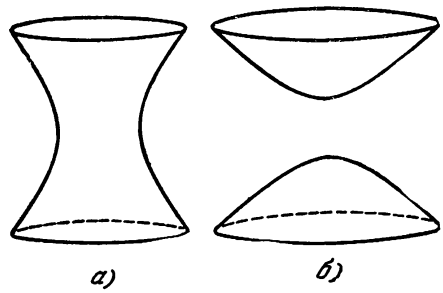


Рис. 54.

Нетрудно проверить, что касательная плоскость к сфере мнимого радиуса является евклидовой плоскостью, касательная плоскость к сфере действительного радиуса является псевдоевклидовой плоскостью, а касательная плоскость к сфере нулевого радиуса (конусу), как мы видели, является полуевклидовой плоскостью. При этом во всех случаях касательная к сфере оказывается перпендикулярной к радиусу, проведенному в точку касания, в том смысле, что радиус перпендикулярен к каждой прямой, лежащей в касательной плоскости. При этом перпендикулярность двух прямых псевдоевклидова пространства, задаваемых векторами $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$, означает равенство нулю «псевдоскалярного произведения»

$$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2$$

этих векторов.

В псевдоевклидовом пространстве (как и в евклидовом) геометрия на сфере в малых ее участках близка к геометрии касательной плоскости сферы. Поэтому геометрия на сфере мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве в малых ее участках близка к геометрии евклидовой плоскости, геометрия на сфере действительного радиуса в этом пространстве в малых ее участках близка к геометрии псевдоевклидовой плоскости, а геометрия на

сфере нулевого радиуса в малых участках близка к геометрии полуевклидовой плоскости.

Роль прямых линий на сферах в псевдоевклидовом пространстве, так же как на сферах в евклидовом пространстве, играют сечения сфер плоскостями, проходящими через центр, которые мы здесь также будем называть *большими окружностями*.

Расстояние между точками M_1 и M_2 сферы в псевдоевклидовом пространстве, измеренное по большой окружности сферы, так же как в евклидовом пространстве, пропорционально углу между отрезками OM_1 и OM_2 и радиусу сферы и определяется по формуле (аналогичной формуле (5))

$$\cos\frac{\omega}{r}=\frac{1}{r^2}(x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2). \tag{5'}$$

В случае сферы мнимого радиуса $r=qi$ эту формулу можно (учитывая, что $\cos\frac{\omega}{qi}=\cos\left(-\frac{\omega}{q}i\right)=\operatorname{ch}\frac{\omega}{q}$) переписать в виде

$$\operatorname{ch}\frac{\omega}{q}=-\frac{1}{q^2}(x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2). \tag{5'a}$$

Будем называть *движением* псевдоевклидова пространства такое отображение его на себя, при котором сохраняются расстояния между его точками, а поворотом вокруг точки — движение, переводящее в себя эту точку. Из того, что при движениях сохраняются расстояния между точками, вытекает что при движениях прямые переходят в прямые. Можно показать, что всякое взаимно однозначное отображение пространства на себя, при котором прямые переходят в прямые, а точка O — в себя, записывается формулами

$$\left.\begin{aligned} x'&=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z,\\ y'&=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z,\\ z'&=\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Для того чтобы отображение (24) пространства на себя было поворотом, оно должно сохранять расстояние OM, т. е., в силу (1'), должно удовлетворять соотношению

$$x^2+y^2-z^2=x'^2+y'^2-z'^2. \tag{25}$$

Требуя, чтобы при отображении (24) выполнялось соотношение (25), мы получим, что девять коэффициентоз α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 связаны шестью соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2=1,\ \beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2=1,\ \gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2=-1,\\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3=0,\ \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2-\alpha_3\gamma_3=0,\\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2-\beta_3\gamma_3=0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Поэтому повороты псевдоевклидова пространства обладают $9-6=3$ степенями свободы.

Простейшим частным случаем поворота псевдоевклидова пространства являются поворот вокруг вертикальной прямой мнимой длины

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi,\\ z' &= z \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

и «гиперболический» поворот вокруг одной из горизонтальных прямых действительной длины, имеющий вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= x,\\ y' &= y\operatorname{ch}\varphi + z\operatorname{sh}\varphi,\\ z' &= y\operatorname{sh}\varphi + z\operatorname{ch}\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{27'}$$

3.4. Геометрические основы специальной теории относительности. Будем характеризовать положение материальной точки в пространстве в данный момент времени пространственными координатами x, y, z и временной координатой t. В классической механике Галилея—Ньютона переход от исходной системы координат x, y, z, t к другой системе, движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, определяется формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \cos\alpha\, vt + a,\\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \cos\beta\, vt + b,\\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z - \cos\gamma\, vt + c,\\ t' &= t + d, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где α, β, γ — углы, составляемые вектором $\boldsymbol{v}$ скорости второй системы отсчета по отношению к первой системе с осями второй системы. В частности, если ограничиться лишь рассмотрением плоских движений, то формулы (28) перехода от одной системы отсчета к другой примут вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi - \cos\alpha\, vt + a,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi - \sin\alpha\, vt + b,\\ t' &= t + d \end{aligned}\right\} \tag{28а}$$

(ср. стр. 109 кн. IV ЭЭМ); если же рассматривать лишь движения материальной точки вдоль одной прямой — оси x, то эти преобразования запишутся так:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt + a,\\ t' &= t + d. \end{aligned} \tag{28б}$$

Формулы (28) — (28б) показывают, что при переходе от одной системы координат к другой системе, движущейся по отношению к ней, пространственные координаты во второй системе выражаются не только через пространственные координаты в первой системе, но и через временну́ю координату в этой системе. Временны́е же координаты во второй системе могут отличаться от временных координат в первой системе только изменением начала отсчета, т. е. время в механике Галилея — Ньютона *абсолютно*.

Механика Галилея — Ньютона хорошо согласуется с экспериментами, в которых фигурируют лишь движения с небольшими скоростями, но при больших скоростях, сравнимых со скоростью света, эта механика заметно расходится с опытными наблюдениями. Так, согласно механике Галилея — Ньютона, если скорость света по отношению к некоторой системе координат равна c, то по отношению к системе координат, движущейся в том же или обратном направлении со скоростью v, эта скорость соответственно должна быть равна $c-v$ или $c+v$. Но, как показывает эксперимент, *скорость света одна и та же во всех системах координат, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно.* Если скорость v во много раз меньше c, то скорости $c+v$ и $c-v$ практически неотличимы от скорости c; но в случае, когда скорость v сравнима со скоростью c, скорости $c+v$ и $c-v$ становится уже невозможно отождествлять со скоростью света c.

Для того чтобы выполнялось условие постоянства скорости света для всех систем координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга, достаточно, чтобы для всех таких систем прямоугольных координат выполнялось соотношение

$$\left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}\right)^2+\left(\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}\right)^2-c^2=$$
$$=\left(\frac{x'_2-x'_1}{t'_2-t'_1}\right)^2+\left(\frac{y'_2-y'_1}{t'_2-t'_1}\right)^2+\left(\frac{z'_2-z'_1}{t'_2-t'_1}\right)^2-c^2,$$

т. е.

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=$$
$$=(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1). \quad (29)$$

Это условие невыполнимо в механике Галилея — Ньютона, где координата t' не может зависеть от координат x, y, z. Для того чтобы удовлетворить этому условию, следует отказаться от понятия об абсолютном времени и принять, что пространство и время — не изолированные друг от друга формы существования материи, а две стороны одной и той же формы существования материи.

Этому условию удовлетворяет механика специальной теории относительности Эйнштейна, дающая при скоростях, сравнимых со скоростью света, значительно большее согласие с практикой, чем механика Галилея—Ньютона. Согласно Эйнштейну, при переходе от одной системы прямоугольных координат к другой такой системе, движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, координаты x, y, z, t преобразуются по закону

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 t + a, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 t + b, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 t + c, \\ t' &= \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 t + d, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

причем выполняется равенство (29).

Если ограничиться лишь движениями в плоскости x, y, то переход от одной системы отсчета к другой, двигающейся относительно нее равномерно и прямолинейно, согласно теории Эйнштейна, выражается формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 t + a, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 t + b, \\ t' &= \alpha_4 x + \beta_4 y + \delta_4 t + d, \end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

причем выполняется равенство

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = \\ = (x'_2 - x'_1) + (y'_2 - y'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1). \tag{29'}$$

В случае же движений по прямой мы будем иметь формулы

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \delta_1 t + a, \\ t' &= \alpha_4 x + \delta_4 t + d, \end{aligned}\right\} \tag{30''}$$

где должно быть

$$(x_2 - x_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2. \tag{29''}$$

Поэтому положение материальной точки на прямой в разные моменты времени в рамках специальной теории относительности естественно сопоставлять с точками псевдоевклидовой плоскости (x, t), в которой расстояния между точками определяются формулой

$$M_1 M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2. \tag{31}$$

Аналогично этому положение движущихся точек на плоскости сопоставляется с точками псевдоевклидова пространства, в котором расстояние определяется формулой

$$M_1 M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2. \tag{31'}$$

Наконец, если мы по аналогии с четырехмерным евклидовым пространством определим четырехмерное псевдоевклидово пространство, в котором расстояние M_1M_2 между точками $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ определяется по формуле

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (31'')$$

(ср. с формулой (12б), стр. 417), то мы сможем считать четырехмерное пространство, точки которого изображают положения материальных точек в пространстве в разные моменты времени, четырехмерным псевдоевклидовым пространством. Различным системам отсчета (двигающимся равномерно и прямолинейно друг относительно друга) будут в этом псевдоевклидовом четырехмерном пространстве соответствовать различные ортогональные системы координат.

В том случае, когда расстояние M_1M_2 действительно, существует такая система координат, в которой точки M_1 и M_2 одновременны, т. е. имеют такие координаты $(x_1^*, y_1^*, z_1^*, t_1^*)$ и $(x_2^*, y_2^*, z_2^*, t_2^*)$, что $t_1^* = t_2^*$, и расстояние M_1M_2 равно обычному расстоянию между точками (x_1^*, y_1^*, z_1^*) и (x_2^*, y_2^*, z_2^*) в соответствующей системе отсчета.

В том случае, когда M_1M_2 чисто мнимо, существует такая система координат, в которой эти точки имеют одинаковые пространственные координаты x, y, z, и расстояние M_1M_2 равно $ic(t_2 - t_1)$, где t_1 и t_2 — временны́е координаты точек M_1 и M_2 в этой системе. В том случае, когда $M_1M_2 = 0$, точки M_1 и M_2 можно соединить лучом света (в любой системе отсчета!).

Преобразования (30), для которых выполняется равенство (29), называются *преобразованиями Лоренца*. Преобразования (30′), удовлетворяющие условию (29′), и преобразования (30″) (при условии (29″)) также можно рассматривать как (четырехмерные) преобразования Лоренца, если присоединить к соотношениям (30′) дополнительное равенство $z' = z$ (означающее, что движение происходит в плоскости $z = \text{const}$), а к соотношениям (30″) — равенства $z' = z$, $y' = y$ (т. е. считать, что движение происходит вдоль прямой $y = \text{const}$, $z = \text{const}$).

Поскольку физический смысл, согласно принципу относительности Эйнштейна, имеют лишь те факты, которые одинаково записываются во всех инерциальных (движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно) системах отсчета, то все предложения кинематики теории относительности можно интерпретировать как предложения псевдоевклидовой геометрии (изучающий те свойства фигур и тел, которые являются одинаковыми для «равных» фигур, т. е. фигур, которые переводятся одна в другую «псевдоевклидовыми движениями», роль которых играют преобразования

Лоренца). Это обстоятельство раскрывает глубокую связь между релятивистской (т. е. подчиняющейся законам теории относительности) механикой и псевдоевклидовой геометрией — связь, которая впервые была обнаружена Г. Минковским, именно на этом пути пришедшим к понятию псевдоевклидова пространства. В указанной в списке литературы книге [14] читатель сможет найти многочисленные примеры использования геометрических соображений (по существу связанных именно с псевдоевклидовой геометрией) к истолкованию основных физических особенностей теории Эйнштейна.

Преобразования (30″) сохраняют «псевдоевклидово расстояние» $OM^2 = x^2 - (ct)^2$; поэтому они совпадают с «псевдоевклидовыми поворотами» (21):

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch}\psi + ct \operatorname{sh}\psi, \\ ct' &= x \operatorname{sh}\psi + ct \operatorname{ch}\psi \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch}\psi + ct \operatorname{sh}\psi, \\ t' &= \frac{x}{c} \operatorname{sh}\psi + t \operatorname{ch}\psi. \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

При этом для точки $x' = 0$ (начала движущейся системы отсчета) мы имеем:

$$x \operatorname{ch}\psi + ct \operatorname{sh}\psi = 0, \quad \text{или} \quad \frac{x}{t} = -c\frac{\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}\psi} = -c \operatorname{th}\psi,$$

где, как обычно, положено $\operatorname{th}\psi = \dfrac{\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\psi}$. Таким образом, обнаружен физический смысл угла ψ, образованного с осью Ox линией, изображающей на плоскости x, t путь точки O' — начала системы отсчета x', t'; этот угол определяется формулой

$$\operatorname{th}\psi = -\frac{v}{c},$$

где $v = \dfrac{x}{t}$ — скорость новой системы отсчета по отношению к старой.

Разделив обе части формулы (19) (стр. 423) на $\operatorname{ch}^2\psi$, мы получим:

$$1 - \operatorname{th}^2\psi = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\psi},$$

откуда

$$\operatorname{ch}^2\psi = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2\psi}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\psi}};$$

далее,

$$\operatorname{sh}\psi = \operatorname{th}\psi \operatorname{ch}\psi = \frac{\operatorname{th}\psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\psi}}.$$

Поэтому если $\operatorname{th}\psi = -\frac{v}{c}$, то

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{sh}\psi = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и, следовательно, формулы (21′) можно переписать следующим образом:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{21a}$$

Именно в этом виде записывали преобразования Лоренца классики теории относительности.

В заключение сделаем еще одно замечание. Пусть относительно первой системы отсчета вторая движется со скоростью v_1, а относительно второй третья система отсчета движется в том же направлении со скоростью v_2. В классической механике делается в этом случае вывод, что третья система движется относительно первой со скоростью $v_1 + v_2$. Посмотрим, к каким результатам приводят формулы теории относительности. Мы можем ограничиться при этом рассмотрением псевдоевклидовой плоскости x, t. Обозначим псевдоевклидовы углы, соответствующие рассмотренным движениям, через ψ_1 и ψ_2:

$$\operatorname{th}\psi_1 = -\frac{v_1}{c}, \qquad \operatorname{th}\psi_2 = -\frac{v_2}{c}.$$

Так как движения происходят в одну сторону, то и углы ψ_1, ψ_2 имеют одинаковое направление на псевдоевклидовой плоскости, т. е. переход от первой системы к третьей соответствует псевдоевклидову углу $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Поэтому скорость движения v третьей системы относительно первой находится следующим образом:

$$\frac{v}{c} = -\operatorname{th}\psi = -\operatorname{th}(\psi_1 + \psi_2).$$

Воспользовавшись известной (и легко получаемой) [1]) формулой для тангенса гиперболической суммы двух углов, имеем далее:

$$\operatorname{th}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{th}\alpha + \operatorname{th}\beta}{1 + \operatorname{th}\alpha \operatorname{th}\beta}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{v}{c} = -\frac{\operatorname{th}\psi_1 + \operatorname{th}\psi_2}{1 + \operatorname{th}\psi_1 \operatorname{th}\psi_2} = -\frac{\frac{v_1}{c_1} - \frac{v_2}{c_2}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{32}$$

[1]) См., например, В. Шерватов, Гиперболические функции, М., Физматгиз, 1958.

Эта формула показывает, что, даже складывая направленные по одной прямой скорости, сколь угодно мало отличающиеся от скорости света, мы не получим скорости, большей скорости света: подставляя в нее значения $\frac{v_1}{c}=\frac{v_2}{c}=\frac{n-1}{n}$, мы получим: $\frac{v}{c}=$ $=\frac{2n(n-1)}{2n(n-1)+1}<1$; если же, скажем, $v_1=c$, то, каково бы ни было v_2,

$$v=\frac{c+v_2}{1+\frac{v_2}{c}}=c. \tag{33}$$

§ 4. Неевклидова геометрия Лобачевского

4.1. Связь псевдоевклидовой геометрии с планиметрией Лобачевского. Геометрия Лобачевского обычно определяется как такая аксиоматическая система, в которой выполняются все аксиомы геометрии Евклида, кроме аксиомы параллельности, а последняя заменяется аксиомой Лобачевского: *через точку вне прямой можно провести* (в плоскости этих точки и прямой) *более одной прямой, не пересекающей данную прямую.* Мы, однако, дадим здесь другое описание геометрии Лобачевского. Именно по аналогии с построением неевклидовой геометрии Римана как геометрии на поверхности сферы евклидова пространства мы рассмотрим геометрию, которая возникает на каждой из полостей сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве (см. рис. 54, *б*), если принять за «прямые» полученной таким образом геометрии «большие окружности» этой сферы, т. е. сечения ее плоскостями, проходящими через центр сферы, а под «расстоянием» между двумя точками понимать (псевдоевклидову) длину соединяющей их дуги «большой окружности». Эту геометрию мы и будем называть (плоской) *неевклидовой геометрией Лобачевского*; под плоскостью Лобачевского мы будем понимать одну полу сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве. [Ограничение одной полой сферы можно понимать как отождествление точек плоскости Лобачевского с парами диаметрально противоположных точек сферы (обязательно принадлежащих разным полостям сферы); ср. выше, стр. 406.]

Для того чтобы убедиться в том, что в определенной таким путем геометрической системе выполняется аксиома Лобачевского, достаточно спроектировать из центра сферы (2″) мнимого радиуса qi верхнюю полусферу на (евклидову) плоскость $z=q$, касающуюся сферы в точке $(0, 0, q)$ (рис. 55). Точки плоскости Лобачевского перейдут при этом в точки круга, высекаемого из нашей плоскости конусом (23), а прямые, т. е. сечения полусферы плоскостями,

проходящими через точку O, — в х о р д ы круга. Рис. 56 показывает теперь, что через точку A плоскости Лобачевского, не принадлежащую прямой a, можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих a; если прямую a изображает хорда BC на рис. 56, то в с е хорды, проходящие через точку A вне угла BAC, не пересекают хорду BC.

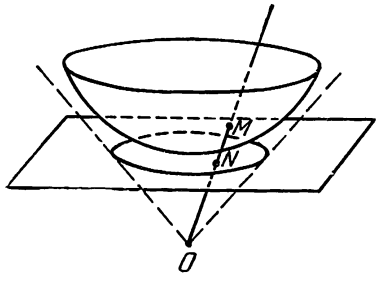


Рис. 55.

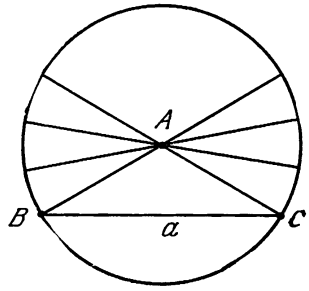


Рис. 56.

Это же отображение плоскости Лобачевского на евклидов круг показывает, что *в м а л о м плоскость Лобачевского устроена так же, как евклидова*: ведь геометрия малых областей сферы мало отличается от геометрии, господствующей на касательной плоскости этой сферы.

Проверим, что те из аксиом 1°—17° (см. стр. 33—37 кн. IV ЭЭМ), которые относятся к планиметрии, выполняются на каждой из полостей сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, если считать прямыми линиями ветви больших окружностей этой сферы. Большие окружности на сферах псевдоевклидова пространства, так же как на сферах евклидова пространства, пересекаются в парах диаметрально противоположных точек сферы; однако в случае сферы мнимого радиуса диаметрально противоположные точки сферы находятся обязательно на разных полостях. Поэтому в том случае, когда две прямые линии плоскости Лобачевского пересекаются, они обязательно имеют только о д н у общую точку.

Из аксиом принадлежности 1°—8° к планиметрии относятся аксиомы 1°—3°. Аксиома 1° выполнена, так как через всякие точки A и B сферы мнимого радиуса и ее центр O проходит единственная плоскость, высекающая из нашей полости ветвь большой окружности. Аксиома 2° выполнена, так как на каждой ветви большой окружности сферы мнимого радиуса всегда можно указать две точки. Аксиома 3° выполнена, так как на полости сферы мнимого радиуса всегда можно указать три точки, лежащие на плоскости, не проходящей через центр сферы, и поэтому не лежащие на большой окружности. Выполнение аксиом порядка 9°—11° становится очевидным, если использовать указанную выше проекцию полости сферы мнимого радиуса из ее центра на касательную к сфере евклидову плоскость (см. рис. 55, 56). В самом деле, при этом ветви больших окружностей спроектируются в хорды круга, в точки которого перейдут точки плоскости Лобачевского [1]), а для хорд круга евклидовой плоскости аксиомы 9°—11°, оче-

[1]) При этом окружность рассматриваемого круга (а значит, и концевые точки хорд) н е п р и н а д л е ж и т рассматриваемой модели.

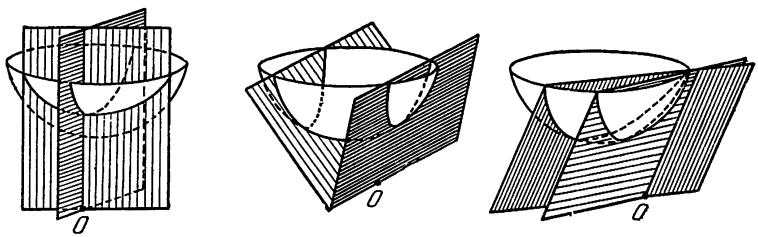
видно, выполняются. Аксиомы движения 12°—15° также будут выполнены, если условиться называть движениями повороты сферы мнимого радиуса. Выполнение аксиом непрерывности 16° и 17° также становится очевидным при указанном проектировании, так как они выполняются для хорд круга.

Точки плоскости Лобачевского можно характеризовать координатами x, y, z соответствующих точек сферы мнимого радиуса; при этом естественно считать, что $M(x, y, z)$ и $M_1(-x, -y, -z)$ — это диаметрально противоположные точки сферы, но одна точка плоскости Лобачевского. *Расстояние* M_1M_2 между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ плоскости Лобачевского определяется по формуле (5′а) (стр. 432), в которой всегда можно достичь того, чтобы правая часть этой формулы была положительна: для этого может лишь понадобиться умножить координаты x_1, y_1, z_1 или x_2, y_2, z_2 на —1. Поэтому расстояние ω между точками M_1 и M_2 плоскости Лобачевского можно вычислить, по формуле

$$\operatorname{ch}\frac{\omega}{q} = \frac{1}{q^2}\,|\,x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2\,|. \tag{34}$$

Наша модель показывает, что плоскость Лобачевского в любом направлении простирается в бесконечность, а в малых участках ее геометрия близка к геометрии евклидовой плоскости.

4.2. Примеры теорем геометрии Лобачевского. Так как прямые плоскости Лобачевского соответствуют большим окружностям сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, то эти прямые

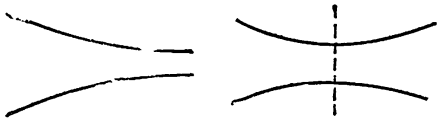


а) *б)* *в)*

Рис. 57.

можно также сопоставить псевдоевклидовым плоскостям, проходящим через центр сферы мнимого радиуса и высекающим из нее большие окружности. В том случае, когда две прямые плоскости Лобачевского пересекаются в некоторой точке этой плоскости, соответствующие псевдоевклидовы плоскости пересекаются по прямой мнимой длины, соединяющей центр сферы с точкой сферы, соответствующей точке пересечения данных прямых (рис. 57, *а*). Однако две псевдоевклидовы плоскости в псевдоевклидовом пространстве пересекаются не обязательно по прямой мнимой длины; они

могут пересекаться и по прямой действительной длины (рис. 57, *б*), и по прямой нулевой длины (рис. 57, *в*). В этих случаях соответствующие этим плоскостям прямые плоскости Лобачевского уже не имеют общих точек. Разница между этими случаями состоит в том, что в первом случае две прямые плоскости Лобачевского не пересекаются и не могут быть получены предельным переходом из пересекающихся прямых, а во втором случае две прямые, хотя и не пересекаются, но могут быть получены предельным переходом из пересекающихся прямых (для чего достаточно так изменять пересекающиеся прямые, чтобы времяподобная прямая пересечения отвечающих им плоскостей стремилась к изотропной прямой). Так как параллельные прямые плоскости Евклида не пересекаются, но могут быть получены предельным переходом из пересекающихся прямых, то *параллельными прямыми* плоскости Лобачевского естественно называть только такие непересекающиеся прямые, которые можно получить предельным переходом из пересекающихся. Непересекающиеся прямые плоскости Лобачевского, которые нельзя получить предельным переходом из пересекающихся, называют *расходящимися прямыми*. В тех случаях, когда расположение прямых в неевклидовой геометрии Лобачевского хотят схематически изобразить чертежом на евклидовой плоскости, параллельные и расходящиеся прямые изображают кривыми линиями (рис. 58, *а*, *б*), поскольку на евклидовой плоскости не существует двух разных типов пар непересекающихся прямых.



а) *б)*

Рис. 58.

Так как на псевдоевклидовой плоскости псевдоевклидова пространства через каждую точку проходят две прямые нулевой длины, то через диаметр сферы мнимого радиуса, не лежащий в данной псевдоевклидовой плоскости, проходящей через ее центр, можно провести две плоскости, пересекающиеся с этой псевдоевклидовой плоскостью по прямым нулевой длины. Поэтому *через точку, лежащую вне прямой на плоскости Лобачевского, можно провести две прямые этой плоскости, параллельные данной прямой* (на рис. 56 прямые, проходящие через точку A параллельно прямой a, изображаются хордами AB и AC).

Можно показать, что при предельном переходе, при котором пересекающиеся прямые плоскости Лобачевского переходят в параллельные прямые, угол между пересекающимися прямыми стремится к нулю. Расстояние между точками двух параллельных прямых в «направлении параллельности» (т. е. в направлении к линии пересечения соответствующих этим прямым псевдоевклидовых плоскостей)

также стремится к нулю: *в направлении параллельности параллельные прямые неограниченно приближаются друг к другу*, подобно гиперболе и ее асимптоте (рис. 58, *а*). В направлении же, противоположном направлению параллельности, параллельные прямые неограниченно расходятся, т. е. расстояния между их точками растут.

Две параллельные прямые, проведенные через точку плоскости Лобачевского к прямой, не проходящей через эту точку, отделяют проходящие через данную точку прямые, пересекающиеся с данной прямой, от прямых, расходящихся с ней (рис. 59).

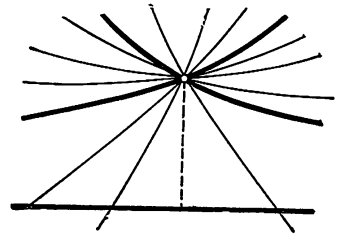


Рис. 59.

Две расходящиеся прямые a и b плоскости Лобачевского всегда обладают общим перпендикуляром p (рис. 58, *б*). Этому перпендикуляру соответствует псевдоевклидова плоскость П, проходящая через центр сферы мнимого радиуса перпендикулярно к прямой действительной длины, по которой пересекаются псевдоевклидовы плоскости α и β, соответствующие прямым *a* и *b* (рис. 60). В самом деле, при симметрии относительно плоскости П как сфера, так и плоскости α и β переходят в себя и углы, под которыми прямые *a* и *b* пересекаются с прямой *p*,

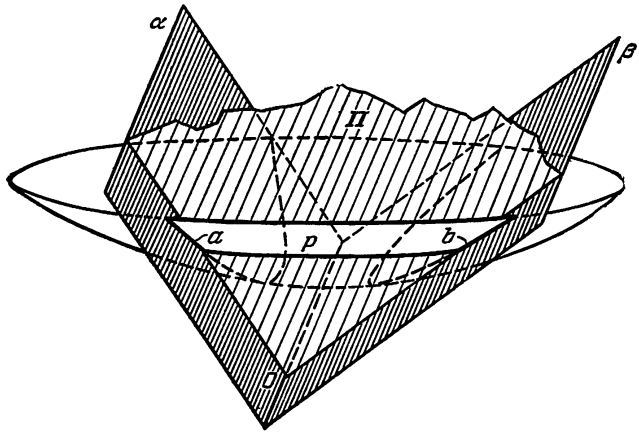


Рис. 60.

соответствующей плоскости П, оказываются равны углам, смежным с ними, т. е. эти углы — прямые. Аналогично доказывается, что *всякие две прямые плоскости Лобачевского, обладающие общим перпендикуляром, расходятся.*

Можно показать, что *расстояние между точками двух расходящихся прямых неограниченно увеличивается по обе стороны от их общего перпендикуляра* (рис. 58, *б*).

Выполнимость на плоскости Лобачевского всех аксиом геометрии Евклида, кроме аксиомы параллельности, обеспечивает справедливость в геометрии Лобачевского весьма многих теорем школьного курса геометрии — всех тех теорем, которые составляют предмет *абсолютной геометрии* (см. выше п. **1.3**). Так, например, здесь также имеют место три классических признака равенства треугольников, теоремы о равнобедренном треугольнике, теоремы о сравнительной длине сторон и углов треугольника (каждая сторона треугольника больше суммы двух других и меньше их разности; против большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона) и т. д.

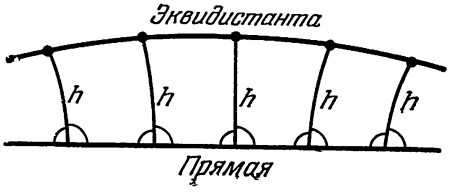


Рис. 61.

С другой стороны, все предложения, равносильные V постулату Евклида, здесь, безусловно, места не имеют. В частности, *в неевклидовой геометрии Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше* π (см. теоремы Лежандра на стр. 398—401). Далее, множество точек, равноудаленных от одной прямой, не представляет собой прямую (рис. 61; это множество точек представляет собой линию, называемую эквидистантой; см. стр. 449). Из сказанного на стр. 402 ясно, что через точку внутри угла не всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны (рис. 62). Отметим еще, что *не через*

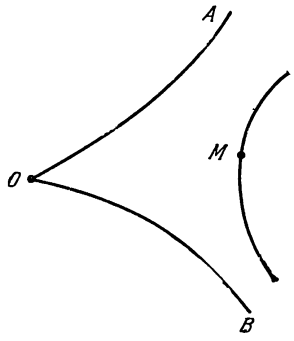


Рис. 62.

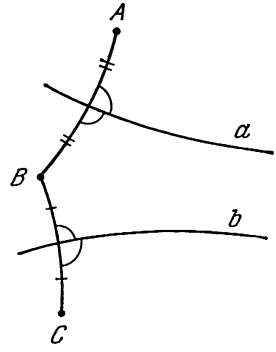


Рис. 63.

всякие три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести окружность (на рис. 63 прямые a и b могут оказаться параллельными или расходящимися; ср. рис. 5 на стр. 397); *в геометрии Лобачевского не существует подобных фигур* и т. д.

Из того, что сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского меньше π (а следовательно, сумма углов n-угольника меньше $(n-2)\pi$; ср. выше, стр. 414), легко вывести «четвертый признак

равенства треугольников»: *два треугольника* здесь *равны, если углы одного соответственно равны углам второго.* В самом деле, совместим углы BAC и $B'A'C'$ двух таких треугольников. Если бы при этом треугольники располагались так, как изображено на рис. 64, *а*, то сумма углов четырехугольника $BCC'B'$ равнялась бы 2π, а если бы они располагались так, как изображено на рис. 64, *б*, то внешний угол треугольника $BB'K$ равнялся бы внутреннему, не смежному с ним (что противоречит известной теореме абсолютной геометрии). Следовательно, эта два треугольника должны совпасть.

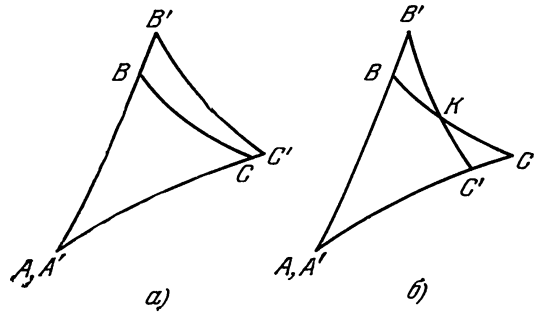


Рис. 64.

Интересно преломляются в геометрии Лобачевского известные теоремы о замечательных точках треугольника. Биссектрисы треугольника здесь по-прежнему пересекаются в одной точке (являющейся центром вписанной окружности), но перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в их середине, могут не пересечься в одной точке, — ведь вокруг треугольника не всегда можно описать окружность! Медианы треугольника здесь по-прежнему всегда пересекаются в одной точке (но, однако, уже не делятся в этой точке в постоянных отношениях), в то время как высоты треугольника могут и не пересекаться в одной точке. [Впрочем, если два перпендикуляра, восставленных к сторонам треугольника в их серединах, или две высоты треугольника пересекаются в одной точке, то и третий перпендикуляр, соответственно высота, также проходят через эту же точку.]

Остановимся, наконец, на вопросе о площади треугольника или многоугольника в неевклидовой геометрии Лобачевского. В точности так же как на стр. 415, показывается, что угловой эксцесс $\varepsilon(M) = A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)\pi$ произвольного n-угольника M здесь удовлетворяет условиям инвариантности и аддитивности. Он, однако, отрицателен; поэтому его следует умножить на -1, т. е. заменить *угловым недостатком* (*дефектом*)

$$\delta(M) = (n-2)\pi - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

Этот *угловой дефект и измеряет площадь* $s(M)$ *многоугольника* M; только в соответствии с выбором единицы измерения площадей его может понадобиться умножить на положительное число k:

$$s(M) = k\delta(M) = k[(n-2)\pi - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)]. \qquad (35)$$

В частности, *площадь треугольника в неевклидовой геометрии Лобачевского вычисляется по формуле*

$$s_{ABC} = k(\pi - A - B - C). \tag{35а}$$

Из этой формулы можно вывести следующее заключение, с первого взгляда представляющееся удивительным. Треугольник на плоскости Лобачевского может иметь сколь угодно большие (линейные) размеры. Однако, так как сумма его углов уже во всяком случае неотрицательна, то *площадь треугольника не может быть сколько угодно большой:* она никогда не превзойдет величины $k\pi$. Площадь $k\pi$ имеют «предельные треугольники», образованные тремя попарно параллельными прямыми (рис. 65), — для такого неограниченного по размерам, но ограниченного по площади «треугольника» все его «углы» можно считать равными 0. Если выбрать единицу измерения площадей так, чтобы площадь «предельного треугольника» была равна π, то *площадь каждого многоугольника будет равна его угловому дефекту.*

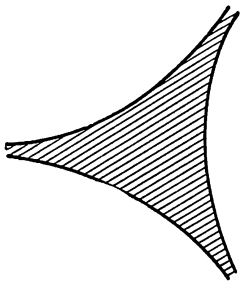


Рис. 65.

Заметим, что формула (35а) может быть получена из формулы (7), если положить $k = q^2$ и $r = qi$.

Закономерность, выражаемая формулой (35а), была найдена еще И. Г. Ламбертом, как одно из следствий невыполнения V постулата. Сопоставляя это с закономерностью (7) для сферических треугольников, Ламберт, называвший гипотезу о невыполнении V постулата «третьей гипотезой», говорил: «Я из этого почти должен был бы сделать заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере». «Мнимая сфера», о которой догадывался Ламберт, и есть та сфера мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, на которой имеет место геометрия Лобачевского.

Скажем еще несколько слов о тригонометрических зависимостях между элементами треугольника в геометрии Лобачевского. Треугольники плоскости Лобачевского можно рассматривать как сферические треугольники на сфере мнимого радиуса. Поэтому тригонометрические соотношения в треугольниках плоскости Лобачевского можно получить по аналогии с формулами евклидовой сферической тригонометрии. Нетрудно проверить, что теорема косинусов (19) кн. IV ЭЭМ (стр. 546), т. е.

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A, \tag{36}$$

теорема синусов (22) кн. IV ЭЭМ (стр. 548), т. е.

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin C}, \tag{37}$$

и двойственная теорема косинусов (37) кн. IV ЭЭМ (стр. 551), т. е.

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\frac{a}{r}, \tag{38}$$

справедливы и для сфер в псевдоевклидовом пространстве, причем в случае сфер мнимого радиуса следует в этих формулах положить $r=qi$. Заменяя в формулах (36), (37) и (38) r на qi и выражая косинусы и синусы мнимых аргументов через гиперболические косинусы и синусы по известным формулам [1])

$$\cos i\psi=\operatorname{ch}\psi,\quad \sin i\psi=i\operatorname{sh}\psi, \tag{39}$$

мы найдем следующие тригонометрические соотношения, связывающие углы и стороны треугольника ABC на плоскости Лобачевского: теорему косинусов

$$\operatorname{ch}\frac{a}{q}=\operatorname{ch}\frac{b}{q}\operatorname{ch}\frac{c}{q}-\operatorname{sh}\frac{b}{q}\operatorname{sh}\frac{c}{q}\cos A, \tag{36'}$$

теорему синусов

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{q}}{\sin A}=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{q}}{\sin B}=\frac{\operatorname{sh}\frac{c}{q}}{\sin C} \tag{37'}$$

и двойственную теорему косинусов

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\operatorname{ch}\frac{a}{q}. \tag{38'}$$

Последняя теорема позволяет определить каждую сторону треугольника по трем его углам, откуда вновь следует, что на плоскости Лобачевского всякие два треугольника с равными углами равны между собой.

Так как геометрия плоскости Лобачевского в малых участках близка к геометрии евклидовой плоскости, то формулы тригонометрии Лобачевского при малых величинах a, b, c, так же как формулы евклидовой сферической тригонометрии, должны переходить в формулы тригонометрии евклидовой плоскости. И в самом деле, при малых значениях x можно заменить $\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$ на x, а $\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ на $1+\frac{x^2}{2}$ или даже на 1 [2]). Но при такой замене формула (36'), так же как формула (36), перейдет в формулу, выражающую евклидову теорему косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \tag{36''}$$

Формула (37'), так же как формула (37), перейдет в формулу, выражающую евклидову теорему синусов

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \tag{37''}$$

а формула (38'), так же как формула (38), перейдет в формулу

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C=-\cos(B+C), \tag{38''}$$

равносильную соотношению $A=\pi-B-C$, или $A+B+C=\pi$.

4.3. Движения и циклы. *Движения* плоскости Лобачевского определяются так же, как движения евклидова пространства. Поэтому всякое движение плоскости Лобачевского задается некоторым вращением сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом прост-

---

[1]) См., например, брошюру В. Г. Шерватова, указанную в сноске на стр. 438.

[2]) См. кн. III ЭЭМ, стр. 447.

ранстве, поскольку это вращение аналогично вращению сферы в евклидовом пространстве и представляет собой отображение сферы на себя, сохраняющее расстояния между ее точками, измеренные по большим окружностям.

Поэтому движения плоскости Лобачевского имеют вид (24), где коэффициенты α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 связаны соотношениями (26) и, следовательно, так же как движения евклидовой плоскости, обладают тремя степенями свободы. Простейшими частными случаями движения плоскости Лобачевского являются движения (27) и (27′), первое из которых называется *поворотом вокруг точки* (соответствующей точке пересечения сферы мнимого радиуса с вертикальной прямой мнимой длины), а второе — *сдвигом вдоль прямой* (соответствующей большой окружности сферы мнимого радиуса, высекаемой из нее псевдоевклидовой плоскостью, перпендикулярной к одной из горизонтальных прямых действительной длины).

Будем называть *циклом* плоскости Лобачевского линию этой плоскости, соответствующую линии пересечения сферы мнимого радиуса с плоскостью, не проходящей через ее центр. В том случае, когда секущая плоскость является евклидовой, цикл называется окружностью. *Окружность является множеством точек плоскости Лобачевского, равноотстоящих от одной точки*: эта точка соответствует точке пересечения сферы мнимого радиуса с перпендикуляром, опущенным из центра сферы на

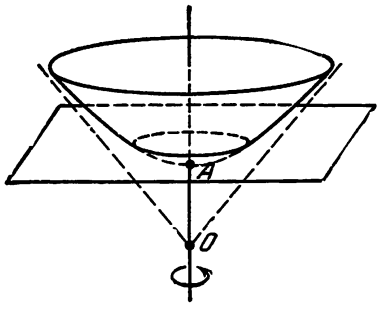


Рис. 66.

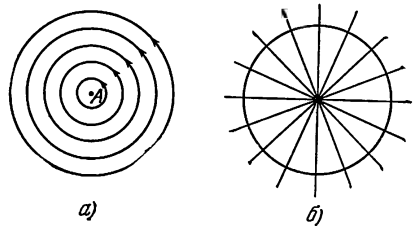


Рис. 67.

рассматриваемую евклидову плоскость (рис. 66; в самом деле, указанный перпендикуляр является прямой мнимой длины, и при повороте вокруг этой прямой и сфера и плоскость, а следовательно, и окружность, переходят в себя).

При повороте плоскости Лобачевского вокруг точки, очевидно, переходят в себя все окружности плоскости Лобачевского с центром в этой точке (рис. 67, *а*). Можно показать, что *окружность пересекает под прямым углом все прямые, проходящие через ее центр* (рис. 67, *б*).

В том случае, когда секущая плоскость является псевдоевклидовой, цикл называется *эквидистантой. Эквидистанта является множеством точек плоскости Лобачевского, равноотстоящих от прямой и расположенных по одну сторону от нее*; эта прямая l (база эквидистанты) соответствует большой окружности сферы мнимого радиуса, высекаемой из нее псевдоевклидовой плоскостью, проведенной через центр сферы параллельно данной псевдоевклидовой плоскости (рис. 68. Перпендикуляр к обеим рассматриваемым плоскостям, проведенный через центр сферы, является прямой действительной длины, и при повороте вокруг этой прямой и сфера и обе плоскости,—а следовательно, прямая l и эквидистанта—переходят в себя). Слово «эквидистанта» происходит от латинского слова aequidistans—«равноотстоящий».

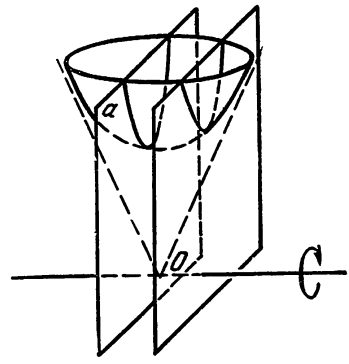


Рис. 68.

При сдвиге плоскости Лобачевского вдоль прямой, очевидно, переходят в себя все эквидистанты, имеющие эту прямую своей базой (рис. 69, *а*). Можно показать, что *эквидистанта пересекает под прямым углом все прямые, перпендикулярные к ее базе* (рис. 69, *б*).

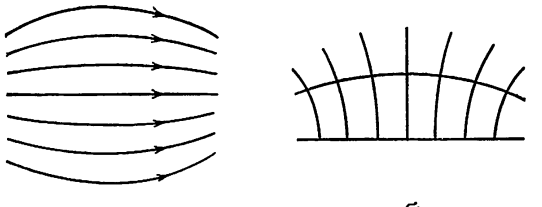


Рис. 69.

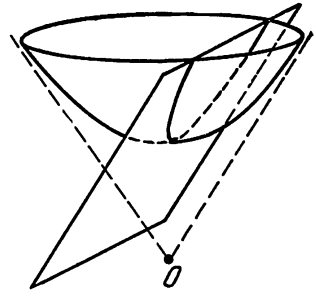


Рис. 70.

Наконец, *предельной линией* или *орициклом* плоскости Лобачевского мы будем называть линию этой плоскости, соответствующую линии пересечения сферы мнимого радиуса с полуевклидовой плоскостью (рис. 70). Слово «орицикл» происходит от греческих слов ὅριος—«предельный» и κίκλος—«круг» и означает «предельный круг». Можно показать, что *орицикл пересекает под прямым углом совокупность прямых, параллельных друг другу* (рис. 71). Название «предельная линия» (орицикл) связано со следующим обстоятельством. Рассмотрим окружности, проходящие через точку A

и касающиеся в этой точке фиксированной прямой a. В евклидовой плоскости при неограниченном увеличении радиуса окружности она будет стремиться к прямой a. На плоскости же Лобачевского окружность при неограниченном увеличении ее радиуса стремится к иной линии — к предельной линии α.

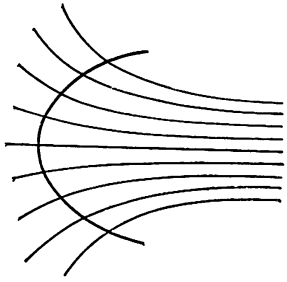


Рис. 71.

Так как через каждые три точки сферы мнимого радиуса проходит плоскость, которая может быть евклидовой, псевдоевклидовой или полуевклидовой, то *на плоскости Лобачевского через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит или окружность, или эквидистанта, или орицикл.*

4.4. Трехмерная геометрия Лобачевского. В п. **3.4** мы определили четырехмерное псевдоевклидово пространство. Полагая в формуле (31″) (стр. 436) $c=1$, мы можем переписать эту формулу в виде

$$M_1M_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-(t_2-t_1)^2. \qquad (31''')$$

Угол φ между отрезками OM_1 и OM_2 в этом пространстве определяется по следующей формуле, аналогичной формуле (4′):

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-t_1t_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2-t_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2-t_2^2}}. \qquad (4'')$$

Для четырехмерного псевдоевклидова пространства можно построить модель в евклидовом пространстве: точки четырехмерного пространства изображаются сферами с заданной стороной поверхности (внешней или внутренней), причем точка, определяемая числами x, y, z, t, изображается сферой, центр которой имеет координаты x, y, z, радиус равен $|t|$, а сторона поверхности — внешняя при $t>0$ и внутренняя при $t<0$. Условимся называть *касательным расстоянием* между такими сферами длину прямолинейной образующей «усеченного конуса», боковая поверхность которого состоит из общих касательных этих сфер и на котором заданные стороны поверхностей сфер определяют одну и ту же сторону поверхности. Тогда касательное расстояние между сферами, соответствующими точкам $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ четырехмерного пространства, равно выражению M_1M_2, определяемому соотношением (31‴). В том случае, когда расстояние между несовпадающими точками четырехмерного пространства равно 0, сферы касаются друг друга и заданные стороны их поверхностей определяют на их общей касательной плоскости одну и ту же сторону; в том же случае, когда расстояние между точками мнимо, сферы не имеют общих касательных указанного вида.

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве определяются прямые, плоскости и гиперплоскости, так же как в четырехмерном евклидовом пространстве. Здесь, так же как в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, имеются три вида прямых — прямые действительной, мнимой и нулевой длины.

Все точки M, для которых $OM=0$, составляют гиперконус, определяемый уравнением

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0. \qquad (40)$$

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве имеется и три вида гиперплоскостей: евклидовы, псевдоевклидовы и полуевклидовы гиперплоскости; евклидовы гиперплоскости, проходящие через точку O, пересекают гиперконус (40) только в его вершине; псевдоевклидовы гиперплоскости, проходящие через точку O, пересекают этот гиперконус по конусу; полуевклидовы гиперплоскости, проходящие через точку O, касаются гиперконуса.

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве определяются также гиперсферы, сферы и окружности — снова, как и в четырехмерном евклидовом пространстве. Здесь, как и в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, имеются три вида гиперсфер: гиперсферы действительного радиуса, состоящие из одной полости, гиперсферы мнимого радиуса, состоящие из двух полостей, и гиперсферы нулевого радиуса, т. е. гиперконусы.

Гиперсфера четырехмерного псевдоевклидова пространства с центром в точке O и радиусом r определяется уравнением

$$x^2+y^2+z^2-t^2=r^2. \tag{9'}$$

В случае мнимого радиуса $r=qi$ уравнение (9′) можно переписать в виде

$$x^2+y^2+z^2-t^2=-q^2. \tag{40'}$$

Касательные гиперплоскости к гиперсферам мнимого радиуса перпендикулярны к прямой мнимой длины и являются евклидовыми гиперплоскостями; касательные гиперплоскости к гиперсферам действительного радиуса перпендикулярны к прямой действительной длины и являются псевдоевклидовыми гиперплоскостями; касательные гиперплоскости к гиперсферам нулевого радиуса являются полуевклидовыми гиперплоскостями. Поэтому геометрия на гиперсфере мнимого радиуса в малых участках близка к геометрии евклидова пространства, геометрия на гиперсфере действительного радиуса в малых участках близка к геометрии псевдоевклидова пространства, а геометрия на гиперсфере нулевого радиуса в малых участках близка к геометрии полуевклидовой гиперплоскости.

Расстояние между точками M_1 и M_2 гиперсферы в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, измеренное по ее большой окружности (сечение плоскостью, проходящей через центр), определяется по формуле

$$\cos\frac{\omega}{r}=\frac{1}{r^2}(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-t_1t_2). \tag{12'}$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы 1°—17° и 18′ пространства Лобачевского выполняются на каждой из полостей гиперсферы мнимого радиуса в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Эта модель показывает, что пространство Лобачевского в любом направлении простирается в бесконечность, а в малых участках его геометрия близка к геометрии евклидова пространства.

Линии пространства Лобачевского, соответствующие большим окружностям гиперсферы мнимого радиуса, будем называть *прямыми* пространства Лобачевского. Аналогично *плоскости* пространства Лобачевского определим как поверхности этого пространства, соответствующие сечениям гиперсферы мнимого радиуса гиперплоскостями, проходящими через ее центр. Очевидно, что плоскости пространства Лобачевского являются плоскостями Лобачевского. Поэтому в пространстве Лобачевского не выполняется V постулат Евклида, а выполняется аксиома Лобачевского.

Поверхности пространства Лобачевского, соответствующие сечениям гиперсферы мнимого радиуса евклидовыми гиперплоскостями, называются *сферами*. Сферу можно определить также как множество точек пространства Лобачевского, равноотстоящих от одной точки. Можно показать,

что сфера пересекает под прямым углом все прямые, проходящие через ее центр, и что геометрия на сфере пространства Лобачевского совпадает с геометрией некоторой сферы пространства Евклида.

Поверхности пространства Лобачевского, соответствующие сечениям гиперсферы мнимого радиуса псевдоевклидовыми гиперплоскостями, не проходящими через ее центр, называются *эквидистантными поверхностями*. Эквидистантную поверхность можно определить также как множество точек пространства Лобачевского, равноотстоящих от одной плоскости (б а з ы) и расположенных по одну сторону от нее (чем и объясняется название этой поверхности). Можно показать, что эквидистантная поверхность пересекает под прямым углом все прямые, перпендикулярные к базе, и что *геометрия на эквидистантной поверхности совпадает с неевклидовой геометрией Лобачевского.*

Поверхности пространства Лобачевского, соответствующие сечениям гиперсферы мнимого радиуса полуевклидовыми гиперплоскостями, называются *орисферами* (т. е. *предельными сферами*). Можно показать, что орисфера пересекает под прямым углом совокупность прямых, параллельных друг другу, и что *геометрия на орисфере совпадает с геометрией евклидовой плоскости.*

Так как через каждые четыре точки гиперсферы мнимого радиуса проходит гиперплоскость, которая может быть евклидовой, псевдоевклидовой и полуевклидовой, то *в пространстве Лобачевского через четыре точки, не лежащие на одной плоскости, проходит или сфера, или эквидистантная поверхность, или орисфера.*

Сферу, эквидистантную поверхность и орисферу можно рассматривать как поверхности вращения: сфера получается при вращении окружности около ее диаметра, эквидистантная поверхность получается при вращении эквидистанты около одного из перпендикуляров к базе, а орисфера получается при вращении орицикла около одной из параллельных прямых, пересекаемых им под прямым углом.

§ 5. Неевклидова геометрия Галилея

5.1. Геометрия Галилея на плоскости. В п. **3.4** мы описали те преобразования, которые определяют переход от одной инерционной системы отсчета к другой в классической механике Галилея—Ньютона. Эти преобразования (см. формулы (28), (28а) и (28б) на стр. 433) носят название *преобразований Галилея.* Преобразования Галилея также можно положить в основу одной интересной неевклидовой геометрии.

Рассмотрим плоскость, отнесенную к координатам (x, t), и условимся называть «движениями» этой плоскости преобразования

$$\begin{cases} x' = x - vt + a, \\ t' = t + d. \end{cases} \tag{28б}$$

Частными случаями этих преобразований являются так называемые «сдвиги»

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ t' = t \end{cases} \tag{41}$$

в направлении Ox, при которых каждая точка M смещается в направлении оси Ox, причем величина смещения пропорциональна расстоянию точки от этой оси, а направление зависит от знака координаты t точки M (рис. 72). Другим частным случаем служат параллельные переносы

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ t' = t + b. \end{cases} \qquad (42)$$

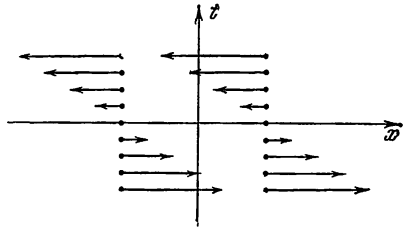


Рис. 72.

Изучение тех свойств фигур, которые сохраняются при преобразованиях Галилея (28б), и представляет предмет *геометрии Галилея*.

За расстояние между двумя точками $M_1(x_1, t_1)$ и $M_2(x_2, t_2)$ в геометрии Галилея естественно принять число

$$d = |t_2 - t_1|, \qquad (43)$$

не меняющееся при преобразованиях (28б); это число можно представлять себе как проекцию отрезка M_1M_2 на ось Ot (рис. 73, *а*). Если $t_1 = t_2$, т. е. $M_1M_2 \| Ox$, то расстояние между

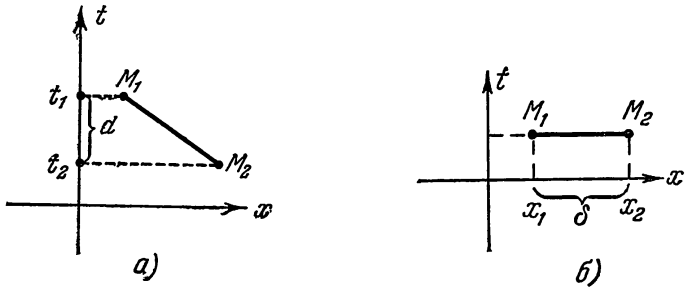


Рис. 73.

точками M_1 и M_2 равно нулю. Этим устанавливается близость плоскости Галилея к «полуевклидовой» плоскости, с которой мы встречались выше (см. стр. 430). Впрочем, в том случае, когда $t_1 = t_2$, расстояние между точками $M_1(x_1, t)$ и $M_2(x_2, t)$ можно задать разностью

$$\delta = |x_2 - x_1| \qquad (44)$$

(рис. 73, *б*), ибо в этом случае

$$|x_2' - x_1'| = |(x_2' - vt + a) - (x_1' - vt + a)| = |x_2' - x_1'|, \qquad (45)$$

т. е. «расстояние» δ сохраняется при «движениях» (28б).

Под «углом» φ между двумя прямыми l_1 и l_2 можно понимать длину M_1M_2 отрезка прямой $t=\text{const}$, высекаемого на этой прямой сторонами угла, если эта прямая удалена на расстояние $d=1$ от вершины M угла (рис. 74); в самом деле, эта длина, очевидно, не меняется ни при параллельных переносах (42), ни при сдвигах (41). Если уравнения прямых l_1 и l_2 имеют вид

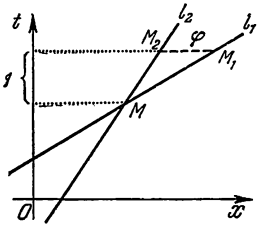


Рис. 74.

$$x=k_1t+b_1 \quad \text{и} \quad x=k_2t+b_2, \tag{46}$$

то можно также написать:

$$\varphi=|k_2-k_1|. \tag{47}$$

Ясно, что если сторона l_2 поворачивается вокруг точки M, стремясь к прямой l_0, параллельной оси Ox, то угол φ, образованный этой прямой с фиксированной прямой l_1, неограниченно увеличивается; поэтому естественно считать, что прямая l_0 образует с любой другой прямой l_1 бесконечно большой угол. Заметим еще, что, в противоположность обычной геометрии Евклида, в геометрии Галилея две прямые l_1 и l_2 образуют лишь один угол, но не два (смежных) угла.

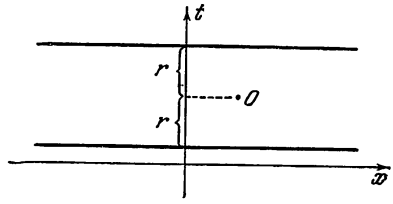


Рис. 75.

Под «окружностью» в геометрии Галилея естественно понимать множество точек, удаленных от фиксированной точки O на постоянное расстояние r; это множество представляет собой пару прямых, параллельных оси Ox (рис. 75). Больший интерес представляет множество точек, из которых данный отрезок AB виден под постоянным (направленным) углом φ. Обозначая координаты точек A и B через (x_1, t_1) и (x_2, t_2) и координату переменной точки M этого множества точек через x_0, t_0, мы получаем, что прямые AM и BM записываются уравнениями

$$x-x_1=\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1}(t-t_1), \text{ или } x=\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1}t+\left(x_1-\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1}t_1\right)$$

и

$$x-x_2=\frac{x_0-x_2}{t_0-t_2}(t-t_2), \text{ или } x=\frac{x_0-x_2}{t_0-t_2}t+\left(x_2-\frac{x_0-x_2}{t_0-t_2}t_2\right).$$

Таким образом, мы приходим к следующему уравнению искомого множества точек (см. формулу (47)):

$$\frac{x_0-x_1}{t_0-t_1}-\frac{x_0-x_2}{t_0-t_2}=\varphi \tag{48}$$

или, заменяя теперь обозначения x_0, t_0 на x, t,

$$x(t-t_2)-x_1(t-t_2)-x(t-t_1)+x_2(t-t_1)=\varphi(t-t_1)(t-t_2),$$

откуда, упрощая, получаем:

$$x(t_1-t_2)=\varphi t^2-[\varphi(t_1+t_2)-(x_1-x_2)]\,t+(t_1t_2-x_1t_2+x_2t_1). \quad (49)$$

Таким образом, при $t_1\neq t_2$ это множество с евклидовой точки зрения представляет собой п а р а б о л у

$$x=At^2+Bt+C$$

$$\left(\text{где } A=\frac{\varphi}{t_1-t_2},\quad B=\frac{(x_1-x_2)-\varphi(t_1+t_2)}{t_1-t_2},\quad C=\frac{t_1t_2+(x_2t_1-x_1t_2)}{t_2-t_1}\right);$$

ось этой параболы параллельна оси Ox. Это множество точек (рис. 76) мы будем называть «циклом».

Геометрия Галилея интересна тем, что все относящиеся к ней понятия и факты могут быть истолкованы на языке классической («ньютоновской») механики и, наоборот, все факты классической механики могут быть пояснены на языке этой неевклидовой геометрии. Так, расстоянию d между двумя точками плоскости Галилея отвечает, очевидно, и н т е р в а л в р е м е н и между соответствующими этим точкам событиями; если же $d=0$ (события одновременны), то для них можно определить расстояние δ — обычное р а с с т о я н и е м е ж д у т о ч к а м и прямой линии. Прямой

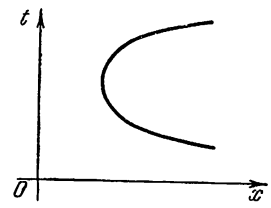


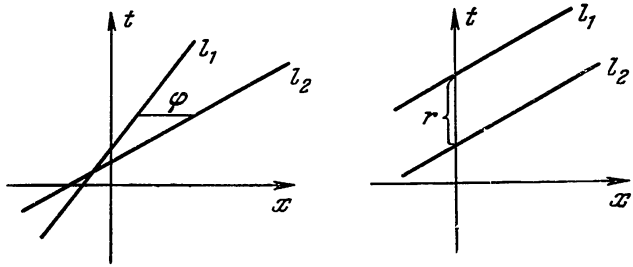
Рис. 76

$$x=kt+b$$

отвечает, очевидно, р а в н о м е р н о е п р я м о л и н е й н о е д в и ж е н и е точки со скоростью k; при этом механический смысл имеет не сама эта скорость k, зависящая от выбора системы отсчета, а лишь разность k_2-k_1 двух скоростей (о т н о с и т е л ь н а я с к о р о с т ь), геометрически совпадающая с углом между изображающими эти движения прямыми. Цикл $x=at^2+bt+c$ отвечает, как нетрудно понять, р а в н о у с к о р е н н о м у (или равнозамедленному) д в и ж е н и ю точки с ускорением a и т. д.

Заметим еще, что наличие в этой геометрии двух видов расстояний между точками тесно связано с тем, что здесь, как и в неевклидовой геометрии Римана, имеет место п р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и, позволяющий переходить от каждого предложения к другому, тоже верному, заменяя слова и выражения «точка», «расстояние», «лежит на» соответственно на «прямая», «угол», «проходит через». В самом деле, в этой геометрии, как и в обычной геометрии Евклида, «мера отклонения двух прямых друг от друга» имеет двойной характер: вообще говоря, она задается углом, но если угол между прямыми можно принять равным нулю — прямые параллельны, то

для них можно определить не угол, а расстояние (рис. 77, *а*, *б*). Аналогично этому для двух точек в геометрии Галилея, вообще говоря, существует расстояние d; однако если $d=0$, то для них можно определить новое «расстояние» δ, более близкое уже не к расстояниям, а к углам (заметим, что, в то время как расстояние d задается отрезком оси t, расстояние δ, как и угол φ, задается отрезком прямой, параллельной оси x).



а) *б)*

Рис. 77.

5.2. Примеры теорем геометрии Галилея. Основные зависимости между элементами треугольника неевклидовой геометрии Галилея имеют чрезвычайно простой вид; укажем их.

Теорема 1. *Во всяком треугольнике ABC бо́льшая сторона равна сумме двух других сторон.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из рис. 78: длины сторон $a=BC$, $b=AC$ и $c=AB$ этого треугольника соответственно равны отрезкам NP, MP и NM оси Ot, откуда следует, что $a=b+c$.

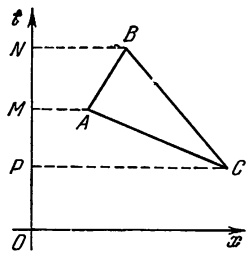


Рис. 78.

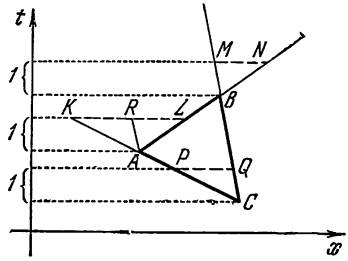


Рис. 79.

Физически эта теорема очевидна: она означает аддитивность отрезков времени, протекших между событиями.

Теорема 2. *Во всяком треугольнике ABC больший угол равен сумме двух других углов.*

Доказательство этой теоремы вытекает из рис. 79. Углы A, B и C этого треугольника соответственно равны KL, MN

и PQ; но прямая, проведенная через вершину A параллельно стороне BC, делит отрезок KL на отрезки $KR = PQ$ и $RL = MN$, откуда следует, что $A = B + C$.

Физический смысл этой теоремы также достаточно прост: если принять, что сторона b треугольника ABC отвечает «покоящейся» системе отсчета (другими словами, если принять эту сторону за ось $x = 0$ или за прямую $x = \text{const}$), а сторона a — «движущейся» системе отсчета, то угол A будет выражать скорость изображаемого стороной c равномерного движения относительно системы b («абсолютная» скорость $v_{\text{абс}}$), а угол B — скорость этого же движения в системе отсчета a («относительная» скорость $v_{\text{отн}}$). А так как угол C выражает скорость движущейся системы отсчета по отношению к неподвижной («переносная» скорость $v_{\text{пер}}$), то мы приходим к классическому закону сложения скоростей:

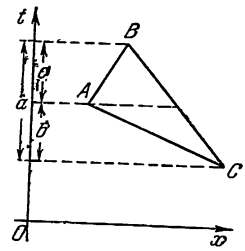


Рис. 80.

$$v_{\text{абс}} = v_{\text{отн}} + v_{\text{пер}}.$$

Теорема 3. *Во всяком треугольнике ABC стороны пропорциональны противолежащим углам*:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

В самом деле, так как углы на плоскости Галилея равны отрезкам, высекаемым сторонами угла на прямых, проведенных параллельно оси Ox на единичном расстоянии от вершины, то углы B и C, высекающие одинаковые отрезки на прямой, проведенной параллельно оси Ox через вершину A (рис. 80), обратно пропорциональны расстояниям c и b вершин B и C от этой прямой.

Очевидно, что каждая из теорем 1 и 2 является следствием другой из этих теорем и теоремы 3.

Из теорем 1 и 2 с очевидностью следует, что ни три стороны, ни три угла не могут однозначно определить треугольник в геометрии Галилея; таким образом, ни третий признак равенства треугольников геометрии Евклида, ни четвертый признак равенства треугольников неевклидовых геометрий Римана и Лобачевского здесь места не имеют. Что же касается первых двух признаков равенства треугольников геометрии Евклида: по двум сторонам и заключенному между ними углу и по двум углам и заключенной между ними стороне, то они, очевидно, сохраняют силу и в геометрии Галилея (только в их доказательстве евклидовы движения придется заменить «галилеевыми» движениями (28б)). Таким образом, если в неевклидовых геометриях Римана и Лобачевского к трем классическим признакам равенства треугольников добавляется еще и четвертый, то в геометрии Галилея число основных признаков равенства треугольников сокращается на один по сравнению с геометрией Евклида.

Геометрия Галилея в пространстве трех и четырех измерений может быть построена аналогично. Например, геометрия Галилея трехмерного пространства (x, y, t) изучает те свойства фигур этого пространства, которые сохраняются при преобразованиях Галилея (28а) (стр. 433). Неевклидова геометрия Галилея четырехмерного «пространства — времени» (x, y, z, t) интересна тем, что с ее помощью можно описать на геометрическом языке все понятия и факты классической механики Ньютона. Мы, однако, не останавливаемся здесь подробнее на этой геометрии, поскольку все ее характерные особенности хорошо видны уже на примере неевклидовой геометрии Галилея на плоскости (x, t).

§ 6. Неевклидовы геометрии и группы преобразований

6.1. Проективные модели геометрий Лобачевского и Римана. Двумерные неевклидовы геометрии Римана и Лобачевского, как мы видели, можно рассматривать как геометрии, возникающие на сферах евклидова и псевдоевклидова пространства при условии отождествления диаметрально противоположных точек этих сфер. Эти геометрии можно также рассматривать как геометрии на *проективной плоскости*. Для этого достаточно спроектировать сферу из ее центра на любую плоскость евклидова или псевдоевклидова пространства, не проходящую через центр сферы, дополнив эту плоскость несобственными («бесконечно удаленными») элементами до проективной плоскости (см. стр. 112—113 кн. IV ЭЭМ). При этом неевклидова плоскость Римана изображается проективной плоскостью целиком, так что плоскость Римана можно себе представлять как метризованную специальным образом проективную плоскость. Плоскость же Лобачевского, напротив, изображается только частью проективной плоскости, высекаемой из нее конусом (23). Проектирование неевклидовой плоскости Римана на проективную плоскость изображено на рис. 81; аналогичное проектирование плоскости Лобачевского встречалось нам раньше и было изображено на рис. 55, где плоскость была расположена таким образом, что конус (23) высекал из нее окружность. При другом расположении плоскости этот конус высекает из нее любое коническое сечение — эллипс, гиперболу или параболу (на рис. 82 изображен случай гиперболы); однако во всех случаях плоскость Лобачевского изображается внутренней областью этого конического сечения. Движения плоскости Лобачевского, роль которых играют повороты сферы мнимого радиуса, переводящие в себя также и

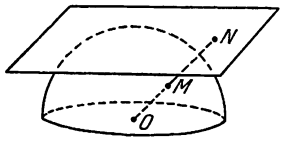


Рис. 81.

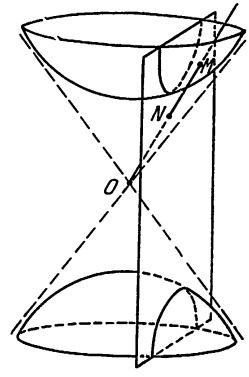


Рис. 82.

конус (23), на проективной плоскости изображаются преобразованиями, переводящими прямые линии снова в прямые («проективными преобразованиями»), при которых коническое сечение переходит само в себя. Модель плоскости Лобачевского внутри круга евклидовой плоскости была предложена Э. Бельтрами; модель плоскости Лобачевского во внутренней области любого конического сечения на проективной плоскости была предложена Ф. Клейном, который (как и все современные ему математики) не обратил должного внимания на конец мемуара Бельтрами, в котором излагалась его модель, и пришел к близким идеям самостоятельно. Ф. Клейн установил, что движения плоскости Лобачевского как в случае Бельтрами, так и в общем случае, изображаются проективными преобразованиями, переводящими в себя коническое сечение. Модель плоскости Лобачевского на проективной плоскости называют моделью (или интерпретацией) Бельтрами—Клейна. Модель неевклидовой плоскости Римана (сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками) на проективной плоскости была предложена А. Кэли, которому принадлежит и гораздо более общая идея «проективного мероопределения»; однако тот факт, что геометрия Лобачевского входит в общую схему мероопределений, определенных Кэли, был установлен только Клейном. Геометрии, которые можно получить, вводя на проективной плоскости метрику указанным Кэли способом, аналогичным построению проективных моделей геометрий Римана и Лобачевского, называют геометриями Кэли—Клейна.

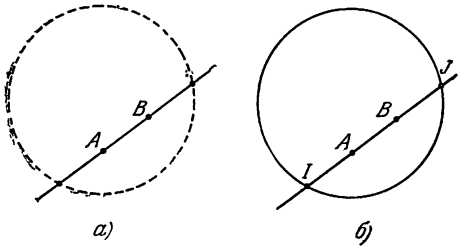


Рис. 83.

Можно показать, что расстояние $\rho(A, B)$ между точками A и B плоскости Лобачевского, изображаемой указанным способом как внутренность конического сечения проективной плоскости (рис. 82,*а*), выражается через двойное отношение $\overline{IJ,AB} = (IA:JA):(IB:JB)$ точек A и B и точек I и J пересечения прямой AB с коническим сечением (рис. 83,*б*) по формуле

$$\rho(A, B) = \frac{q}{2} \ln \overline{IJ, AB}, \tag{50}$$

где ln — натуральный логарифм. Из формулы (50) нетрудно вывести, что если A, B, C — три точки одной прямой и точка B находится между A и C, то

$$\rho(A,C) = \rho(A,B) + \rho(B,C); \tag{51}$$

это следует из того, что в этом случае

$$\overline{IJ,\ AB}\cdot\overline{IJ,\ BC}=\left(\frac{IA}{JA}:\frac{IB}{JB}\right)\cdot\left(\frac{IB}{JB}:\frac{IC}{JC}\right)=\frac{IA}{JA}:\frac{IC}{JC}=\overline{IJ,\ AC}. \qquad (52)$$

6.2. «Общие» геометрии Кэли — Клейна. Наряду с неевклидовыми геометриями Лобачевского и Римана можно указать еще семь других геометрий на плоскости, которые можно получить по общей схеме Кэли — Клейна. К числу этих геометрий относятся и обыкновенная геометрия Евклида, псевдоевклидова геометрия Минковского и неевклидова геометрия Галилея. Еще три новые геометрические схемы мы получим, рассматривая в качестве основного элемента соответствующей геометрии прямые линии обыкновенной плоскости Евклида, псевдоевклидовой плоскости или плоскости Лобачевского; при этом роль «расстояния» играет угол между прямыми. Эти геометрии также вкладываются в общую схему Кэли — Клейна, однако они не представляют особенно большого геометрического интереса — к ним ведь можно прийти от других известных нам геометрий простой заменой слова «прямая» на слово «точка» и слова «угол» — на слово «расстояние». Наконец, последняя, девятая, геометрия Кэли — Клейна на плоскости может быть описана как геометрия, которая возникает на поверхности сферы действительного радиуса псевдоевклидова пространства (рис. 54, *а*) при условии отождествления диаметрально противоположных точек этой сферы. Так как касательные плоскости к сфере действительного радиуса псевдоевклидова пространства являются, как мы отмечали выше, псевдоевклидовыми плоскостями, то соответствующая плоскость Кэли — Клейна в окрестности каждой точки устроена как псевдоевклидова плоскость.

Общая идея Кэли и Клейна заключается в выделении некоторых групп проективных преобразований, которые играют роль «движений» соответствующей геометрии (ср. стр. 101 — 105 кн. IV ЭЭМ). Эта идея может быть реализована и для трехмерного (проективного) пространства, родственного проективной плоскости; в трехмерном пространстве можно определить 27 различных геометрий Кэли — Клейна. В общем же n-мерном пространстве (см. статью «Многомерные пространства» в этой книге ЭЭМ) могут быть определены 3^n различных геометрий Кэли — Клейна. Эти геометрии иногда все называют *неевклидовыми геометриями*; они составляют весьма важный класс рассматриваемых геометрами «пространств», строящихся по аналогии с обычным пространством Евклида.

6.3. Модели Пуанкаре плоских неевклидовых геометрий. Другую модель неевклидовой плоскости Римана на евклидовой плоскости мы получим, если произведем стереографическую проекцию сферы на плоскость (см. стр. 22 — 27 кн. IV ЭЭМ), т. е. проекцию сферы из ее точки S на плоскость, перпендикулярную к радиусу OS. Примем за эту плоскость диаметральную плоскость, перпендикуляр-

ную к радиусу OS (рис. 84); в этом случае точка S будет одним из полюсов большой окружности α, высекаемой рассматриваемой плоскостью из сферы. Если уравнение плоскости имеет вид $z=0$, то окружность α на этой плоскости определяется уравнением $x^2+y^2=r^2$, где r — радиус сферы.

Нетрудно проверить, что диаметрально противоположные точки M и M_1 сферы при стереографической проекции изображаются парой точек, одна из которых находится внутри окружности α, а

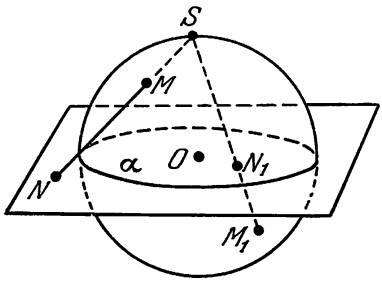


Рис. 84.

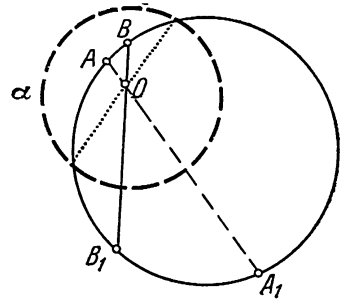


Рис. 85.

другая — вне нее, причем для того, чтобы получить одну точку из другой, следует произвести инверсию или симметрию относительно окружности α (см. стр. 56, кн. IV ЭЭМ), а затем симметрию относительно центра O этой окружности. В силу нашего условия об отождествлении диаметрально противоположных точек сферы, такие пары точек изображают о д н у точку неевклидовой плоскости Римана. На рис. 85 изображены проекции A, A_1 и B, B_1 пар диаметрально противоположных точек сферы. Точки плоскости Римана можно изображать также только точками, находящимися внутри окружности α, и парами диаметрально противоположных точек этой окружности.

В силу свойств стереографической проекции, окружности сферы проектируются в окружности или прямые плоскости. Так как любая большая окружность сферы пересекается с окружностью α в двух диаметрально противоположных точках, то большие окружности сферы и, следовательно, прямые плоскости Римана изображаются на евклидовой плоскости окружностями (или прямыми), пересекающими окружность α в диаметрально противоположных точках (такими, как окружность ABA_1B_1 на рис. 85).

Применяя аналогичную проекцию сферы мнимого радиуса псевдоевклидова пространства из ее точки S на евклидову плоскость, перпендикулярную к радиусу OS, мы получим новое изображение плоскости Лобачевского на евклидовой плоскости. Примем за евклидову плоскость, на которую происходит проектирование, диаметральную плоскость, перпендикулярную к радиусу OS (рис. 86).

Прямые нулевой длины неевклидова пространства, проходящие через точку S, высекают из плоскости окружность ω, причем в этом случае точки одной полости сферы мнимого радиуса изображаются точками, находящимися внутри этой окружности, а точки другой полости изображаются точками, находящимися вне нее.

Если уравнение плоскости имеет вид $z=0$, то окружность ω на этой плоскости определяется уравнением $x^2+y^2=q^2$. Нетрудно проверить, что диаметрально противоположные точки сферы изображаются парами точек, переводящихся друг в друга симметрией относительно окружности — *инверсией* (на рис. 87 изображены две такие пары точек: A, A_1 и B, B_1). Точки плоскости Лобачевского можно изображать также только точками, находящимися внутри окружности ω.

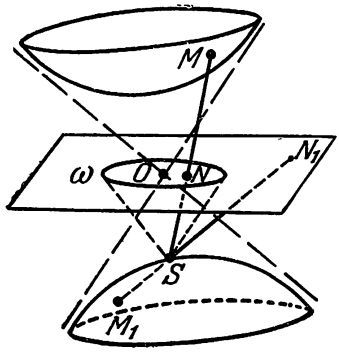


Рис. 86.

Так же как при обычной стереографической проекции, доказывается, что окружности сферы мнимого радиуса проектируются в окружности или прямые на плоскости. Так как любая большая окружность переходит в себя при симметрии относительно центра сферы, то большие окружности сферы мнимого радиуса и, следовательно, прямые плоскости Лобачевского изображаются на евклидовой плоскости диаметрами окружности ω или окружностями, пересекающими окружность ω под прямым углом (на рис. 87 изображена проекция AB прямой плоскости Лобачевского). Эта модель плоскости Лобачевского внутри круга была предложена выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре; поэтому рассматриваемую модель плоскости Лобачевского и аналогичную модель плоскости Римана называют моделями Пуанкаре этих плоскостей.

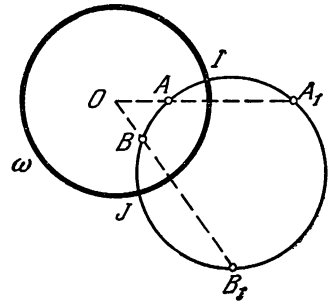


Рис. 87.

Рассмотрим более подробно модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. В этой модели *прямые плоскости Лобачевского изображаются диаметрами круга или дугами окружностей, пересекающих окружность круга под прямым углом.* Очевидно, что пересекающиеся прямые изображаются диаметрами или дугами окружностей, пересекающимися внутри круга; далее параллельные прямые изображаются диаметром и дугой окружности или двумя дугами окружностей, касающимися в точке пересечения с окружностью ω;

наконец, расходящиеся прямые изображаются диаметром и дугой окружности или двумя дугами окружностей, не имеющими общих точек. На рис. 88 изображены пересекающиеся прямые a и b, параллельные прямые b и c и расходящиеся прямые c и d.

Так как окружности, эквидистанты и орициклы плоскости Лобачевского соответствуют окружностям сферы мнимого радиуса, высекаемым из нее плоскостями, не проходящими через ее центр, то в модели Пуанкаре они изображаются хордами круга или дугами окружностей в нем. При этом окружности изображаются окружностями, расположенными внутри круга, орициклы — окружностями, касающимися окружности ω, а эквидистанты — хордами круга или дугами окружностей, пересекающих окружность ω не под прямым углом.

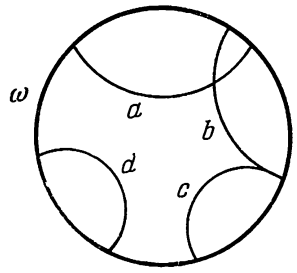


Рис. 88.

На рис. 89 изображена окружность α, орицикл β и эквидистанта γ.

Можно показать, что расстояние $\rho(A, B)$ между точками A и B плоскости Лобачевского на модели Пуанкаре выражается через двойное отношение $\overline{IJ, AB}$ точек A и B и точек I и J пересечения окружности, изображающей прямую AB, с окружностью ω по формуле

$$\rho(A, B) = q \ln \overline{IJ, AB}. \tag{53}$$

Движения плоскостей Римана и Лобачевского изображаются в моделях Пуанкаре круговыми преобразованиями (см. кн. IV ЭЭМ, стр. 62 и 478).

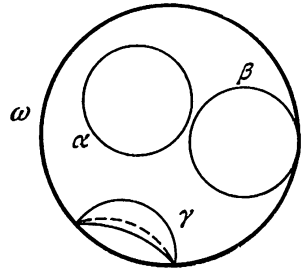
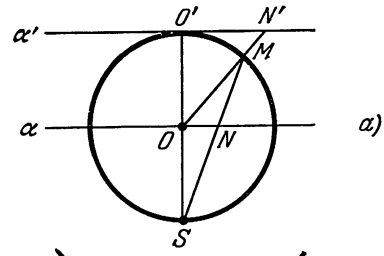


Рис. 89.

Самым замечательным свойством стереографической проекции и аналогичной проекции сферы мнимого радиуса на плоскость является то, что углы между линиями в этих проекциях всегда изображаются без искажения. Поэтому при изображении треугольников в моделях Пуанкаре плоскостей Римана и Лобачевского суммы углов полученных треугольников, состоящих из дуг окружностей или отрезков диаметров, будут в первом случае больше, а во втором — меньше 180°, что наглядно видно на рис. 90, где для сравнения изображены прямолинейные треугольники с теми же вершинами.

Аналогия между формулой (50) для модели Бельтрами — Клейна и формулой (53) для модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и аналогичными формулами для плоскости Римана, получающимися из формул (50) и (53) заменой q на $\frac{r}{2}$, не случайна и объясняется

тем, что от одной интерпретации легко перейти к другой. Рассмотрим проектирование сферы евклидова пространства и сферы мнимого радиуса псевдоевклидова пространства из их точки S на плоскость α и из центра O на плоскость α' (рис. 91). В первом случае точка M сферы спроектируется в точку N, во втором случае — в точку N'. Так как центральный угол $O'OM$ и вписанный угол $O'SM$ опираются на одну и ту же дугу $O'M$, то первый из этих углов в два раза больше второго (теорема об этих углах имеет место и в псевдоевклидовом пространстве). Поэтому если мы совместим плоскости α и α' параллельным переносом вдоль прямой OO', при котором точка O созпадает с точкой O', то луч SM совпадает с лучом OM', где M' — середина (неевклидова) отрезка $O'M$; поэтому точка N, изображающая точку M неевклидовой плоскости в модели Пуанкаре (на плоскости α), будет



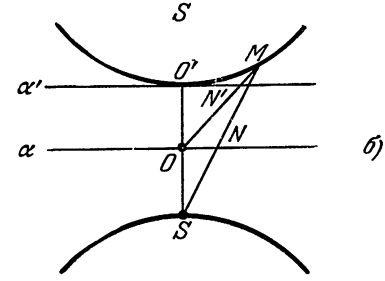


Рис. 91.

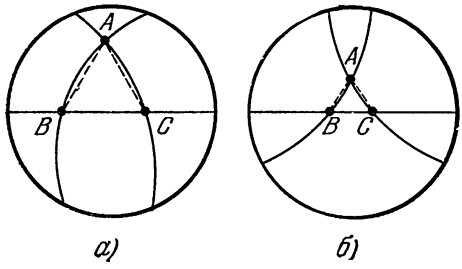


Рис. 90.

изображать в модели Кэли — Клейна (на плоскости α') середину отрезка $O'M$. Таким образом, если изменить модель Бельтрами — Клейна неевклидовой плоскости Лобачевского или Римана, заменив точку M этой модели неевклидовой серединой M' отрезка OM, то евклидовы прямые, изображающие прямые линии неевклидовой плоскости, перейдут в окружности (рис. 92, *а*,*б*) и модель Клейна — в модель Пуанкаре.

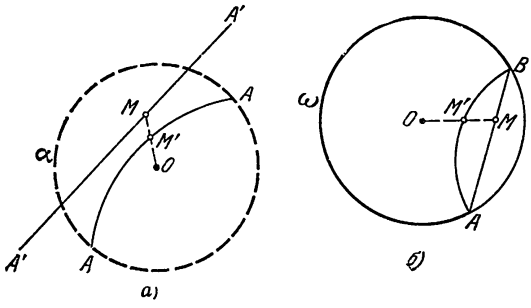


Рис. 92.

Аналогичные модели Пуанкаре могут быть построены для трехмерных и n-мерных неевклидовых геометрий. В частности, трехмерные пространства Римана и Лобачевского изображаются в моделях Пуанкаре внутренней областью

сферы трехмерного евклидова пространства, в случае пространства Римана дополненной множеством пар диаметрально противоположных точек этой сферы.

§ 7. Некоторые другие геометрические системы

7.1. Геометрия Минковского — Банаха. Неевклидовыми геометриями Кэли—Клейна далеко не исчерпываются известные геометрам «не евклидовы» (т. е. отличные от евклидова) пространства. Здесь мы остановимся на одной схеме, развитой тем же немецким математиком Г. Минковским, который впервые пришел к идее о псевдоевклидовой геометрии. Впоследствии эта геометрическая схема была широко обобщена польским математиком С. Банахом, в связи с чем соответствующие пространства можно называть *пространствами Минковского — Банаха.*

Условимся считать, что вдоль любой прямой евклидовой плоскости или пространства расстояния измеряются так же, как и в случае евклидовой геометрии, с тем, однако, изменением, что *единица длины различна для прямых разных направлений* (но одинакова для параллельных прямых!). Отложив от фиксированной точки O во всех направлениях отрезки единичной длины, мы получим некоторую замкнутую кривую (или поверхность) — единичную окружность (или сферу) геометрии Минковского — Банаха. В дальнейшем мы, главным образом, будем говорить о геометрии на плоскости, определяемой заданием единичной окружности S. Так как в направлении луча Oa и его продолжения Oa_1 за точку O единица измерения длин будет одна и та же, то каждая хорда AA_1 единичной окружности S, проходящая через точку O, делится в этой точке пополам (рис. 93). Таким образом, точка O является центром симметрии единичной окружности S.

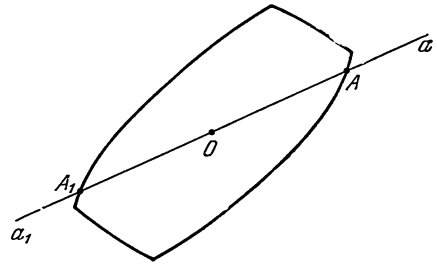


Рис. 93.

От расстояния $\rho(A, B)$ между двумя точками A и B любого пространства обычно требуют выполнения следующих свойств:

1) $\rho(A, B) \geqslant 0$ и $\rho(A, B) = 0$ лишь в том случае, если точка B совпадает с A;

2) для любых двух точек A и B должно иметь место равенство $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ (симметричность);

3) для любых трех точек A, B, C должно иметь место неравенство $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$ (неравенство треугольника).

Условие 1) очевидным образом выполняется для нашей геометрии, если только точка O лежит внутри (не на границе) замкнутой кривой S. Условие 2) также имеет здесь место (именно для того, чтобы удовлетворить ему, мы и требовали, чтобы единичная окружность была центрально-симметричной кривой с центром O). Таким образом, остается только выяснить, в каком случае имеет место условие 3).

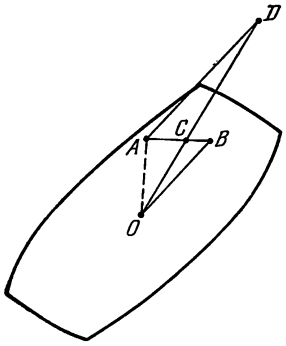


Рис. 94.

Мы утверждаем, что *определенная с помощью единичной окружности S метрика в том и только в том случае удовлетворяет неравенству треугольника, если ограниченный «окружностью» S «единичный круг» K является выпуклой фигурой* (см. в этой книге ЭЭМ статью «Выпуклые фигуры и тела»). В самом деле, предположим сначала, что *определенная указанным образом метрика $\rho(A, B)$ удовлетворяет неравенству треугольника.* Пусть A и B — две точки единичного круга K, т. е. пусть $\rho(O, A) \leqslant 1$ и $\rho(O, B) \leqslant 1$; для определенности положим еще, что $\rho(O, A) \geqslant \rho(O, B)$. Докажем, что и каждая точка C отрезка AB принадлежит кругу K; это и означает, что круг K — выпуклый. Проведем через точку A прямую $AD \parallel OB$ до пересечения с прямой OC в точке D (рис. 94). Так как отрезки AD и OB параллельны, то они измеряются с помощью одной единицы длины; поэтому $\dfrac{\rho(A, D)}{\rho(O, B)} = \dfrac{AD}{OB}$. А так как, кроме того, очевидно, $\dfrac{\rho(C, D)}{\rho(O, C)} = \dfrac{CD}{OC}$ и $\dfrac{AD}{OB} = \dfrac{CD}{OC}$ (в силу подобия треугольников ACD и BCO), то получаем:

$$\frac{\rho(A, D)}{\rho(O, B)} = \frac{\rho(C, D)}{\rho(O, C)}.$$

Поскольку мы предположили, что $\rho(O, B) \leqslant \rho(O, A)$, то

$$\frac{\rho(A, D)}{\rho(O, A)} \leqslant \frac{\rho(C, D)}{\rho(O, C)}.$$

Из этого, в силу неравенства треугольника, получаем:

$$\frac{\rho(O, D)}{\rho(O, A)} \leqslant \frac{\rho(O, A) + \rho(A, D)}{\rho(O, A)} = 1 + \frac{\rho(A, D)}{\rho(O, A)} \leqslant 1 + \frac{\rho(C, D)}{\rho(O, C)} =$$

$$= \frac{\rho(O, C) + \rho(C, D)}{\rho(O, C)} = \frac{\rho(O, D)}{\rho(O, C)},$$

откуда и вытекает, что

$$\rho(O, C) \leqslant \rho(O, A) \leqslant 1,$$

т. е. что точка C заключается внутри круга K.

Обратно, пусть нам известно, что *круг K выпуклый*. Рассмотрим произвольные три точки A, B и C плоскости Минковского — Банаха. Если эти точки принадлежат одной прямой, то неравенство треугольника выполняется, поскольку оно выполняется для евклидовой плоскости, а длины отрезков одной прямой измеряются у нас так же, как и в евклидовой плоскости. Остается рассмотреть случай, когда точки A, B и C не принадлежат одной прямой (рис. 95). Отложим от точки A такой отрезок $AD \| BC$, что $\rho(A, D) = \rho(A, B) = \rho$, и построим круг K_ρ с центром A и радиусом ρ (т. е. множество таких точек M, что $\rho(A, M) \leqslant \rho$). Поскольку этот круг (подобный единичному кругу K нашей геометрии или равный ему) выпуклый, то весь отрезок BD принадлежит кругу K_ρ; в частности, ему принадлежит точка E пересечения отрезков AC и BD, т. е. $\rho(A, E) \leqslant \rho$. А теперь, в точности так же как и при доказательстве первой части теоремы, имеем:

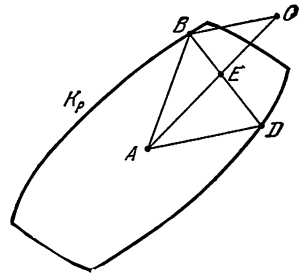


Рис. 95.

$$\frac{\rho(B, C)}{\rho(A, B)} = \frac{\rho(B, C)}{\rho(A, D)} = \frac{\rho(E, C)}{\rho(A, E)}$$

и, следовательно, в силу соотношения $\rho(A, B) = \rho \geqslant \rho(A, E)$,

$$\rho(E, C) \leqslant \rho(B, C)$$

и

$$\rho(A, C) = \rho(A, E) + \rho(E, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C),$$

что и требовалось доказать.

Все геометрические свойства плоскости Минковского — Банаха полностью определяются выпуклой фигурой K. Так, прямая a, пересекающая прямую b в точке P, называется *перпендикулярной* к этой прямой (в смысле геометрии Минковского — Банаха), если для каждой точки A прямой a точка P является б л и ж а й ш е й к ней точкой прямой b (рис. 96). Приняв точку O прямой a, для которой $\rho(O, P) = 1$, за центр единичного круга K, мы обнаружим, что вся прямая b расположена вне K (ибо для каждой точки B этой прямой $\rho(O, B) \geqslant 1$); поэтому прямая b является о п о р н о й для круга K в точке P (см. стр. 187 этой книги ЭЭМ). Этот факт позволяет сформулировать определение перпендикулярности с помощью круга K: *прямая a перпендикулярна к b ($a \perp b$), если прямая $b' \| b$ является опорной*

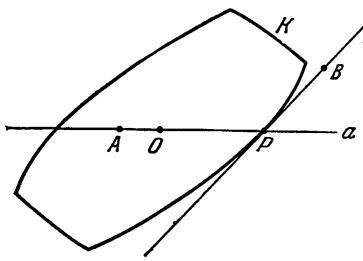


Рис. 96.

для единичного круга K в точках его пересечения с проходящей через центр круга прямой $a_1 \| a$ (рис. 97). Из этого определения следует, что из каждой точки A можно опустить перпендикуляр на данную прямую b, однако этот перпендикуляр может и не быть единственным (последнее будет иметь место в том случае, если единичная окружность S геометрии Минковского—Банаха содержит целый отрезок MN, параллельный прямой b). Далее, понятие перпендикулярности в геометрии Минковского—Банаха, вообще говоря, не является симметричным: *из того, что $a \perp b$, не следует еще, что $b \perp a$* (см. тот же рис. 97, где $a \perp b$, $b \perp c$). Более того, можно даже доказать, что *если пространственная геометрия Минковского—Банаха такова, что в ней из соотношений $a \perp b$ следует $b \perp a$, то эта геометрия по существу не отличается от евклидовой;* однако для плоской геометрии Минковского—Банаха дело обстоит не так.

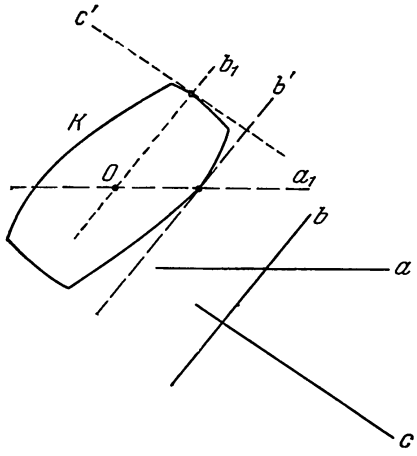


Рис. 97.

Нетрудно пояснить, как должна быть устроена единичная окружность S для того, чтобы в определенной с ее помощью геометрии Минковского—Банаха понятие перпендикулярности прямых было симметрично. Пусть Ф—такая центрально-симметричная выпуклая фигура без угловых точек с центром O, что два взаимно перпендикулярных ее диаметра (хорды, проходящие через центр O) AA_1 и BB_1 равны между собой и проведенные через точки A и B прямые $a \| BB_1$ и $b \| AA_1$ являются опорными для F (рис. 98). Мы предположим еще, что дуга AB граничной кривой Г фигуры Ф (а следовательно, и симметричная ей дуга A_1B_1) не содержит прямолинейных отрезков; дуги AB и A_1B_1 мы обозначим через s и s_1; дуги BA_1 и AB_1 линии Г нам впоследствии не понадобятся. Проведем через точки A, B, A_1 и B_1 окружность Σ с центром O и произведем относительно этой окружности полярное отображение П (см. стр. 128—134 кн. IV ЭЭМ). Совокупность точек дуги s перейдет при этом в совокупность прямых, касающихся некоторой дуги σ; на-

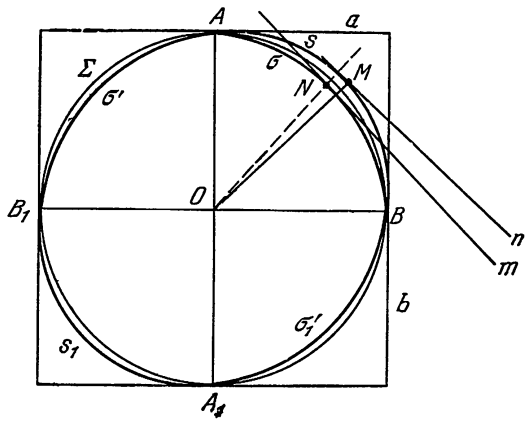


Рис. 98.

против, точки дуги σ перейдут в касательные дуги s. Дуга σ будет проходить через те же точки A и B, что и дуга s; прямые a и b, в которые переводит отображение П точки A и B, будут являться ее касательными. Из свойств полярного отображения следует, что для каждой точки M дуги s ее поляра m касается дуги σ в такой N, что поляра n точки N касается s в точке M; кроме того, из свойств поляр следует, что $m \perp OM$ и $n \perp ON$. Таким образом, касательная m дуги σ в точке N перпендикулярна к OM и касательная n дуги s в точке M перпендикулярна к ON. Аналогичными свойствами обладает, очевидно, и дуга σ_1, получаемая полярным отображением П из дуги s_1. Оставив теперь без изменения дуги s и s_1 кривой Γ, заменим дуги AB_1 и A_1B дугами σ' и σ_1', получаемыми из σ и σ_1 поворотом на 90° вокруг точки O. Полученная таким образом кривая S будет, очевидно, служить единичной окружностью геометрии Минковского—Банаха, в которой отношение перпендикулярности прямых симметрично.

Можно доказать, что получаемыми таким образом кривыми S (эти кривые впервые были построены австрийским математиком И. Радоном) в определенном смысле исчерпываются все «единичные окружности» плоских геометрий Минковского — Банаха с симметричным отношением перпендикулярности [1]). В частности, если линия Γ совпадает с окружностью Σ, то и S будет обыкновенной окружностью.

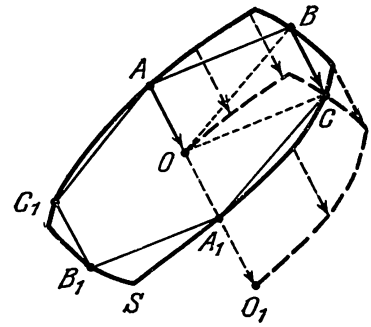


Рис. 99.

7.2. Число π в геометрии Минковского — Банаха. Выясним, в каких пределах может заключаться длина единичной окружности S геометрии Минковского—Банаха; если обозначить эту длину через 2π, то наша задача сведется к оценке числа π. Периметр любой выпуклой фигуры определяется в геометрии Минковского—Банаха в точности так же, как и в евклидовой геометрии (см. стр. 228 и след. этой книги ЭЭМ). Отсюда вытекает, что периметр выпуклой фигуры обладает в этой геометрии многими свойствами обычного периметра; в частности, *если выпуклая фигура F содержит внутри себя выпуклую фигуру G, то периметр фигуры F не меньше периметра фигуры G.*

Докажем, что

$$3 \leqslant \pi \leqslant 4.$$

Пусть A—произвольная точка единичной окружности S с центром O, A_1—диаметрально противоположная ей точка окружности S (рис. 99). При непрерывном обносе вектора $\overrightarrow{AO}$ вдоль кривой S, при котором конец A этого вектора описывает дугу AA_1, его конец O опишет некоторую непрерывную линию, начинающуюся в точке O (т. е. внутри S!) и заканчивающуюся в такой точке O_1, что $\overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA_1}$ (вне S!). Поэтому найдется такое положение BC этого вектора, при котором и его начало B и его конец C будут принадлежать окружности S. Так как четырехугольники $OABC$ и OA_1CB — параллелограммы, то $AB \# OC$, $BC \# AO$ и $CA_1 \# BO$, т. е. $\rho(A,B) = \rho(B,C) = \rho(C,A_1) = 1$. Отсюда вытекает, что периметр центрально-симметричного выпуклого шестиугольника $ABCA_1B_1C_1$, вписанного в единичную окружность S, в геометрии Минковского—Банаха равен 6; поэтому периметр 2π окружности S не может быть меньше 6 и, значит, $\pi \geqslant 3$.

[1]) Точнее, все такие «единичные окружности» исчерпываются описанными кривыми S и их аффинными образами.

Рассмотрим теперь всевозможные вписанные в S параллелограммы с центром O и выберем среди них параллелограмм MNM_1N_1 наибольшей возможной (евклидовой) площади (ср. стр. 330 этой книги ЭЭМ). Опишем вокруг MNM_1N_1 параллелограмм $PQRS$, стороны которого параллельны MM_1 и NN_1. Ясно, что если бы кривая S содержала, скажем, точку U, расположенную дальше от прямой MM_1, чем прямая PQ (рис. 100), то параллелограмм MUM_1U_1 имел бы бóльшую площадь, чем MNM_1N_1; поэтому такой точки U не существует, и кривая S целиком заключена внутри параллелограмма $PQRS$. С другой стороны, так как $\rho(P,Q)=\rho(M,\ M_1)=2$ и $\rho(Q,\ R)=\rho(N,\ N_1)=2$, то периметр параллелограмма $PQRS$ в геометрии Минковского — Банаха с единичной окружностью S равен 8; поэтому длина 2π окружности S не больше 8, т. е. $\pi\leqslant 4$.

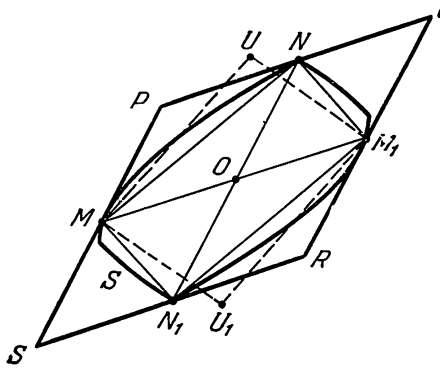


Рис. 100.

Нетрудно убедиться, что число π может принимать л ю б ы е значения в интервале $3\leqslant\pi\leqslant 4$; равенство $\pi=3$ выполняется, если S представляет собой, например, правильный шестиугольник (рис. 101, *а*); $\pi=4$, если S представляет собой квадрат (рис. 101, *б*). Если S совпадает с обыкновенной (евклидовой) окружностью (рис. 101, *в*), то $\pi=3{,}14159\ldots$

7.3. Внутренняя геометрия поверхности и общая геометрия Римана. Сфера в евклидовом пространстве и сфера мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, на которых осуществляются плоские неевклидовы геометрии Римана и Лобачевского, являются частным случаем поверхностей евклидова и псевдоевклидова пространств, а плоские неевклидовы геометрии — частными случаями в н у т р е н н е й г е о м е т р и и поверхности. Под *внутренней геометрией* поверхности имеются в виду те геометрические свойства поверхности, которые не изменяются при изгибании поверхности без сжатий, растяжений и разрывов. К таким свойствам относятся прежде всего длины линий и площади фигур на поверхности. Углы между линиями также относятся к внутренней геометрии, так как углы бесконечно малых треугольников вполне определяются отношениями их сторон, не изменяющимися при изгибании. К внутренней геометрии поверхности относятся г е о д е -

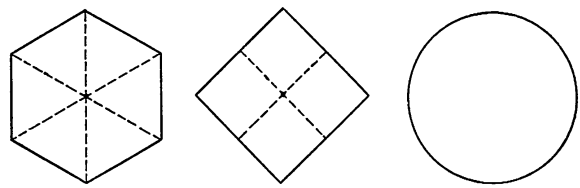


Рис. 101.

зические линии, т. е. линии, являющиеся кратчайшими линиями в достаточно малых областях поверхности (это название объясняется тем, что такие линии на земной поверхности играют важную роль в геодезии). Криволинейные треугольники на поверхности, стороны которых являются дугами геодезических линий, мы будем называть геодезическими треугольниками (рис. 102). С помощью геодезических треугольников можно определить полную кривизну поверхности в данной точке (называемую также гауссовой кривизной). Для этого заметим, что для геодезического треугольника можно определить угловой избыток (эксцесс) так же, как для сферического треугольника; однако здесь рассматриваются не только случаи, когда сумма углов треугольника больше двух прямых углов, но и случаи, когда эта сумма равна или меньше двух прямых углов. Во втором случае угловой избыток равен нулю, а в третьем случае — отрицателен; в последнем случае абсолютная величина отрицательного углового избытка называется угловым дефектом — именно так определялся угловой дефект треугольника на плоскости Лобачевского. Будем называть *полной кривизной* поверхности в данной точке предел отношения углового избытка геодезического треугольника к его площади при стягивании треугольника в точку. Из этого определения видно, что полная кривизна поверхности может быть как положительной, так и равной нулю или отрицательной. Ясно также, что полная кривизна принадлежит к внутренней геометрии поверхности.

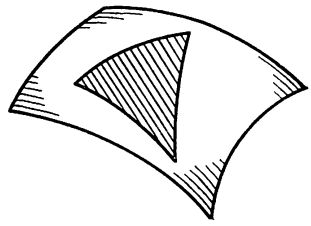


Рис. 102.

Так как геодезическими линиями на сфере являются большие окружности, то геодезическим треугольником на сфере является сферический треугольник, а угловой избыток ε этого треугольника связан с его площадью s соотношением $s = r^2\varepsilon$, где r — радиус сферы. Следовательно, отношение углового избытка геодезического треугольника на сфере к его площади равно $1/r^2$ для всех треугольников. Поэтому предел этого отношения при стягивании треугольника в точку также равен $1/r^2$, т. е. полная кривизна сферы во всех точках равна $1/r^2$. Поэтому *сфера, а следовательно, и неевклидова плоскость Римана являются поверхностями постоянной положительной кривизны.* Поверхностью постоянной кривизны является и евклидова плоскость: геодезическими линиями евклидовой плоскости являются прямые, геодезический треугольник на евклидовой плоскости — прямолинейный треугольник, и так как угловой избыток треугольника на евклидовой плоскости всегда равен 0, то нулю равно отношение углового избытка к площади треугольника, а значит, и предел этого отношения при

стягивании треугольника в точку. Поэтому *евклидова плоскость является поверхностью постоянной нулевой кривизны.*

Так как геодезическими линиями на плоскости Лобачевского являются также прямые, то геодезический треугольник на плоскости Лобачевского также является прямолинейным треугольником, а угловой дефект δ этого треугольника связан с его площадью s соотношением $s = k\delta$. Так как угловой избыток этого треугольника равен $-\delta$, то отношение углового избытка геодезического треугольника на плоскости Лобачевского к его площади равно $-1/k$ для всех треугольников. Поэтому предел этого отношения при стягивании треугольника в точку также равен $-1/k$, т. е. полная кривизна плоскости Лобачевского во всех ее точках равна $-1/k$. Итак, *плоскость Лобачевского является поверхностью постоянной отрицательной кривизны.*

Так как понятие полной кривизны поверхности принадлежит к внутренней геометрии поверхности, то полная кривизна плоскости Лобачевского не зависит от того, рассматриваем ли мы плоскость Лобачевского в виде полости сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве или в виде какой-нибудь другой модели, или вообще независимо от всяких моделей.

Понятие кривизны можно распространить и на трехмерные пространства весьма общего вида — на пространства, каждая точка которых определяется тремя координатами, причем для каждых двух точек с бесконечно близкими координатами определено р а с с т о я н и е между этими точками. С помощью этого расстояния в таких пространствах определяются длины конечных дуг линий, углы между линиями и площади фигур на поверхностях. Такие пространства называются *общими римановыми пространствами*, так как идея рассмотрения этих пространств принадлежит тому же Б. Р и м а н у, который определил неевклидовы пространства Римана. В общих римановых пространствах можно определить также геодезические линии и геодезические треугольники. Поэтому в них также можно рассмотреть предел отношения углового избытка геодезического треугольника к его площади при стягивании треугольника в точку по некоторой поверхности. Такой предел называют *кривизной пространства* в данной точке и в данном двумерном направлении; определенные таким образом кривизны изменяются при переходе от одного двумерного направления в одной точке к другому двумерному направлению в той же точке и при переходе от точки к точке.

Так как геодезическими линиями неевклидова пространства Римана являются прямые, а через всякие три точки этого пространства проходит плоскость, то кривизна неевклидова пространства Римана, получаемого из гиперсферы радиуса r, во всех точках и во всех двумерных направлениях равна $\frac{1}{r^2}$.

Поэтому *неевклидово пространство Римана является общим римановым пространством постоянной положительной кривизны.* Пространством постоянной кривизны является и евклидово пространство: геодезическими линиями евклидова пространства являются прямые, а через каждые три его точки проходит плоскость. Поэтому кривизна евклидова пространства во всех точках и во всех двумерных направлениях равна нулю, т. е. *евклидово пространство является пространством постоянной нулевой кри-*

визны. Аналогично устанавливается и то, что *пространство Лобачевского является общим римановым пространством постоянной отрицательной кривизны.*

Понятие кривизны пространства также принадлежит к его внутренней геометрии и не зависит от того, рассматривается это пространство как погруженное каким-нибудь образом в некоторое многомерное пространство или же рассматривается независимо от всяких моделей.

7.4. О геометрии реального мира. Построив новую геометрию, Лобачевский сразу же поставил вопрос о том, какая же геометрия реализуется в реальном мире, если принять за прямые линии траектории световых лучей, а за точки — мельчайшие области пространства, — геометрия Евклида или построенная им геометрия? Тот факт, что геометрия Евклида не противоречит нашему повседневному опыту, не решает этого вопроса, так как в малых участках геометрия пространства Лобачевского близка к геометрии Евклида и, возможно, соответствие геометрии Евклида наблюдаемым фактам происходит только потому, что отклонения геометрии реального мира от евклидовой геометрии слишком малы. Ведь, как известно, на небольших участках земной поверхности отклонения геометрии этой поверхности от плоской геометрии чрезвычайно малы, и представление о том, что Земля имеет форму шара, победило только в результате длительной борьбы с представлением о том, что Земля — плоская.

Лобачевский пытался решить этот вопрос, измеряя суммы углов треугольника, вершины которого расположены в двух противоположных точках земной орбиты и на некоторой неподвижной звезде. Однако разность между суммой углов этого треугольника и двумя прямыми углами у Лобачевского не выходила за допустимые пределы ошибок измерений, и Лобачевский не смог найти ответ на поставленный им вопрос.

Ответ на этот вопрос дала теория относительности Эйнштейна. В специальной теории относительности доказывается, что пространство реального мира нельзя отделить от времени и что пространство — время следует рассматривать как четырехмерное псевдоевклидово пространство. Впоследствии появилась общая теория относительности Эйнштейна, значительно уточняющая и дополняющая специальную теорию относительности. В этой теории устанавливается, что более точно геометрия реального пространства — времени описывается геометрией четырехмерного риманова пространства переменной кривизны, причем, как оказывается, кривизна этого пространства больше в тех участках пространства — времени, в которых больше плотность материи. Вблизи каждой точки это пространство устроено как четырехмерное псевдоевклидово пространство, что и позволяет при рассмотрении небольших интервалов времени и пространства пользоваться специальной теорией относительности. Таким образом, реальное пространство с очень большой степенью точности является общим римановым пространством. Иными словами, геометрия реального пространства лишь в самом первом приближении может быть описана как евклидова, более же точно описывать ее как сложную геометрию переменной кривизны.

Хотя с прогрессом науки мы узнаем свойства все бóльших областей пространства — времени, известная нам часть вселенной остается ограниченной, и по свойствам этой части мира мы можем судить о геометрических свойствах мирового пространства — времени в целом только в порядке грубого приближения.

Наиболее грубое приближение к картине мирового пространства — времени в целом мы получим, если предположим, что материя распределена в пространстве — времени совершенно равномерно, и, следовательно, пространство — время представляет собой четырехмерное риманово пространство постоянной кривизны. Если мы представим себе такое пространство в виде сферы действительного или мнимого радиуса в пятимерном псевдоевклидо-

вом пространстве, а поверхности $t = \text{const}$, также в порядке грубого приближения, представим себе сечениями этой сферы параллельными гиперплоскостями, то с течением времени «пространственное сечение» мира уменьшается или расширяется в зависимости от положения секущей плоскости. На рис. 103 изображен трехмерный аналог сферы действительного радиуса в пятимерном псевдоевклидовом пространстве. Эта картина мира, принадлежащая известному ленинградскому физику А. А. Фридману (мимоходом о ней говорится в его книге [15], указанной в списке литературы в конце статьи), с первого взгляда кажется совершенно неправдоподобной, но она подтверждается астрономическими наблюдениями, свидетельствующими о расширении известной нам вселенной (так называемое «красное смещение» линий спектра). Это подтверждение указывает на возможность того, что реальное пространство—время, являющееся псевдоримановым пространством переменной кривизны, соответствует этой картине мира «в среднем».

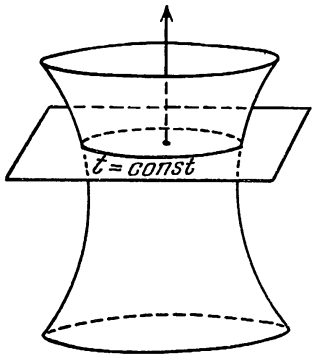


Рис. 103.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сборник «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1956.
В этой книге собраны многие классические работы, относящиеся к теме настоящей статьи, в том числе упоминаемые в тексте работы Н. И. Лобачевского, К. Ф. Гаусса, Я. Бойяи, Э. Бельтрами, Ф. Клейна, А. Кэли, А. Пуанкаре, Б. Римана и др.

[2] В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, Общедоступные очерки, М., Гостехиздат, 1955.
Сборник популярных статей известного советского геометра и педагога, весьма широко затрагивающих весь круг вопросов, связанных с неевклидовой геометрией Лобачевского.

[3] В. Ф. Каган, Лобачевский, М.—Л., изд. Академии наук СССР, 1948.
Обстоятельная биография Лобачевского, в которой подробно рассказывается о неевклидовой геометрии Лобачевского и о дальнейшей эволюции относящихся сюда идей.

[4] А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., Гостехиздат, 1953.
Популярная книга, подробно и доступно излагающая основные факты неевклидовой геометрии Лобачевского.

[5] Б. Н. Делоне, Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского, М., Гостехиздат, 1956.
Небольшая книга, содержащая построение нескольких моделей неевклидовой геометрии Лобачевского и изложение основных фактов этой геометрии.

[6] П. С. Александров, Что такое неевклидова геометрия, М., Учпедгиз, 1950.

[7] П. А. Широков, Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, М., Гостехиздат, 1955.

[8] Р. Бальдус, Неевклидова геометрия, перев. с нем., М.—Л., ГТТИ, 1933.
В популярных брошюрах [6]—[8] излагаются основные факты неевклидовой геометрии Лобачевского. Из этих трех книжек первая является наименее подробной; наибольшее же число деталей содержит третья из них, излагающая геометрию Лобачевского на модели Бельтрами—Клейна.

[9] И. М. Яглом, Геометрические преобразования. II, М., Гостехиздат, 1956.

Приложения к двум главам этой книги, рассчитанной на мало подготовленного читателя, посвящены моделям Бельтрами—Клейна и Пуанкаре неевклидовой геометрии Лобачевского. Затронута в книге также и неевклидова геометрия Римана.

[10] Ф. Клейн, Неевклидова геометрия, перев. с нем., М.—Л., ОНТИ, 1935.

Эта книга, составленная по лекциям знаменитого Ф. Клейна, содержит подробное изложение его идей, относящихся к построению «общих» неевклидовых геометрий Кэли—Клейна на плоскости и в пространстве. Наибольшее внимание в книге уделяется неевклидовым геометриям Лобачевского и Римана, а также псевдоевклидовой геометрии Минковского.

[11] Г. Буземан и П. Келли, Проективная геометрия и проективные метрики, перев. с англ., М., ИЛ, 1957.

V глава этого оригинального учебника проективной геометрии американских геометров Г. Буземана и П. Келли посвящена неевклидовым геометриям Лобачевского и Римана; в ней довольно подробно излагаются основные относящиеся сюда факты. IV глава книги посвящена другим интересным геометрическим системам, в том числе и геометрии Минковского—Банаха.

[12] И. М. Яглом и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, М., Учпедгиз, 1963.

В этой книге произведено чисто геометрическое построение псевдоевклидовой геометрии.

[13] В.Ф. Каган, Основания геометрии, т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1949; т. II, М., 1956.

Первый том обстоятельной монографии В. Ф. Кагана посвящен специально неевклидовой геометрии Лобачевского; во втором подробно изучается неевклидова геометрия Римана и излагается общая схема Кэли—Клейна.

[14] М. Борн, Эйнштейновская теория относительности, перев. с нем., М., «Мир», 1964.

В этой книге идеи псевдоевклидовой геометрии Минковского существенно используются для вывода физических фактов, относящихся к специальной теории относительности.

[15] А. А. Фридман, Мир как пространство и время, М., «Наука», 1965.

Эта небольшая научно-популярная книжка известного ученого содержит материал, тесно связанный с содержанием пп. **7.3** и **7.4** настоящей статьи.

[16] H. S. M. Coxeter, Non-euclidean geometry, Toronto, 1957.

В этой книге видного канадского геометра весьма обстоятельно рассказано о неевклидовых геометриях Лобачевского и Римана.

[17] Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, М., Гостехиздат, 1955.

Неэлементарная монография, посвященная «невырожденным» геометриям Кэли—Клейна.

[18] И. М. Яглом, Б. А. Розенфельд, Е. У. Ясинская, Проективные метрики, Успехи математических наук **19**, № 5, 1964, стр. 51—113.

Научная статья, посвященная «общим» геометриям Кэли—Клейна.

См. также книгу Кокстера [5] в списке литературы к статье «Многомерные пространства».

ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 477
0.1. Метрические и качественные свойства фигур 477
0.2. Топологические преобразования. Гомеоморфизм 478
0.3. Связность 480
0.4. Топологические инварианты 481
0.5. Внутренние и невнутренние свойства. Изотопия 482
§ 1. Линии и поверхности 484
1.1. Линия 484
1.2. Линейный комплекс 486
1.3. Порядок связности 487
1.4. Топологическая инвариантность эйлеровой характеристики линейного комплекса 490
1.5. Двумерный комплекс 490
1.6. Замкнутые поверхности 492
1.7. Поверхности с краем 494
1.8. Теорема Эйлера. Эйлерова характеристика двумерного комплекса 495
1.9. Эйлерова характеристика поверхности 496
1.10. Барицентрическое разбиение 497
1.11. Дуальное разбиение замкнутой поверхности 498
1.12. Ориентация 499
1.13. Проективная плоскость 502
1.14. Односторонние и двусторонние разрезы 505
1.15. Простые поверхности 506
1.16. Классификация поверхностей 510
§ 2. Многообразия 516
2.1. Введение 516
2.2. Трехмерная клетка 517
2.3. Трехмерный комплекс 518
2.4. Барицентрическое разбиение трехмерного комплекса 519
2.5. Трехмерное многообразие 520
2.6. Примеры замкнутых многообразий 521
2.7. Дуальное клеточное разбиение многообразия 525
2.8. Многообразие с краем 526
2.9. Эйлерова характеристика многообразия с краем. Поверхности, не могущие быть краем 527
2.10. Ориентируемые и неориентируемые многообразия 528
2.11. Теорема Хегора 530
2.12. Цепь Гомологии 531
§ 3. Общие топологические понятия 536
3.1. Метрическая геометрия 536

3.2. Топологическое пространство 539
3.3. Связность. Компоненты 541
3.4. Непрерывные отображения 542
3.5. Инфинитезимальные свойства 543
3.6. Равномерно непрерывное отображение 546
3.7. Размерность 548
3.8. Лемма Шпернера 551
3.9. Теорема о минимальной кратности покрытия 553
3.10. Заключение 553
Литература 555

Топология (или Analysis situs) — это ветвь геометрии, изучающая те свойства фигур, которые опираются на одно лишь единственное понятие бесконечной близости. Всякое понятие, которое может быть сформулировано в терминах бесконечной близости, есть топологическое понятие. Таковы, например, понятия непрерывности и предела в анализе, понятия линии и поверхности в геометрии.

Введение

0.1. Метрические и качественные свойства фигур. Элементарная геометрия имеет дело почти исключительно с такими свойствами фигур, которые связаны с понятиями длины, угла, площади, объема и тому подобными элементами измерительного характера. Такие свойства называются *метрическими*. Лишь очень немногие ее теоремы как бы случайно затрагивают свойства иного характера (например, теорема о пересечении трех биссектрис треугольника в одной точке). Да и тогда эти «качественные» свойства выступают не самостоятельно, а почти всегда тесно переплетаются с метрическими (так, в нашем примере метрическим является то обстоятельство, что биссектрисы делят углы на две равные части).

Уже в начале XIX века математикам стало ясно, что не метрические свойства пространства являются основными и наиболее глубокими его свойствами. Обнаружился обширный класс интересных и глубоких свойств пространства, не зависящих от понятий длины, угла и других метрических понятий. Это — класс *проективных* [1]) свойств, т. е. тех свойств фигуры, которые сохраняются при любых преобразованиях этой фигуры, не искривляющих прямых линий. Такие преобразования называются *проективными преобразованиями*. Примером проективного преобразования может служить искажение, которому подвергается плоская фигура при центральном проектировании ее (например, при помощи проекционного фонаря) на какую-нибудь плоскость (вообще говоря, не параллельную плоскости фигуры). При таком проектировании

[1]) Ср. §§ 6 и 7 статьи «Геометрические преобразования» в кн. IV ЭЭМ.

размеры, углы, пропорции отдельных частей вообще искажаются, однако прямые остаются прямыми; следовательно, фигура подвергается проективному преобразованию.

Углы и относительные размеры (пропорции) частей фигуры остаются неизменными при любых преобразованиях подобия, при проективных же преобразованиях они вообще уже не сохраняются, оказываются недостаточно стойкими, чтобы выдержать общие проективные преобразования. Еще менее стойки абсолютные размеры фигуры: длины, площади, объемы — они непременно сохраняются лишь при конгруэнтных преобразованиях, т. е. при движениях.

Некоторое геометрическое свойство должно считаться тем более глубоким, существенным, чем устойчивее оно оказывается, т. е. чем разнообразнее те преобразования, которые оно выдерживает, оставаясь неизменным. С этой точки зрения проективные свойства оказываются глубже, существеннее метрических.

0.2. Топологические преобразования. Гомеоморфизм. Желая из геометрических свойств выделить самые существенные, самые стойкие, выдерживающие наиболее широкие преобразования, мы приходим к *топологическим свойствам*. Так называют свойства, не нарушающиеся ни при каких *топологических преобразованиях*, т. е. взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях фигур. Это — преобразования, которые точки данной фигуры F переводят в точки другой фигуры Φ, причем выполняются условия:

1) Каждой точке одной из фигур соответствует, в силу преобразования, одна и только одна точка другой — *образ* первой точки при данном преобразовании (взаимная однозначность).

2) Точке, бесконечно приближающейся к произвольной фиксированной точке одной из фигур, соответствует в другой фигуре точка, бесконечно приближающаяся к образу этой фиксированной точки (взаимная непрерывность).

Последнее условие может быть иначе формулировано так:

Пусть x — произвольная фиксированная точка фигуры F, а ξ — соответствующая ей точка из Φ; тогда для каждой окрестности (как бы мала она ни была) одной из этих точек найдется такая (достаточно малая) окрестность другой, что все ее точки соответствуют (в силу преобразования) точкам, принадлежащим первой окрестности (рис. 1).

Здесь под термином *окрестность* данной точки можно подразумевать, например, совокупность всех точек фигуры, расстояния которых от этой точки меньше определенного положительного числа (радиус окрестности). Легко видеть, что данное здесь определение непрерывности тождественно с обычным в математике.

Топологические преобразования не сохраняют, вообще говоря, ни длин, ни углов, ни прямолинейности, но сохраняют лишь отношение бесконечной близости (между переменной точкой и непо-

движной, между переменной и ее пределом). Наглядно можно осуществить топологическое преобразование фигуры, деформируя ее как угодно, лишь бы при этом не происходило «разрывов» и «склеиваний». Так, окружность можно превратить в эллипс, овал неправильной формы или даже в многоугольник, вообще в любую простую замкнутую линию (простую, т. е. без точек самопересечения). Однако окружность нельзя топологически превратить в незамкнутую линию, так как для этого пришлось бы ее разорвать, или в лемнискату (восьмерку), так как для этого пришлось бы соединить две ее точки в одну («склеивание»). Сферу можно топологически преобразовать в поверхность эллипсоида или куба и вообще в поверхность любого выпуклого тела; однако ее нельзя топологически преобразовать в поверхность кольца (тор).

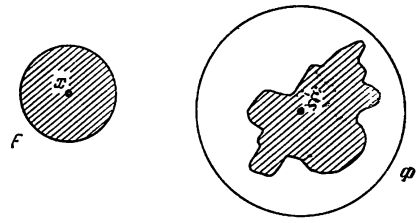


Рис. 1.

Покажем, что всякий выпуклый многогранник P можно топологически преобразовать в шар. Пусть O — фиксированная точка внутри P; опишем вокруг нее произвольный шар. Проведем из O любой луч, и пусть он пересечет поверхность многогранника в точке a, поверхность шара — в точке b. Отобразим отрезок Oa пропорционально на радиус Ob (т. е. любой точке x отрезка Oa будем считать соответствующей ту точку y радиуса Ob, которая удовлетворяет условию: $\frac{Ox}{Oy}=\frac{Oa}{Ob}$). Если это сделать для всех выходящих из O лучей, то тем самым получится топологическое отображение многогранника P на шар (заметим, что при этом и поверхность многогранника топологически отображается на поверхность шара).

Задача. Доказать, что внутренность круга можно топологически отобразить на всю плоскость.

Указание. При помощи проектирования отобразите сначала внутренность круга на полусферу (рис. 2), а затем, проектируя из центра полусферы, отобразите эту последнюю на плоскость, параллельную плоскости ее экватора. (Заметим, что последнее отображение непрерывно, но не равномерно непрерывно.)

Фигуры, допускающие топологическое преобразование одна на другую, называются *гомеоморфными* или принадлежащими одному *топологическому типу*. По определению, все топологические свойства у гомеоморфных фигур совпадают, поэтому для топологии, изучающей лишь топологические свойства, все гомеоморфные между собой фигуры равноценны — представляют собой как бы различные

экземпляры одного и того же топологического образца, различные его метрические осуществления.

Изучая топологические свойства фигур, свойства, не зависящие от каких бы то ни было метрических элементов, а связанные лишь с понятием бесконечной близости, *топология* с полным основанием может быть названа *качественной геометрией*. Вместе с тем область применения топологии несравненно шире, чем у метрической геометрии: топологию можно применять к изучению любого множества элементов какой угодно природы, лишь бы между элементами было установлено понятие бесконечной близости. При этом данное множество называют *топологическим пространством*, а его элементы — *точками* этого пространства.

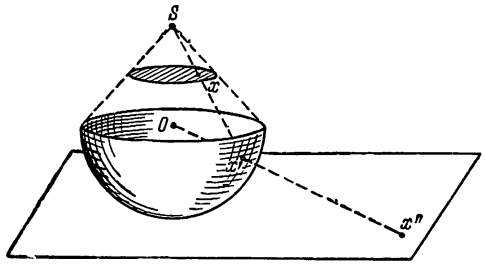


Рис. 2.

Часто отношение бесконечной близости может быть введено и в том случае, если понятие расстояния между элементами не установлено (или даже не может быть установлено). Так, можно исследовать топологические свойства множества всех прямых плоскости, множества всех плоскостей пространства, так как нетрудно точно определить, что означает бесконечное приближение прямой (или плоскости) к данной фиксированной прямой (плоскости), и тем задать топологическую структуру этих множеств. Точно так же можно говорить о топологической структуре многообразия всех положений какой-нибудь механической системы, многообразия всех цветов, многообразия всех непрерывных функций и т. д.

Задача. Докажите, что множество всех прямых плоскости, не пересекающих данного круга, гомеоморфно множеству внутренних точек круга (не считая центра, если не считать бесконечно удаленной прямой).

Указание. Каждой прямой поставить в соответствие ее полюс (см. ЭЭМ, кн. IV, стр. 128 и след.).

Задача. Рассмотрим многообразие всех положений плоской системы, состоящей из двух стержней, причем один из них одним концом соединен шарниром с неподвижной точкой, а другим концом соединен шарниром с концом второго стержня; докажите, что это многообразие гомеоморфно поверхности тора.

0.3. Связность. Самым простым топологическим свойством фигуры является ее свойство состоять из одного цельного куска, или, наоборот, быть составленной из отдельных, не связанных

друг с другом, кусков. В первом случае фигура называется *связной*, во втором — *несвязной*. Точный смысл этих терминов таков: фигура несвязна, если ее можно разделить на две такие части, что ни в одной из них не найдется ни одной точки, бесконечно близкой к другой части; фигура связна, если ее на такие две части разделить невозможно. Так, фигура, состоящая из всех точек прямолинейного отрезка, кроме его середины, несвязна, так как она распадается на два отрезка половинной длины, отделенных друг от друга выкинутой серединой, причем любая фиксированная точка, например, правого отрезка не бесконечно близка к левому отрезку, так как находится от него на конечном расстоянии. Тем более несвязна фигура, состоящая из двух отрезков, отделенных друг от друга не одной точкой, а целым промежутком. Прямолинейный отрезок дает простой пример связной фигуры (строгое доказательство см. в п. **3.3**, где понятие связности излагается подробнее). Если фигура несвязна, то она распадается на связные части, называемые *компонентами* данной фигуры (см. п. **3.3**). Компонента может состоять из одной лишь точки, например буква *i* состоит из двух компонент, одна из которых есть «точка над *i*».

0.4. Топологические инварианты. Для доказательства гомеоморфизма двух фигур достаточно установить хотя бы одним способом топологическое соответствие между их точками. Гораздо труднее обычно бывает доказать, что какие-нибудь две фигуры не гомеоморфны, потому что при этом приходится доказывать, что топологическое соответствие между такими фигурами вообще невозможно, т. е. какое бы соответствие между их точками ни установить, оно неизбежно окажется не топологическим. Чаще всего для доказательства топологического различия двух фигур стараются найти какое-нибудь топологическое свойство, которое принадлежит одной из них и не принадлежит другой. На основании самого определения топологического свойства такие фигуры не могут быть гомеоморфны. Приведем пример: тор (поверхность кольца, спасательного круга) и сфера наверное не гомеоморфны, так как на торе можно провести замкнутый разрез (например, по экватору), который не разбивает тор на две части, а на сфере такого разреза провести нельзя: *всякая замкнутая линия на сфере разбивает ее*. Последнее утверждение далеко не очевидно (оно называется *теоремой Жордана* для сферы и его доказательство совсем не просто, поэтому нет возможности его здесь привести). Конечно, вполне очевидно, что, например, любая окружность разбивает сферу на два куска, но нам надо увериться, что *любая замкнутая линия* разбивает сферу; ведь можно было бы предположить, что топологическое отображение тора на сферу возможно, но так сложно, что переводит экватор тора в какую-то очень

извилистую замкнутую линию на сфере. Так вот, теорема Жордана утверждает, что любая сколь угодно извилистая замкнутая линия на сфере разбивает сферу. Теорема Жордана устанавливает некоторое топологическое свойство сферы. Этим свойством не обладает тор; значит, сфера и тор не гомеоморфны.

Топологические свойства фигур иногда характеризуют числом или каким-нибудь, например алгебраическим, объектом (многочленом, группой и т. п.) таким образом, чтобы гомеоморфным фигурам соответствовали равные числа или одинаковые (точнее, изоморфные) объекты [1]). В этом случае говорят о топологических инвариантах. Это — математические объекты, однозначно сопоставленные фигурам и не меняющиеся при топологических преобразованиях фигур. (В сущности, всякое топологическое свойство фигуры есть ее топологический инвариант.) Так, число компонент (отдельных кусков), из которых состоит фигура, есть ее топологический инвариант. Число точек самопересечения плоской кривой — ее топологический инвариант. В дальнейшем будет приведено немало примеров топологических инвариантов. Подчеркнем еще раз, что если какой-нибудь топологический инвариант имеет различные значения для двух фигур, то эти фигуры не гомеоморфны.

Само число измерений (размерность) пространства является топологическим инвариантом. Например, трехмерный куб нельзя топологически отобразить на квадрат. Это обстоятельство было впервые доказано Брауэром в 1911 году. Что это — не само собой разумеющийся факт (наоборот, трудная теорема), Вам станет ясно, если Вы вспомните, что куб можно взаимно однозначно отобразить на квадрат. Но такое отображение не может быть взаимно непрерывным — в этом и заключается суть инвариантности числа измерений.

0.5. Внутренние и невнутренние свойства. Изотопия. Топологические свойства фигуры были определены как такие свойства, которые сохраняются при всех топологических ее преобразованиях. В этом определении нет ни слова о том пространстве, в котором данная фигура лежит; фигура рассматривается как некий замкнутый мир, и все то, что находится вне ее, нас в эту минуту не интересует. Совокупность таким образом определенных топологических свойств фигуры образует внутреннюю топологию этой фигуры. Теперь возникает вопрос о так сказать невнутренней топологии, «топологии положения», трактующей о свойствах данной фигуры по отношению к окружающему ее пространству. Совершенно так же, как мы рассматривали свойства фигуры, сохраняющиеся при топологических отображениях ее, мы можем рассматривать те ее свойства, которые сохраняются лишь при топологических преобразованиях всего пространства,

[1]) Об изоморфизме, например, групп см. ЭЭМ, кн. II, стр. 293.

в котором она лежит. Мы назвали две фигуры гомеоморфными, если одна из них может быть переведена в другую топологическим преобразованием самой фигуры. Назовем две фигуры *изотопными* (полнее, *изотопными относительно данного пространства*), если одна в другую может быть переведена топологическим преобразованием всего пространства в себя. Топологические свойства самой фигуры (внутренние топологические свойства) — это те ее свойства, которые принадлежат и всем фигурам, гомеоморфным данной. Те же свойства фигуры, которые обязательно принадлежат лишь всякой изотопной с нею (но не обязательно принадлежат всем фигурам, гомеоморфным данной), суть топологические свойства расположения фигуры в пространстве. Дадим примеры изотопных, а также гомеоморфных, но неизотопных фигур.

Две окружности, а также окружность и эллипс изотопны относительно плоскости, в которой они лежат. Боковая поверхность цилиндра и плоская кольцевая область изотопны относительно трехмерного пространства. Однако боковая поверхность цилиндра и поверхность, которую можно получить из длинной прямоугольной полоски, перекручивая ее вокруг длинной оси на 360° и затем склеивая ее короткие края (рис. 3), гомеоморфны, но не изотопны

Рис. 3.

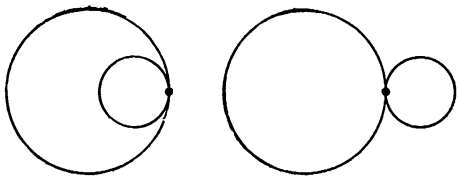


Рис. 4.

относительно пространства. Фигура, состоящая из двух окружностей плоскости, касающихся друг друга внутренним образом, и фигура, составленная из таких же окружностей, но касающихся друг друга внешним образом, гомеоморфны, но не изотопны относительно плоскости (рис. 4); относительно же трехмерного пространства они изотопны. Фигура, состоящая из двух зацепленных окружностей, гомеоморфна, но не изотопна фигуре, состоящей из двух незацепленных окружностей без общих точек (рис. 5). Заузленная замкнутая линия гомеоморфна, но не изотопна незаузленной (рис. 6). Две окружности на плоскости всегда изотопны, но экваториальная и меридиональная окружности тора не изотопны относительно внутренности тора — части пространства, вырезанной из него тором. (Меридиан непрерывной деформацией по внутренности тора можно стянуть в точку, экватор — нельзя!) Интересно, что эти окружности изотопны относительно самого тора

(поверхности); это значит, что тор может быть так топологически отображен на себя, что меридиан перейдет в экватор.

Можно сказать, что внутренние свойства фигуры суть свойства, для описания которых достаточно пользоваться лишь отношениями между элементами самой фигуры, не привлекая каких бы то ни было построений, выходящих за ее пределы. Внутренние

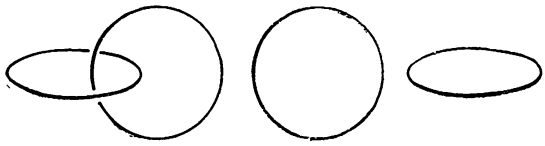


Рис. 5.

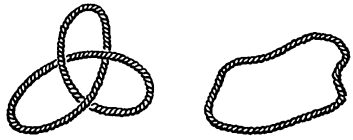


Рис. 6.

свойства фигуры, таким образом, могли бы быть познаны воображаемым существом, живущим в данной фигуре и не имеющим возможности общения с внешним пространством.

Деление свойств на внутренние и невнутренние касается не только топологических свойств. Это же разделение играет существенную роль, например, в дифференциальной геометрии. Две поверхности, изгибаемые друг в друга (без растяжений и сжатий), имеют тождественными все внутренние дифференциально геометрические свойства (ср. выше, стр. 470).

§ 1. Линии и поверхности

Познакомимся с топологическими свойствами линий и поверхностей, т. е. геометрических фигур одного и двух измерений.

1.1. Линия. *Простой дугой* называется множество точек, гомеоморфное прямолинейному отрезку. Это — простейшая из линий. Важно заметить, что из всех точек простой дуги две точки — они называются ее *концами* или *вершинами* — играют особую роль: при всех топологических отображениях простой дуги на себя они переходят сами в себя или друг в друга, между тем как все остальные ее точки (*внутренние точки* дуги) совершенно равноправны с точки зрения топологии: для каждых двух таких точек x и x' можно найти топологическое отображение простой дуги на себя, переводящее x в x'. Другими словами, любые две внутренние точки простой дуги изотопны относительно нее; внутренняя точка и конец не изотопны. Так как простая дуга, по определению, гомеоморфна прямолинейному отрезку, то высказанные утверждения достаточно доказать для концов и внутренних точек прямолинейного отрезка. Любую внутреннюю его точку x можно перевести в любую другую внутреннюю точку x', например, при помощи двух центральных проектирований, подходящим образом выбранных

(см. рис. 7). Чтобы показать невозможность топологическим преобразованием отрезка перевести его конец во внутреннюю точку, достаточно указать топологическое свойство, которым обладает конец и не обладает внутренняя точка. Таким свойством может служить следующий факт: если из отрезка удалить один конец, то остаток будет связным множеством. При удалении любой внутренней точки связность нарушается. Таким образом доказывается топологическая инвариантность понятия конец простой дуги.

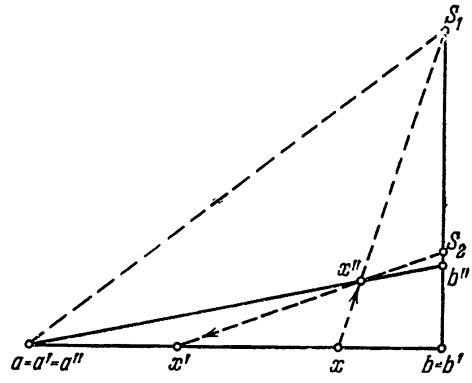


Рис. 7.

Линией будем называть связную фигуру, которую можно составить из конечного числа простых дуг, не имеющих общих точек за исключением некоторых общих концов. Точка, являющаяся общим концом точно двух дуг, а также внутренняя точка любой из дуг называются *регулярной точкой* линии; точка, являющаяся общим концом k дуг, называется *точкой ветвления индекса* k при $k \geqslant 3$ и *концевой точкой*, или *концом* линии, при $k = 1$. Топологическая инвариантность этих понятий легко доказывается; вот топологическое свойство, которым характеризуется точка индекса k: в любой окрестности такой точки a можно найти k точек, при удалении которых линия превращается в несвязную фигуру, причем компонента последней, содержащая a, лежит в этой окрестности; число k является минимальным из чисел, удовлетворяющих такому условию. Этим дается топологически инвариантное определение индексу ветвления, а вместе с тем доказывается топологическая инвариантность понятий конца линии, регулярной точки, точки ветвления. Только что приведенные рассуждения превращаются в строгие доказательства, если опираться на изложенное в § 3 по поводу понятия связности (см. п. **3.3**).

Линия, все точки которой регулярны, называется *простой замкнутой линией*. Она гомеоморфна окружности.

Индекс точки позволяет дать простой признак, позволяющий узнать, можно ли данную линию начертить, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя карандашом дважды никакой дуги (*уникурсальная линия*). Это возможно тогда и только тогда, когда линия имеет не более двух точек нечетного индекса. Карандаш, проходя через точку, каждый раз увеличивает ее индекс на две

единицы, поэтому нечетный индекс могут иметь только начальная и конечная точки. Достаточность признака доказывается несколько труднее. Самостоятельное проведение этого доказательства может послужить хорошим упражнением.

Заметим, что число точек нечетного индекса всегда четно, так как сумма индексов всех вершин, как легко видеть, равна удвоенному числу простых дуг, из которых составлена линия.

Линия, не содержащая в себе никакой простой замкнутой линии, как части, называется *ациклической линией*, или деревом.

Обобщая способ составления линии из простых дуг, приходят к понятию линейного комплекса.

1.2. Линейный комплекс. Конечное множество точек будем называть *нульмерным комплексом*. Точки этого множества называют *вершинами комплекса*.

Одномерный (или *линейный*) *комплекс* есть множество, состоящее из конечного числа простых дуг (*ребра комплекса*) и конечного числа точек (его *вершин*), причем выполняются следующие условия: 1) любые два ребра либо не имеют общих точек, либо имеют только один общий конец; каждая вершина либо не принадлежит ни одному ребру (в этом случае она называется *свободной* или *изолированной*), либо служит концом одного или нескольких ребер; 2) оба конца каждого ребра являются вершинами комплекса. Число ребер комплекса обозначается через α_1, число вершин — через α_0.

Комплекс называется *связным*, если он не может быть разбит на два комплекса без общих вершин. В противном случае комплекс распадается на некоторое число p_0 связных комплексов без общих вершин и без общих ребер. Эти связные комплексы назовем *компонентами* данного комплекса (иные из них могут состоять всего из одной вершины).

Легко видеть, что в связном комплексе K любые две вершины a и b можно соединить ломаной, составленной из ребер aa_1, $a_1a_2, \ldots, a_{n-1}b$ комплекса, причем каждые два соседних ребра в этой последовательности имеют общий конец; a является концом первого ребра, b — концом последнего. Действительно, допустим, что это не так; тогда совокупность тех вершин, которые можно соединить такими цепочками с a, не исчерпывает всей совокупности вершин комплекса K. Указанная совокупность вместе со всеми ребрами, концы которых вошли в нее, образует некоторый комплекс K_1. Все остальные вершины и ребра, как нетрудно убедиться, тоже образуют комплекс K_2. Итак, данный комплекс K разбился на два комплекса без общих вершин, и потому он не может быть связным, что противоречит условию.

Наоборот, если в комплексе любые две вершины можно связать цепочкой ребер указанного вида, то комплекс связен.

Связный комплекс, каждая вершина которого является общим концом точно двух ребер, называется *простым циклом*. Рассматривая множество, объединяющее точки всех ребер и все вершины простого цикла, мы, очевидно, получаем простую замкнутую линию.

1.3. Порядок связности. Переходим к определению важного понятия порядка связности линейного комплекса. Заметим, что, если из комплекса K удалить одно ребро (не удаляя ни одной вершины), то возникнет новый комплекс K^*; число компонент комплекса K^* будет то же, что у K, если удаляемое ребро связывает две вершины одной и той же компоненты комплекса K^*, и на единицу больше, чем у K, если оно связывает вершины разных компонент комплекса K^*. Назовем *порядком связности* $p_1(K)$ линейного комплекса K максимальное число ребер, которые можно удалить из него, не меняя числа компонент.

Для обращения в нуль числа p_1 необходимо и достаточно, чтобы K не содержал никакого простого цикла. В этом случае

$$\alpha_0 - \alpha_1 = p_0. \tag{1}$$

В самом деле, при $\alpha_1 = 0$ это очевидно. Пусть соотношение (1) верно для $\alpha_1 = n-1$; докажем его для $\alpha_1 = n$. Для этого удалим из K какое-нибудь ребро (при этом концы его остаются в комплексе); так как $p_1(K) = 0$, то возникший при этом комплекс K^* имеет число компонент на единицу больше: $p_0(K^*) = p_0(K) + 1$. Теперь применим доказываемое соотношение (мы допустили его справедливость при $\alpha_1 = n-1$) к комплексу K^*, порядок связности которого $p_1(K^*) = 0$, так как при удалении ребра порядок связности p_1 не мог возрасти (не могло появиться простого цикла). Получим:

$$\alpha_0 - (\alpha_1 - 1) = p_0 + 1,$$

или

$$\alpha_0 - \alpha_1 = p_0,$$

что и требовалось.

Пусть теперь $p_1 \neq 0$. В этом случае из K можно удалить p_1 ребер таким образом, чтобы оставшийся комплекс K^* имел то же число компонент p_0, что и K. В силу максимального свойства числа p_1 из K^* уже нельзя удалять ребер, не меняя при этом p_0; таким образом $p_1(K^*) = 0$, и, следовательно, к комплексу K^* можно применить формулу (1):

$$\alpha_0 - (\alpha_1 - p_1) = p_0.$$

Отсюда получаем:

$$\alpha_0 - \alpha_1 = p_0 - p_1. \tag{2}$$

Выражение, стоящее слева, носит название *эйлеровой характеристики* комплекса и обозначается через $\chi(K)$.

Пример. Пусть K состоит из p простых циклов без общих элементов. Так как $\alpha_0 = \alpha_1$, то по формуле (2) $p_1 = p_0 = p$.

Порядку связности можно дать другое определение — алгебраическое. Для этого удобно заранее на каждом ребре нашего линейного комплекса установить некоторое направление и ориентированное таким образом ребро обозначить одной буквой a_k, $k=1, 2, \ldots, \alpha_1$; выбор направления на каждом ребре совершенно произволен, но раз навсегда закреплен обозначением a_k. Если нужно рассматривать то же ребро, но с противоположным направлением, его условливаются обозначать символом $-a_k$.

Будем теперь каждый простой цикл Z (который мы предполагаем ориентированным, т. е. рассматриваем его с выбранным на нем направлением обхода) записывать формально в виде «алгебраической суммы» составляющих его ребер. Именно, если направление ребра a_k, входящего в цикл, согласуется с направлением цикла, то включим его в сумму со знаком «$+$», если не согласуется, — то со знаком «$-$»; если какое-нибудь ребро совсем не входит в цикл Z, скажем, что оно входит в сумму с коэффициентом нуль. При этом цикл Z запишется в виде линейной формы:

$$Z=\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\ldots+\varepsilon_{\alpha_1} a_{\alpha_1},$$

где каждый из коэффициентов ε_k равен $+1$, -1 или 0. Такая запись имеет лишь тот реальный смысл, что ребро a_k входит в Z со своей ориентацией или с противоположной — соответственно значению $+1$, или -1 для ε_k, или вовсе в Z не входит, если $\varepsilon_k=0$.

Будем теперь рассматривать линейные комбинации простых циклов, применяя при этом произвольные целочисленные коэффициенты. Такая линейная комбинация простых циклов, вообще говоря, уже не будет простым циклом; назовем ее *циклом*. Каждый цикл после «приведения подобных членов» превратится в некоторую линейную форму вида

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_{\alpha_1} a_{\alpha_1}, \tag{3}$$

но здесь коэффициенты λ_k могут принимать уже любые целые значения (однако не совсем произвольно: при наугад выбранных коэффициентах λ_k эта форма (или *цепь*) может не быть циклом, т. е. может не являться линейной комбинацией простых циклов). Заметим, что каждый цикл (3) можно представить в виде линейной комбинации простых циклов, составленных из существенных ребер цикла, т. е. из ребер, при которых в выражении (3) стоят ненулевые коэффициенты.

Теперь мы можем дать алгебраическое определение порядка связности: *порядок связности* линейного комплекса K есть максимальное число линейно независимых циклов.

Это определение эквивалентно определению числа $p_1(K)$, которое было дано ранее. Действительно, мы сейчас покажем, что

в комплексе K существует $p_1(K)$ линейно независимых простых циклов $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p_1}$ и притом таких, что любой цикл через них линейно выражается.

Пусть $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{p_1}$ — те ребра, которые можно удалить из комплекса K так, что оставшийся комплекс K^* будет иметь то же число компонент. Это значит, что оба конца каждого из этих ребер a'_k принадлежат одной компоненте K^* и, следовательно, могут быть внутри этой компоненты соединены простой цепочкой ребер. Каждая такая цепочка вместе с соответствующим ребром a'_k образует простой цикл Z_k (считаем его ориентированным соответственно ориентации ребра a'_k). Ясно, что циклы $Z_1, \ldots, Z_{p_1}$ линейно независимы; действительно, любая линейная их комбинация $\lambda_1 Z_1 + \ldots + \lambda_{p_1} Z_{p_1}$ содержит ребро a'_k точно λ_k раз, и, следовательно, для обращения ее в нуль необходимо, чтобы $\lambda_k = 0$. Итак, все коэффициенты линейной комбинации должны обращаться в нуль, если она равна нулю, а это и значит, что циклы $Z_1, \ldots, Z_{p_1}$ линейно независимы.

Покажем теперь, что любой цикл линейно выражается через циклы $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p_1}$. Для этого заметим прежде всего, что любой цикл, не равный нулю, должен в числе своих существенных ребер содержать хоть одно из ребер $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{p_1}$. В противном случае из него можно было бы выделить простой цикл, не содержащий ни одного из названных ребер, и тогда из комплекса K сверх ребер $a'_1, \ldots, a'_{p_1}$ можно было бы удалить еще любое ребро этого простого цикла, не меняя числа компонент комплекса K, что противоречит максимальности числа p_1.

Пусть Z — любой цикл из K:

$$Z = \mu_1 a'_1 + \ldots + \mu_{p_1} a'_{p_1} + R,$$

где через R обозначена сумма членов, не содержащих ребер $a'_1, \ldots, a'_{p_1}$. Составим цикл $Z - \mu_1 Z_1 - \ldots - \mu_{p_1} Z_{p_1}$. Этот цикл не содержит в качестве своих существенных ребер ни одного ребра a'_k, $k = 1, \ldots, p_1$; значит, по только что сделанному замечанию он равен нулю: $Z - \mu_1 Z_1 - \ldots - \mu_{p_1} Z_{p_1} = 0$, т. е. любой цикл Z из K линейно выражается через $Z_1, \ldots, Z_{p_1}$.

В заключение отметим следующее свойство порядка связности, которое может быть названо правилом монотонности:

Если K^* есть подкомплекс линейного комплекса K (т. е. комплекс, являющийся частью комплекса K), то $p_1(K^*) \leqslant p_1(K)$. В самом деле, переход от K к K^* можно осуществить последовательным отбрасыванием лишних ребер, а затем — лишних вершин. Так как $p_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + p_0$, то, отбрасывая одно ребро, мы или вовсе не изменим p_1 (если p_0 при этом увеличилось на единицу),

или уменьшим p_1 на 1 (если p_0 не изменилось); отбрасывая вершину (конечно, изолированную — иначе не получился бы комплекс), мы уменьшаем α_0 и p_0 на 1; при этом p_1 не меняется.

1.4. Топологическая инвариантность эйлеровой характеристики линейного комплекса. Совокупность внутренних точек всех ребер линейного комплекса и всех его вершин обозначается через $|K|$ и называется *телом* комплекса K.

Довольно просто доказать, что порядок связности $p_1(K)$ является топологическим инвариантом множества $|K|$; другими словами, если $|K_1|$ и $|K_2|$ гомеоморфны, то $p_1(K_1)=p_1(K_2)$. Вот сущность этого доказательства: порядок связности может быть инвариантно по отношению к $|K|$ определен как максимальное число регулярных в $|K|$ точек, которые можно удалить из $|K|$, не меняя числа компонент (такая максимальная система регулярных точек получится, если взять по одной внутренней точке на каждом из p_1 ребер, удаляемых из K при определении порядка связности).

Инвариантность числа $p_0(K)$ очевидна, так как $p_0(K)$ является не только числом компонент комплекса K, но и числом компонент множества $|K|$. Инвариантность чисел $p_0(K)$ и $p_1(K)$ влечет за собой и топологическую инвариантность эйлеровой характеристики $\chi(K)$, ибо, по определению,

$$\chi(K)=p_0(K)-p_1(K).$$

1.5. Двумерный комплекс. Линейный комплекс является обобщением элементарно-геометрического понятия ломаной линии; от последней он существенно отличается тем, что может состоять из нескольких отдельных кусков и может содержать изолированные вершины. Обобщая понятие многогранной поверхности, приходим к понятию двумерного комплекса.

Здесь основными элементами (клетками комплекса) будут служить вершины, ребра и грани. Вершины — это точки, ребра — отрезки; в качестве граней мы будем допускать произвольные выпуклые многоугольники. Стороны и вершины данной грани будем называть *элементами* (или *клетками*), ей подчиненными; концы данного ребра будем называть *элементами* (*клетками*), ему подчиненными. Для общности формулировок будем, кроме того, говорить, что каждый элемент подчинен сам себе.

Определение. *Двумерным комплексом* называется система конечного числа элементов трех родов: *граней*, *ребер* и *вершин*, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) любые два элемента системы либо вовсе не имеют общих точек, либо множество их общих точек составляет элемент, подчиненный им обоим;

2) элемент, подчиненный какому-либо элементу системы, сам принадлежит системе.

Числа вершин, ребер и граней (нуль-, одно-, двумерных клеток комплекса) обозначается соответственно через α_0, α_1, α_2. Если $\alpha_2 = 0$, то комплекс уже не будет двумерным, он превращается в одномерный (если $\alpha_1 \neq 0$) или в нульмерный (если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 \neq 0$).

Считают, что два комплекса имеют одинаковую структуру, и называют их *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между гранями, ребрами и вершинами одного и соответственно гранями, ребрами и вершинами другого так, чтобы отношение подчинения клеток при этом соответствии сохранялось.

Множество клеток комплекса, которым подчинена данная вершина a^0, называется ее *звездой* в этом комплексе.

Как и в случае линейного комплекса, назовем двумерный комплекс *связным*, если его нельзя разбить на два комплекса без общих вершин. В противном случае комплекс распадается на некоторое число p_0 связных комплексов без общих элементов. Эти комплексы называются *компонентами* начального. В связном двумерном комплексе совокупность ребер и вершин образует связный линейный комплекс. Нетрудно видеть, что возможность любые две вершины соединить простой ломаной и здесь является необходимым и достаточным условием связности. Телом комплекса K называется совокупность точек, принадлежащих клеткам комплекса; оно обозначается через $|K|$.

Замечания к определению комплекса. 1. В определении комплекса под словом «грань» можно понимать также и «кривую грань», т. е. такое множество точек, на которое при помощи некоторого определенного топологического соответствия φ отображен обычный выпуклый многоугольник. «Ребра» и «вершины» кривой грани суть образы при этом соответствии φ сторон и вершин выпуклого многоугольника. Так, сферический треугольник является топологическим образом прямолинейного треугольника, имеющего общие с ним вершины, если соответствие φ установить, например, проектированием из центра сферы.

Подобно граням, и ребра комплекса являются, вообще говоря, «кривыми ребрами», т. е. топологическими образами прямолинейных отрезков.

Удобнее всего представить такой общий комплекс с кривыми гранями следующим образом. Взяв комплекс, составленный из обыкновенных выпуклых многоугольников, подвергнем затем его тело произвольному топологическому преобразованию; тогда каждый элемент его перейдет, вообще говоря, в «кривой» элемент, а весь комплекс обратится в систему таких «кривых» элементов, причем, конечно, условия 1) и 2) сохраняются.

2. Для того чтобы изучать свойства комплекса, нет необходимости его фактически реализовать в пространстве. Достаточно

указать для каждой вершины из числа α_0, каким ребрам она принадлежит, для каждого из α_1 ребер — каким граням оно принадлежит. Этим уже вполне задается структура комплекса. Может, однако, оказаться, что заданный таким образом комплекс нельзя без самопересечений поместить в наше пространство (таких примеров в дальнейшем будет немало), как нельзя, например, поместить в плоскости линейный комплекс, составленный из пяти вершин и десяти ребер, связывающих каждые две из них (см. рис. 25 на стр. 518). В таком случае этот комплекс можно реализовать с самопересечениями, но эти самопересечения условно считать не существующими.

1.6. Замкнутые поверхности. Перейдем к общему определению замкнутой поверхности. *Замкнутая поверхность* (или *замкнутое двумерное многообразие*) — это такое связное множество F, у каждой точки которого есть окрестность, гомеоморфная внутренности круга, и которое может быть разбито на двумерные элементы, образующие вместе со своими ребрами и вершинами двумерный связный комплекс K^2. Этому определению можно придать чисто

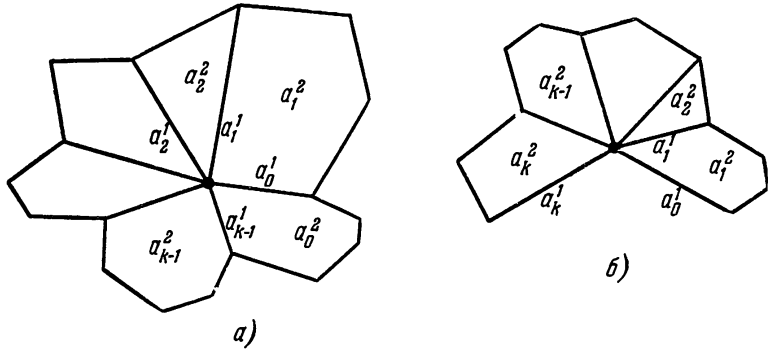


Рис. 8.

комбинаторную форму: замкнутая поверхность есть тело связного двумерного комплекса K^2, удовлетворяющего условию:

А. Все элементы с общей вершиной a^0 образуют *циклическую звезду* $a_0^2 a_0^1 a_1^2 a_1^1 \ldots a_{k-1}^2 a_{k-1}^1$ (рис. 8, *а*), в которой две соседние грани a_i^2 и a_{i+1}^2 ($a_k = a_0$) имеют общее ребро a_i^1, а два несоседних не имеют, кроме a^0, общих точек. (Здесь, как и всегда, верхний значок указывает на число измерений элемента.) Комплекс K^2 называется *клеточным разбиением* поверхности [1]).

[1]) В том случае, если все грани комплекса K^2 суть треугольники, клеточное разбиение называют также *триангуляцией* поверхности.

Условие **А** устанавливает топологическую однородность поверхности: для каждой ее точки p можно указать такой кусок поверхности, содержащий p (окрестность точки p), который может быть топологически отображен на круг, причем p отображается в центр круга. Если p — внутренняя точка грани, это очевидно, так как в этом случае вокруг p можно описать круг, всеми своими точками лежащий в этой грани. Если p — внутренняя точка ребра, то, так как из условия **А** вытекает, что каждое ребро принадлежит точно двум граням, можно искомый кусок составить из двух полукругов, описанных вокруг p соответственно в каждой из этих граней. Наконец, если p есть вершина a^0, то из каждой грани a_i^2 звезды a^0 можно выделить круговой сектор с центром в a^0 так, что все k таких секторов образуют на F окрестность точки a^0, составленную из этих секторов, как круг, разбитый k радиусами на k секторов. Можно доказать и обратно, что из первого определения вытекает условие **А**.

Как было только что сказано, из условия **А** вытекает, что *к каждому ребру примыкают две и только две грани*; однако условие **А** сильнее последнего утверждения. Так, поверхность $(x^2+y^2+z^2)^2=(x^2-y^2+z^2)$ [поверхность вращения лемнискаты $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)$ вокруг оси y] не может быть разбита на простые области, удовлетворяющие условию **А**, и поэтому не является «замкнутой поверхностью» в смысле данного выше определения: окрестность начала координат состоит из двух кусков, соприкасающихся между собой, подобно двум полостям конуса, лишь в одной точке — вершине. Между тем клеточное разбиение этой поверхности удовлетворяет тому условию, что к каждому ребру примыкают точно две грани.

Из условия **А**, кроме того, следует, что *любые две грани* a_p^2 *и* a_q^2 *можно связать цепочкой граней*: $a_p^2=a_{k_1}^2$, $a_{k_2}^2$, ... $a_{k_s}^2=a_q^2$, *в которой соседние грани* a_{ki}^2 *и* a_{ki+1}^2 *имеют общее ребро*. Действительно, если бы это было не так, то совокупность граней, которые могут быть соединены с a_p^2 подобными цепочками, не исчерпывала бы всего множества граней комплекса K^2. В этом случае все элементы комплекса K^2 можно было бы распределить в два класса, отнеся в первый все грани только что рассмотренной совокупности, все их ребра и вершины, а во второй — все прочие элементы комплекса K^2. Первый класс естественно является комплексом, так как для него выполнены условия 1) и 2) п. **1.5**. Но второй класс также является комплексом: условие 1) выполнено для него, так как он составляет часть комплекса K^2; условие 2) также должно быть выполнено, ибо в противном случае нашлась бы во втором классе грань a^2 (или ребро, а значит и обе примыкающие к нему грани) с вершиной, не принадлежащей второму

классу, следовательно принадлежащей первому классу. Эта вершина a^0, таким образом, должна быть вершиной некоторой грани $'a^2$ из первого класса. Грани a^2 и $'a^2$, входя в звезду вершины a_0, на основании условия **A** могут быть связаны цепочкой смежных граней; $'a^2$ может быть связано такой цепочкой с a_p, значит, то же можно утверждать и об a_2, вопреки предположению. Итак, второй класс является комплексом. Но тогда K^2 не может быть связным комплексом, так как его удалось разбить на два комплекса без общих вершин. Это противоречие с определением поверхности F доказывает наше утверждение.

(Приведенное доказательство остается в силе и для «поверхностей с краем», см. п. **1.7**, только вместо условия **A** следует опираться на условие **B** в п. **1.7**.)

1.7. Поверхности с краем. Кроме замкнутых поверхностей, нас будут интересовать так называемые *поверхности с краем*. Определение последних буквально совпадает с определением замкнутых поверхностей, лишь условие **A** должно быть заменено следующим условием:

B. Элементы, которым подчинена каждая данная вершина a^0, образуют либо *циклическую звезду* $a_0^2 a_0^1 a_1^2 a_1^1 \ldots a_{k-1}^2 a_{k-1}^1$ (см. условие **A**), либо *полуциклическую звезду* $a_0^1 a_1^2 a_1^1 a_2^2 \ldots a_k^2 a_k^1$ (рис. 8, *б*), в которой две соседние грани a_i^2 и a_{i+1}^2 имеют общее ребро a_i^1, а две несоседние не имеют, кроме a^0, общих точек. При этом к ребру a_0^1 примыкает только одна грань (именно a_1^2) и к ребру a_k^1 также одна (именно a_k^2).

Если вершина a^0 обладает полуциклической звездой, то из каждой грани a_i^2 этой звезды можно выделить круговой сектор с центром в a^0 так, что все k таких секторов образуют на поверхности окрестность точки a^0, составленную из этих секторов, как полукруг, разбитый $k-1$ радиусами на k секторов.

У замкнутой поверхности каждой вершине клеточного разбиения соответствует циклическая звезда, поэтому каждое ребро принадлежит точно двум граням. Здесь же наряду с вершинами, обладающими циклическими звездами, существуют вершины с полуциклическими звездами; поэтому наряду с ребрами, принадлежащими двум граням, существуют ребра, принадлежащие только одной грани. Вершины и ребра первого типа назовем *внутренними*, вершины и ребра второго — *граничными*. Совокупность граничных вершин и ребер образует линейный комплекс, называемый *краем поверхности* или, лучше, *краем клеточного разбиения поверхности*. Легко исследовать его структуру. К произвольной граничной вершине примыкают точно два граничных ребра (первое и последнее ребро соответствующей полуциклической звезды). Произвольное граничное ребро соединяет две граничные вершины, поэтому,

отправляясь от некоторой граничной вершины a_0^0 и выбирая одно из примыкающих к ней граничных ребер a_0^1, мы можем однозначно определить последовательность

$$a_0^0 a_0^1 a_1^0 a_1^1 a_2^0 \ldots \tag{4}$$

граничных вершин и ребер, в которой каждое ребро a_k^1 соединяет две соседние вершины a_k^0 и a_{k+1}^0. Эта последовательность может быть продолжена до тех пор, пока не встретится уже записанная ранее вершина или ребро; конечно, это будет a_0^0. Действительно, это не может быть вершина a_h^0 $(h > 0)$, так как тогда к ней примыкали бы три граничных ребра: a_{h-1}^1, a_h^1 и то ребро, после которого вершина a_h^0 встретилась вторично. Подобным же образом мы заключаем, что это не может быть и какое-нибудь ребро. Итак, последовательность (4) может быть записана так:

$$a_0^0 a_0^1 a_1^0 a_1^1 a_2^0 \ldots a_n^0 a_n^1 a_0^0.$$

Ее элементы образуют простой цикл Γ_1 (см. п. **1.2**). Если этим исчерпывается все множество граничных элементов, то край состоит из одной компоненты — простого цикла Γ_1. В противном случае берем произвольную граничную вершину, не вошедшую в Γ_1, и, отправляясь от нее, как раньше, строим новый простой цикл Γ_2 и т. д., пока не исчерпаем все граничные ребра и вершины. В общем случае край состоит из r простых циклов

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r.$$

Число r есть топологический инвариант: оно не зависит от выбора того или иного клеточного разбиения поверхности.

1.8. Теорема Эйлера. Эйлерова характеристика двумерного комплекса. Л. Эйлер высказал замечательную теорему о многогранниках, важные обобщения которой сделали ее в дальнейшем одной из основных теорем топологии.

Теорема Эйлера. *Для всякого выпуклого многогранника справедливо соотношение*

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

где, как всегда, α_0, α_1, α_2 *— соответственно число вершин, ребер и граней.*

Для доказательства из какой-нибудь точки O пространства, лежащей внутри выпуклого многогранника, опишем сферу единичного радиуса и спроектируем на нее из O вершины и ребра многогранника. Тогда каждое ребро превратится в дугу большого круга на сфере, и вся сфера этими дугами разобьется на сферические многоугольники, причем это разбиение сферы будет

изоморфно данному многограннику. Известно, что площадь s сферического n-угольника (имеется в виду многоугольник, ограниченный дугами больших кругов) равна его сферическому эксцессу, умноженному на квадрат радиуса сферы, т. е. в данном случае $s=\sigma-(n-2)\pi$, где σ — сумма его углов[1]).

В последней формуле величины s, σ, n различны для различных граней. Отмечая значком i величины, относящиеся к i-й грани, получим:

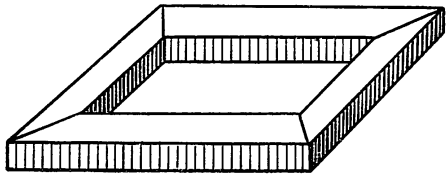


Рис. 9.

$$s_i=\sigma_i-(n_i-2)\pi.$$

Суммируем по i от 1 до α_2:

$$\sum s_i=\sum\sigma_i-\pi\sum(n_i-2).$$

Но $\sum s_i=4\pi$ (площадь всей сферы). Далее, $\sum\sigma_i$ есть сумма углов по всем граням; эту сумму можно подсчитать сперва у каждой вершины; при этом получится, конечно, 2π, а так как у нас всего α_0 вершин, то $\sum\sigma_i=2\pi\alpha_0$. Наконец, $\sum n_i$ есть сумма чисел сторон по граням; ясно, что эта сумма равна удвоенному числу ребер, так как каждое ребро будет подсчитано дважды, ибо оно входит в две грани: $\sum n_i=2\alpha_i$. Следовательно, $\sum(n_i-2)=2\alpha_i-2\alpha_2$.

Итак, имеем:

$$4\pi=2\pi\alpha_0-\pi(2\alpha_1-2\alpha_2),\text{ или }\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2.$$

Теорема Эйлера доказана.

Однако доказанная для выпуклого многогранника, эта теорема в таком виде верна не для всякого многогранника, а лишь для многогранника, который может быть «нанесен» на сферу. Так, например, для многогранника, изображенного на рис. 9, гомеоморфного тору, $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=0$.

Оказывается, что выражение $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$, называемое эйлеровой характеристикой поверхности, вовсе не зависит от того или иного клеточного ее разбиения, а выражает некоторое топологическое свойство данной поверхности и всех ей гомеоморфных, т. е. является ее топологическим инвариантом.

1.9. Эйлерова характеристика поверхности. Докажем, что для всякой поверхности (замкнутой или с краем) эйлерова характеристика $\leqslant 2$. Пусть K — некоторое клеточное разбиение нашей поверхности. Перенумеруем его грани в таком порядке, чтобы каждая следующая грань a^2_{s+1} примыкала к одной из предыдущих a^2_1, a^2_2, ..., a^2_s по некоторому ребру b^1_s. Удалив из K грань a^2_1, получим комплекс K_1, затем, удалив ребро b_1 и грань a^2_2, получим

[1]) См. ЭЭМ, кн. IV, стр. 539.

комплекс K_2 и т. д., пока не исчерпаем все α_2 граней. При этом получится уже линейный комплекс K_{α_2}. Легко видеть, что комплекс K_{α_2} связен, так как, удаляя из связного комплекса одну грань или одну грань и одно из ее ребер, к которому не примыкают другие грани, мы не нарушаем связности. Действительно, если любые две вершины могли быть связаны ломаной линией, то после удаления только грани это свойство, конечно, не могло нарушиться; после удаления грани и одного ее ребра это свойство тоже не может нарушиться, так как, если линия содержит удаляемое ребро, то его можно заменить в цепочке последовательностью остальных ребер удаляемой грани.

Итак, можно последовательно заключить о связности комплексов K_1, K_2, ..., K_{α_2}. Связный линейный комплекс K_{α_2} имеет α_0 вершин и $\alpha_1-(\alpha_2-1)$ ребер. Таким образом, обозначая его порядок связности $p_1(K_{\alpha_2})$ через q, получим по формуле (2) на стр. 487

$$\alpha_0-[\alpha_1-(\alpha_2-1)]=p_0(K_{\alpha_2})-p_1(K_{\alpha_2})=1-q,$$

или

$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2-q.$$

Так как q — порядок связности линейного комплекса, то $q\geqslant 0$, и, значит, эйлерова характеристика поверхности действительно не может быть больше 2; значение 2, как мы видели, достигается для сферы.

Число q называется *порядком связности* поверхности и может быть геометрически определено так: это есть максимальный порядок связности линейного комплекса, который можно удалить из K, не нарушая связности комплекса K.

Число q, так же как и эйлерова характеристика, есть топологический инвариант поверхности.

1.10. Барицентрическое разбиение. Клеточное разбиение поверхности, конечно, является чем-то чуждым самой поверхности. Оно является лишь орудием для изучения поверхности; его роль подобна роли системы координат в аналитической геометрии. Так же как там часто бывает полезен переход к другой системе координат, так и здесь часто переходят к другому клеточному разбиению. Наиболее часто приходится рассматривать *подразбиение* данного клеточного разбиения K. Для единообразия будем всюду пользоваться следующим способом подразбиения, называемым *барицентрическим разбиением комплекса* K.

Определим прежде всего барицентрическое разбиение грани a. Для этого в выпуклом многоугольнике A, являющемся ее прообразом, $a=\varphi(A)$, отметим центр тяжести O и соединим его прямолинейными отрезками со всеми вершинами и со всеми серединами ребер. Тогда A разобьется на треугольники, а отображение φ перенесет это разбиение в a. Кривые треугольники, на которые

разбилась грань a, вместе с их ребрами и вершинами образуют комплекс, который и называется барицентрическим разбиением грани a.

Производя барицентрическое разбиение всех граней комплекса K^2, мы по определению получаем барицентрическое разбиение комплекса K^2. Это — двумерный комплекс, составленный из всех треугольников, на которые разбились грани комплекса K^2, их сторон и вершин. Будем барицентрическое разбиение комплекса K обозначать через K'. Производя барицентрическое разбиение комплекса K', приходим к комплексу K''. Повторяя операцию барицентрического деления достаточное число раз, мы получим комплекс $K^{(n)}$ со сколь угодно малыми треугольниками. Нетрудно понять, что если начальный комплекс K был связным и удовлетворял условию **А**, то это справедливо и для его барицентрического разбиения $K^{(n)}$.

Подобно тому как в аналитической геометрии интересуются лишь теми свойствами фигур, которые не зависят от системы координат, т. е. являются инвариантами любого преобразования координат, так и здесь мы будем заниматься лишь свойствами, не зависящими от того или иного клеточного разбиения поверхности, — это и будут свойства самой поверхности. Так, уже было упомянуто, что эйлерова характеристика $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ не зависит от выбора клеточного разбиения поверхности: она есть топологический инвариант поверхности. Инвариантность этой величины при барицентрическом подразделении Вы легко докажете сами, и проще всего это сделать так: сперва подразделить только ребра, введя их середины; ясно, что при этом число $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ не изменится, так как при введении середины одного ребра число α_0 увеличивается на $+1$ и число α_1 — тоже. При барицентрическом разделении одной грани характеристика тоже не меняется, так как при этом уничтожается одна старая грань и вводится новая вершина (ее центр); затем вводится столько же новых ребер, сколько и новых граней. Значит, α_0 увеличивается на 1, α_1 увеличивается на $2n$, α_2 увеличивается на $2n-1$, где n — число сторон разбиваемой грани, а число $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ не меняется.

1.11. Дуальное разбиение замкнутой поверхности. Пусть K — клеточное разбиение замкнутой поверхности и K' — барицентрическое разбиение комплекса K. Центры граней разбиения K примем за вершины нового разбиения K; за его ребра примем простые дуги, составленные из двух ребер барицентрического разбиения, соединяющие середину какого-либо ребра комплекса K с центром граней комплекса K, примыкающих к этому ребру; наконец, за грани комплекса K примем куски, на которые разбивается поверхность системой этих новых ребер. Нетрудно понять, что каждая такая грань будет представлять собой объединение всех элементов барицентрической звезды, соответствующей некоторой вершине комп-

лекса K. Важно заметить, что, в силу определения замкнутой поверхности, каждая такая новая грань гомеоморфна выпуклому многоугольнику и, следовательно, может быть принята за грань нового комплекса $\mathcal{Y}$. Чтобы яснее представить соотношение между комплексами K и $\mathcal{Y}$, заметим, что октаэдрическое разбиение сферы (разбиение, получающееся, если вписанный в нее правильный

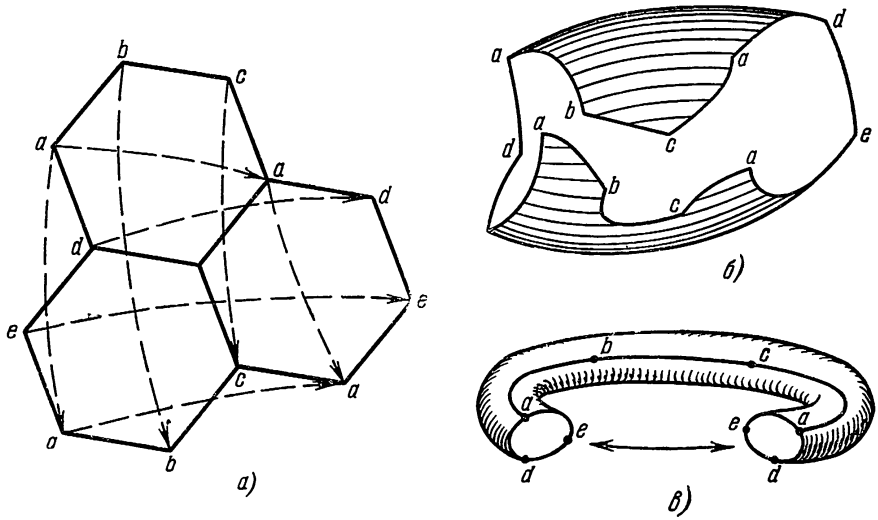


Рис. 10.

октаэдр спроектировать на сферу из ее центра) дуально к кубическому ее разбиению; икосаэдрическое разбиение сферы дуально к додекаэдрическому. Тетраэдрическое разбиение сферы дуально тетраэдрическому же. Еще пример: всю плоскость можно покрыть правильными конгруэнтными треугольниками. Дуальное разбиение даст сеть правильных шестиугольников.

Задача. Тор разбит на три шестиугольника, шесть ребер и три вершины, соединяющихся между собой, как показано на рис. 10. Построить дуальное разбиение. (Заметим, что оба разбиения, данное и дуальное, не удовлетворяют определению комплекса (почему?).)

1.12. Ориентация. Каждой грани можно приписать одну из двух противоположных *ориентаций*, смотря по тому, какое из двух возможных направлений обхода мы выберем на ее границе. Направление на границе можно задать стрелкой на одном из ребер. Тогда соседнее ребро должно быть отмечено стрелкой такого направления, чтобы общая их вершина в одном ребре была концом стрелки, а в другом — началом. Таким образом, исходя от стрелки, заданной на первом ребре, мы снабдим стрелками все ребра данной

грани; причем обойдя всю грань и вернувшись к первому ребру, мы на нем, очевидно, получим стрелку снова того же самого направления.

Возьмем теперь на плоскости какой-нибудь выпуклый многоугольник a и снабдим его стороны стрелками, как только что было описано. Передвинем по плоскости этот многоугольник в новое, смежное с первоначальным, положение a', т. е. так, чтобы a и a' имели общую сторону. Тогда эта общая сторона будет снабжена в первом и втором положении многоугольника стрелками противоположных направлений. Заметив это, будем ориентации двух соседних (т. е. имеющих общую сторону) граней многогранной поверхности называть одинаковыми, если они определяют на их общем ребре противоположные направления.

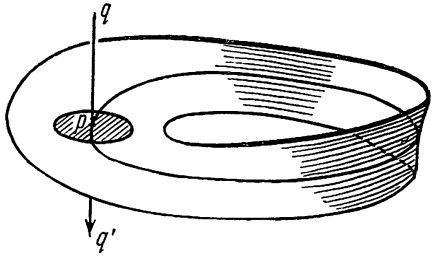


Рис. 11.

Определение. Поверхность называется *ориентируемой*, если каждой грани ее клеточного разбиения можно придать такую ориентацию, чтобы любые две соседние грани были ориентированы одинаково.

Если указанная в этом определении ориентация граней установлена, то говорят, что на поверхности выбрана ориентация или что поверхность ориентирована. Нетрудно видеть, что каждую ориентируемую поверхность при данном клеточном разбиении можно ориентировать двумя и только двумя способами. Действительно, ориентация поверхности однозначно определяется выбором ориентации какой-либо одной из ее граней, а эта последняя может быть ориентирована двумя и только двумя противоположными способами.

Однако существуют такие поверхности, которые в указанном смысле совсем нельзя ориентировать, — неориентируемые поверхности.

Определение. Поверхность называется *неориентируемой*, если при любом выборе ориентации граней ее клеточного разбиения непременно найдутся две соседние грани с неодинаковыми ориентациями.

Простейшей из неориентируемых поверхностей является *поверхность Мёбиуса* (1868 г.). Эту поверхность можно получить из прямоугольной полоски бумаги, склеивая короткие стороны, перекрутив предварительно ее на 180° вокруг средней линии прямоугольника так, чтобы совпали точки коротких сторон, симметричные относительно центра прямоугольника.

У этой поверхности нельзя различить двух сторон: лицевой и изнаночной, как, например, у цилиндрической поверхности или у сферы. Здесь лицевая сторона непрерывно переходит в изнанку, их нельзя отделить (например, выкрасив одну сторону в красный, а другую в синий цвет). Такие поверхности называются *односторонними*; правильнее было бы сказать: поверхности, односторонне расположенные в пространстве. Вот точное определение одностороннего расположения поверхности в пространстве.

Возьмем в точке p поверхности нормаль, а на нормали — две точки q и q', симметрично расположенные относительно p. Когда точка p непрерывно движется по поверхности, то и нормаль непрерывно перемещается. Поверхность расположена односторонне в пространстве, если существует на поверхности такой замкнутый путь, что при обходе вдоль него нормаль $q'pq$, так сказать, переворачивается, т. е. отрезок pq переходит в отрезок pq' и обратно (рис. 11).

Если выполнить поверхность из толстой бумаги так, чтобы можно было эту бумагу разделить на два слоя вдоль всей поверхности, то в случае двустороннего расположения мы получили бы две одинаковые поверхности (из материала, в два раза более тонкого); в случае одностороннего расположения при таком расщеплении получилась бы о д н а (уже двусторонняя) поверхность, но двойной площади. В этом опыте мы наглядно видим, что у поверхности, расположенной односторонне, нельзя отделить лицевую сторону от изнанки.

Кроме односторонности, поверхность Мёбиуса обладает и другими неожиданными свойствами, впрочем, тесно связанными с ее односторонностью. Например, на вопрос: на сколько частей распадается эта поверхность, если разрезать ее вдоль средней линии в о к р у г, — редко услышишь правильный ответ, и обычно лишь ножницы восстанавливают истину.

Убедимся, что поверхность Мёбиуса неориентируема. Разобьем прямоугольник, из которого мы склеили поверхность Мёбиуса, в направлении большой оси на три малых прямоугольника. Если мы выберем ориентацию первого из них, например, против часовой стрелки, то ориентацию второго, а вслед за ним и третьего придется взять тоже против часовой стрелки, но тогда на короткой стороне, по которой было проведено склеивание, мы получим от ориентации первого и от ориентации третьего малых прямоугольников оба раза одно и то же направление, что противоречит условию одинаковости ориентации соседних граней.

Чтобы определение ориентируемости поверхности сделать корректным, следовало бы доказать, что поверхность, оказавшаяся ориентируемой (или неориентируемой) при одном клеточном разбиении, останется такой же при всяком другом клеточном разбиении. Однако это доказательство топологической инвариантности понятия ориентируемости ввиду его сложности придется опустить.

Покажем, что сфера при любом клеточном разбиении оказывается ориентируемой. Для этого достаточно каждой грани сообщить такую ориентацию, чтобы, рассматривая ее из центра сферы, мы видели направление вращения в каждой грани, например, как направление против часовой стрелки. Легко понять, что каждые две соседние грани будут при этом ориентированы одинаково в смысле данного выше определения.

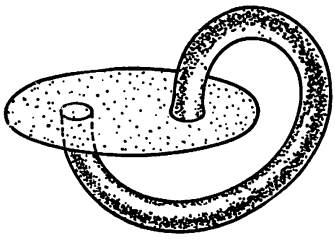


Рис. 12.

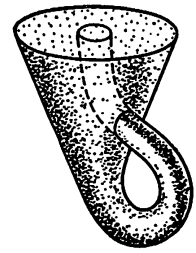


Рис. 13.

Можно доказать, что ориентируемые поверхности в трехмерном евклидовом пространстве расположены всегда двусторонне, неориентируемые — односторонне. Однако в случае более сложных трехмерных многообразий это не всегда так (см. п. **2.10**).

Другим примером неориентируемой (односторонней) поверхности может служить поверхность, изображенная на рис. 12. Если эту поверхность и полусферу склеить по их границам (рис. 13), то получится замкнутая неориентируемая поверхность (так называемая *поверхность Клейна*). На рис. 13 она пересекает сама себя по окружности. Последний факт не случаен: всякая замкнутая неориентируемая поверхность в нашем пространстве непременно сама себя пересекает.

1.13. Проективная плоскость[1]**.** Неориентируемой оказывается и плоскость, изучаемая в проективной геометрии и называемая короче *проективной плоскостью*. Она существенно отличается от обычной плоскости. Чтобы из последней получить проективную плоскость, условливаются считать, что на каждой ее прямой, кроме обычных точек, существует еще одна бесконечно удаленная, превращающая прямую в замкнутую линию. При этом считают, что все параллельные прямые имеют общую бесконечно удаленную точку, а бесконечно удаленные точки непараллельных прямых различны. Наконец, условливаются, что все бесконечно удаленные точки плоскости образуют одну прямую — бесконечно удаленную прямую

[1]) Ср. стр. 112—114 кн IV ЭЭМ.

этой плоскости. Таким же образом строится «проективное пространство», но при этом добавляют еще условие, что все бесконечно удаленные точки пространства образуют плоскость (бесконечно удаленную); оказывается тогда, что все параллельные плоскости имеют общую бесконечно удаленную прямую. Такое расширение обычной плоскости и обычного пространства делается для того, чтобы операция центрального проектирования стала взаимно однозначной. Действительно, рассмотрим в обычном пространстве плоскость α, например горизонтальную, и вне ее точку O. Тогда каждой точке x плоскости α будет соответствовать определенная прямая Ox связки с центром в O. Обратно, каждой прямой этой связки, з а и с к л ю ч е н и е м прямых, параллельных α, будет соответствовать определенная точка плоскости α, а именно точка пересечения. Для того чтобы уничтожить это исключение, и вводятся в проективной геометрии бесконечно удаленные элементы. Нетрудно убедиться, что после присоединения (указанным выше способом) бесконечно удаленных точек каждая прямая связки будет пересекать плоскость α, и соответствие прямых связки точкам плоскости α будет взаимно однозначным. В связке естественным образом существует понятие бесконечной близости прямых (можно сказать, например, что две прямые, принадлежащие связке, близки, если угол между ними мал); поэтому можно говорить о топологии связки прямых. В силу взаимно однозначного соответствия между связкой и проективной плоскостью, можно отношение близости из связки перенести на плоскость, считая две точки плоскости близкими, если близки соответствующие им прямые связки. Этим на плоскости определяется топология, совпадающая с топологией связки: связка, как совокупность прямых, гомеоморфна проективной плоскости, как совокупности точек. Нетрудно ввести на проективной плоскости и метрику, считая расстояние между двумя ее точками равным меньшему из углов между соответствующими прямыми связки. Проективная плоскость с введенным этим способом расстоянием на ней называется *эллиптической плоскостью* (см. стр. 406—407 этой книги ЭЭМ).

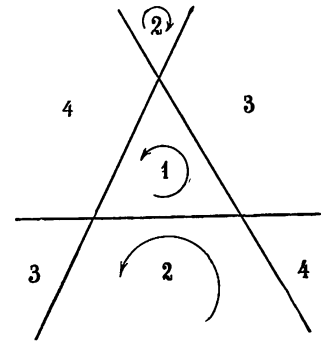


Рис. 14.

Три прямые, не проходящие через одну точку, разбивают эллиптическую плоскость на четыре треугольника с общими вершинами (на рис. 14 один из них — треугольник *1* — хорошо виден весь, а каждый из остальных — треугольники *2*, *3*, *4* — рассечен бесконечно удаленной прямой на два куска). Нетрудно убедиться непо-

средственно, что при любой ориентации этих треугольников найдется такое ребро, которое от двух прилегающих к нему треугольников получит одно и то же направление; следовательно, эллиптическая плоскость неориентируема. На рис. 14 показана некоторая ориентация треугольника *2*; теперь, чтобы не получить противоречия на нижнем ребре треугольника *1*, этот треугольник приходится ориентировать уже вполне определенным образом. Но тогда, как бы ни ориентировать треугольник *3*, неизбежно возникнет противоречие на общем ребре или треугольников *1* и *3*, или треугольников *3* и *2*.

Постараемся наглядно представить себе топологическую структуру эллиптической плоскости. Уже было сказано, что эта структура тождественна с топологической структурой связки прямых. Вокруг центра связки произвольным радиусом опишем сферу. Каждую прямую связки эта сфера пересечет в двух диаметрально противоположных точках, причем близким прямым, естественно, будут соответствовать близкие пары диаметрально противоположных точек. Поэтому многообразие этих диаметрально противоположных пар гомеоморфно эллиптической плоскости. Мы лучше себе представим топологию этого многообразия, если вообразим, что две точки каждой пары слились в одну. Итак, мы получим эллиптическую плоскость, если отождествим каждую точку сферы с диаметрально противоположной ей точкой той же сферы. Это — очень удобная симметричная модель проективной плоскости.

При описанном только что процессе отождествления верхняя полусфера всеми своими точками наложится на нижнюю полусферу; поэтому можно сразу отправляться не от сферы, а от полусферы, но при этом еще нужно отождествить диаметрально противоположные точки экватора. В последнем построении можно полусферу заменить гомеоморфным ей кругом. В результате мы получим вторую модель: эллиптическая плоскость гомеоморфна фигуре, полученной из круга отождествлением диаметрально противоположных точек его окружности.

Вернемся к первой модели и посмотрим, во что превратится при отождествлении диаметрально противоположных точек часть сферы, заключенная между двумя горизонтальными плоскостями, из которых одна расположена чуть выше экватора, а другая — на столько же ниже его (рис. 15). Нетрудно понять, что при отождествлении этот экваториальный пояс превратится в поверхность Мёбиуса. Северная же часть сферы отождествится с симметричной ей южной. Поэтому эллиптическую плоскость можно представить еще и так: поверхность Мёбиуса и круг, имеющий окружность той же длины, что граничная линия поверхности Мёбиуса, нужно склеить вместе вдоль всей границы. Эта третья модель становится совсем наглядной, если заметить, что область проективной плоскости, лежащая между двумя ветвями гиперболы (рис. 16), гомеоморфна поверх-

ности Мёбиуса, дополнительная же область гомеоморфна кругу. В последнем Вы убедитесь, произведя проективное преобразование плоскости, переводящее гиперболу в окружность. Каждая окружность разбивает проективную плоскость на две части: внутренняя гомеоморфна кругу, внешняя — поверхности Мёбиуса.

Задача. Доказать, что многообразие всех прямых, расположенных на плоскости и пересекающих данный круг, гомеоморфно поверхности Мёбиуса. Выяснить, какая совокупность прямых будет при этом соответствовать средней линии поверхности Мёбиуса.

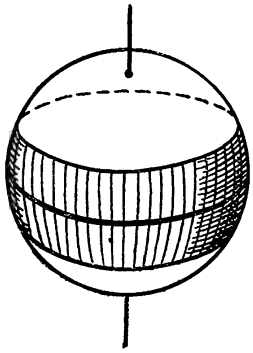


Рис. 15.

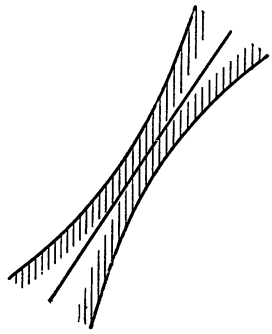


Рис. 16.

1.14. Односторонние и двусторонние разрезы. Мы будем часто употреблять выражение: «разрезать поверхность вдоль пути, составленного из таких-то ребер». Нетрудно было бы объяснить точный смысл этой фразы. Речь идет о новом комплексе с краем, причем в состав края входят вершины и ребра, возникшие из ребер и вершин, по которым прошел разрез. Отношения подчинения при этом, конечно, должны быть точно описаны. Мы позволим себе такое наглядное описание: каждое внутреннее ребро a', по которому проходит разрез, мы представляем себе «расколотым» вдоль на два ребра, причем одно из новых ребер подчинено одной из тех граней, которой было подчинено ребро a', а другое — другой. Обе вершины «расколотого» ребра «раскалываются» на две вершины (исключение составляют «внутренние» вершины, являющиеся концом разреза: они не раскалываются); отношения подчинения этих новых вершин однозначно определяются только что указанным отношением подчинения новых ребер. Все остальные вершины и ребра (по которым разрез не прошел) сохраняют отношения подчинения такими, какими они были до разрезывания. (То же относится к ребрам края, по которым проходит разрез, если таковые имеются.)

Если разрезать поверхность F вдоль какого-нибудь простого замкнутого полигона Г, составленного из внутренних ребер и внутренних вершин ее триангуляции K, то F либо распадается на две отдельные поверхности F_1 и F_2 — в этом случае говорят, что Г разбивает поверхность F, — либо остается связной, но превращается в новую поверхность F^* — тогда говорят, что Г не разбивает поверхности F. Например экватор не разбивает поверхности

тора. После проведения замкнутого разреза Г каждое ребро из Г превращается в два ребра и каждая вершина из Г — в две вершины, принадлежащие краю поверхности F^* (или соответственно краям поверхностей F_1 и F_2). При этом весь полигон Г может тоже распасться на два замкнутых полигона Γ_1 и Γ_2 или же может, оставаясь связным, превратиться в один новый полигон Г*, имеющий вдвое больше ребер и вершин, чем полигон Г. В первом случае Г называется *двусторонним* (или *двубережным*) *разрезом*, во втором — *односторонним* (или *однобережным*).

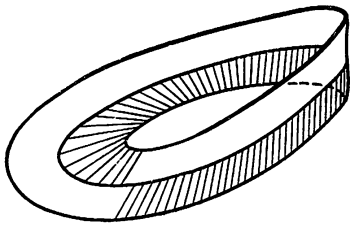


Рис. 17.

Что такое однобережный разрез, можно хорошо разглядеть на поверхности Мёбиуса (рис. 17).

1.15. Простые поверхности. Для перехода к общей классификации поверхностей нам понадобится несколько вспомогательных понятий и несколько вспомогательных предложений, касающихся топологического соответствия. В этом параграфе мы не раз воспользуемся следующим простым предложением:

Лемма. *Если дано топологическое отображение окружности одного круга на окружность другого круга, то это отображение можно распространить на весь круг, т. е. можно найти такое топологическое отображение первого круга на второй, при котором точки окружности первого круга переходят в соответствующие точки окружности второго.*

В справедливости этой леммы легко убедиться, если воспользоваться полярными координатами.

Само собой разумеется, что предложение остается справедливым, если круги заменить любыми поверхностями, гомеоморфными кругу.

Классификацию поверхностей мы начнем с рассмотрения так называемых *простых поверхностей*: это — поверхности, обладающие тем свойством, что любой замкнутый разрез разбивает поверхность. Здесь и в дальнейшем мы будем допускать также и такие замкнутые разрезы, в состав которых входят граничные ребра и граничные вершины, однако поставим непременное требование, чтобы в числе ребер разреза было хоть одно внутреннее. Итак, под замкнутым разрезом будем понимать простой замкнутый полигон, составленный из ребер клеточного разбиения, из которых хотя бы одно внутреннее.

Примером непростой поверхности может служить, например, тор или поверхность Мёбиуса.

Понятие простой поверхности есть топологическое понятие: если при одном клеточном разбиении поверхности не существует

замкнутого разреза, не разбивающего ее, то это свойство сохранится и при всяком другом клеточном разбиении. Доказательство этого утверждения в общем случае довольно сложно и поэтому здесь не приводится. Впрочем, для дальнейшего достаточно было бы знать, что имеет место инвариантность понятия простоты при подразделениях клеточного разбиения, и даже достаточно пользоваться лишь инвариантностью при барицентрических разбиениях. Доказательство инвариантности понятия простоты при барицентрических разбиениях читатель может выполнить самостоятельно как упражнение.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что все грани клеточного разбиения являются треугольниками, т. е. что клеточное разбиение есть *триангуляция*. Это не нарушает общности, так как от любого клеточного разбиения можно перейти, например, к его барицентрическому разбиению.

Перейдем теперь к классификации простых поверхностей.

Теорема I. *Всякая простая поверхность F, край которой состоит из одной компоненты, гомеоморфна кругу.*

При этом топологическое отображение на круг, которым мы воспользуемся для установления гомеоморфизма, переводит край поверхности в окружность круга. [Последнего можно было бы не прибавлять, так как при всяком топологическом отображении край переходит в край (инвариантность края), однако, воспользовавшись этим, столь очевидным на первый взгляд, фактом, мы должны были бы его строго доказать, что вовсе не просто.] Если триангуляция F состоит лишь из одного треугольника ($\alpha_2 = 1$), то, конечно, F можно топологически отобразить на круг и притом так, чтобы край перешел в окружность. Итак, предложение верно, если $\alpha_2 = 1$. Применим метод математической индукции: предположим, что предложение справедливо для $\alpha_2 \leqslant n$, и докажем его для $\alpha_2 = n + 1$. Выберем для этого треугольник Δ, примыкающий одним ребром a^1 к краю триангуляции F. Тогда возможны три случая: из элементов треугольника Δ краю принадлежат:

1) только ребро a^1 и, следовательно, обе его вершины, или

2) ребро a^1 и ребро b^1 и, следовательно, все три вершины, или

3) ребро a^1 с его вершинами и противоположная ему вершина a^0.

В первых двух случаях, отбрасывая треугольник Δ, мы получим снова простую поверхность F^* с краем, состоящим из одной компоненты, причем в состав ее триангуляции входит только n треугольников. Следовательно, предполагая наше предложение верным для $\alpha_2 = n$, мы можем топологически отобразить поверхность F^* на круг, так что ее край перейдет в окружность круга. Отметим ту часть края поверхности F^*, которая примыкает к треугольнику Δ; пусть это будет дуга ab. Мы можем топологически

отобразить поверхность F^* на половину какого-нибудь круга, и так как при этом на основании леммы можно наперед задать отображение края поверхности F^* на край полукруга, то мы вправе предполагать, что при этом отображении дуга ab переходит в диаметр. Теперь отобразим топологически треугольник Δ на другую половину круга и притом так, чтобы точки, лежащие на дуге ab, перешли в соответствующие точки диаметра (что возможно сделать на основании леммы). Установленное отображение поверхностей F^* и Δ и даст топологическое отображение всей поверхности F на круг.

В третьем случае, отбрасывая треугольник Δ, мы получаем из F две простые поверхности F_1 и F_2. Край каждой из них состоит из одного куска, причем эти края имеют общую точку a^0. Каждая из поверхностей F_1 и F_2 гомеоморфна кругу (для каждой из них $\alpha_2 < n+1$). Отображая, подобно предыдущему, поверхности F_1 и Δ на две половины одного круга, убеждаемся, что поверхность, составленная из F_1 и Δ, гомеоморфна кругу. Затем аналогичным образом, присоединяя к ним F_2, находим, что вся поверхность $F=(F_1+\Delta)+F_2$ может быть топологически отображена на круг, причем край переходит в окружность. Наше предложение доказано.

Теорема II. *Всякая замкнутая простая поверхность F гомеоморфна сфере.*

Действительно, удалив из некоторой триангуляции нашей поверхности один треугольник Δ, мы получим новую простую поверхность F^*, край которой состоит из одного куска (границы треугольника Δ). По доказанному, эта поверхность гомеоморфна кругу. Ее можно топологически отобразить на южную половину сферы. Тогда, отобразив (см. лемму) треугольник Δ на северную полусферу так, чтобы точки границы попали в соответствующие точки экватора, получим топологическое отображение поверхности F на всю сферу.

Теорема III. *Две простые поверхности F_1 и F_2 с краем, состоящим из одного и того же числа r компонент, гомеоморфны между собой.*

Нормальной формой для такой поверхности будем считать сферу, от которой отсечено r сферических сегментов. Пусть край поверхности F_1 состоит из r простых замкнутых полигонов $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Если $r=1$, то теорема уже доказана. Пусть $r>1$. Для доказательства теоремы возьмем на каждом из полигонов c_i по вершине a_i и к ним от произвольной внутренней для F_1 вершины a^0 проведем r непересекающихся разрезов на поверхности F_1:

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r.$$

Чтобы убедиться, что такую систему разрезов можно провести,

будем проводить их последовательно. Простые рассуждения показывают, что после проведения каждого из разрезов поверхность остается связной; следовательно, можно провести следующий разрез, не пересекая предыдущих (возможно, что при этом придется перейти к более мелкой триангуляции, для чего можно воспользоваться барицентрическим разбиением). После проведения всех разрезов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ поверхность F_1 превратится в поверхность F_1^* с одним краем; каждый из замкнутых полигонов c_i превратится в незамкнутый простой полигон c_i^*, а каждый разрез γ_i превратится в два куска: γ_i^* и ${}^*\gamma_i$. Так как F_1 — простая поверхность, то поверхность F_1^* также простая. Следовательно, по предыдущей теореме, поверхность F_1^* гомеоморфна кругу; ее граница состоит из $3r$ звеньев:

$$\gamma_1^*, c_1^*, {}^*\gamma_1, \ldots, \gamma_r^*, c_r^*, {}^*\gamma_r,$$

которые образуют простой полигон Γ_1 (рис. 18).

То же и в том же порядке можно проделать и над поверхностью F_2. Пусть при этом возникает поверхность F_2^* с краем Γ_2. Тогда поверхности F_1^* и F_2^* могут быть отображены друг на друга так, чтобы соответственные вершины полигонов Γ_1 и Γ_2 отвечали друг другу, соответственные звенья были отображены пропорционально длине. Такое отображение строим, распространяя указанное отображение краев на самые поверхности F_1^* и F_2^* (см. лемму на стр. 506). Легко видеть, что при этом получается топологическое соответствие и первоначальных поверхностей F_1 и F_2. Теорема доказана.

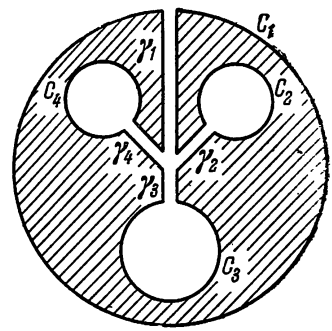


Рис. 18.

Мы приходим, таким образом, к топологической классификации простых поверхностей. Две простые поверхности гомеоморфны в том и только в том случае, если их края состоят из одного и того же числа кусков. Иными словами, число r компонент края полностью характеризует топологический тип простой поверхности. В качестве постоянного представителя этого типа мы выберем сферу с r круглыми «дырами» (т. е. сферу, от которой отсечено r сферических сегментов). Каждая простая поверхность с точки зрения топологии может быть реализована в такой форме; это — «нормальная форма» простой поверхности.

В заключение подсчитаем эйлерову характеристику и порядок связности для простых поверхностей. Инвариантность эйлеровой характеристики позволяет произвести этот подсчет очень просто,

1) Эйлерова характеристика простой поверхности с одним краем равна эйлеровой характеристике треугольника, т. е. равна $3-3+1=1$ (было доказано, что такие поверхности гомеоморфны кругу, а следовательно, и треугольнику). Порядок связности $q=1$.

2) Эйлерова характеристика простой поверхности, граница которой состоит из r кусков, равна $2-r$. Действительно, присоединив к нашей поверхности, которую мы представим в виде сферы с отсеченными от нее r сегментами, $r-1$ из этих сегментов, мы получим поверхность с одним краем. Эйлерова характеристика последней, по доказанному, равна 1, следовательно, искомая эйлерова характеристика равна $1-(r-1)=2-r$. Порядок связности $q=r$.

Заметим, что отсюда следует для простых поверхностей топологическая инвариантность числа r компонент края.

1.16. Классификация поверхностей. Перейдем теперь к центральному вопросу этого параграфа — к вопросу о топологической классификации замкнутых поверхностей и построению для них нормальных форм. В предыдущем пункте было показано, что если на поверхности нельзя провести ни одного не разбивающего ее замкнутого разреза и если ее край состоит из r компонент, то она гомеоморфна сфере с r круглыми дырами. Опираясь на этот результат, перейдем к общему случаю.

Пусть выбрано некоторое клеточное разбиение K поверхности F; взяв его барицентрическое разбиение, получим триангуляцию поверхности; триангуляция может быть сделана сколь угодно мелкой, если воспользоваться достаточным числом последовательных барицентрических подразделений K', K'', ..., $K^{(S)}$. Как мы уже знаем, при барицентрическом разбиении эйлерова характеристика χ не меняется (здесь пока не приходится пользоваться теоремой об инвариантности эйлеровой характеристики в общем случае). Проведем в триангуляции $K^{(S)}$ максимальное число k замкнутых непересекающихся разрезов $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, не разбивающих поверхности F. Число таких разрезов, как мы сейчас увидим, не больше, чем $2-\chi$, т. е. ограничено для всех подразделений $K^{(S)}$. В самом деле, проведя все k разрезов, мы не изменим эйлеровой характеристики, так как при каждом разрезе число вершин увеличивается настолько же, насколько увеличивается и число ребер. А так как каждый разрез дает одну или две граничные линии, то мы получим поверхность Φ с краем, состоящим из r компонент, где $k \leqslant r \leqslant 2k$. Если мы теперь к каждой компоненте края приклеим по грани с соответствующим числом ребер, то получим замкнутую поверхность, эйлерова характеристика которой равна $\chi+r$ (прибавилось r граней, число вершин и ребер не изменилось). Ранее было доказано (см. п. **1.9**), что эйлерова характеристика любой поверхности не более 2; значит, $\chi+r \leqslant 2$, и так как $k \leqslant r$, то $k \leqslant 2-\chi$.

Выберем такую триангуляцию $K^{(s)}$, для которой это число k максимально; тогда Ф необходимо будет простой поверхностью, так как всякий замкнутый разрез должен разбивать поверхность Ф. В самом деле, если бы нашелся замкнутый разрез, не разбивающий поверхности Ф, то его можно было бы заменить простым замкнутым, не разбивающим поверхности Ф разрезом, не имеющим общих точек с краем поверхности Ф, и, следовательно, на поверхности F (в ее триангуляции $K^{(s+t)}$) нашелся бы $(k+1)$-й разрез, не пересекающий предыдущих и совместно с ними не разбивающий поверхности F. Это противоречит максимальному свойству числа k. Итак, Ф — простая поверхность с краем, состоящим из r компонент. На основании предыдущего поверхность Ф можно реализовать в форме сферы с r круглыми дырами. Переходя обратно от Ф к F, мы должны произвести отождествление точек тех контуров, которые возникли из разрезов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

Здесь нужно различать следующие случаи.

1) Разрез Г — однобережный. Он порождает один контур S, причем каждая точка поверхности F, лежащая на контуре Г, превращается в две диаметрально противоположные точки контура S. Отсюда понятно, что обратный процесс будет состоять в отождествлении пар диаметрально противоположных точек такого контура. Такой разрез назовем *разрезом типа* I, а единственную порожденную им дыру поверхности Ф — *дырой типа* I.

2) Разрез Г — двубережный. Он порождает два контура S_1 и S_2, причем каждая точка a поверхности F, лежащая на нем, превращается в две соответственные точки a_1 и a_2 этих контуров. Здесь существенно различны еще два случая.

2.1) При движении точки a_1 по контуру S_1 соответственная точка a_2 описывает контур S_2 в том же направлении относительно поверхности Ф, т. е. если глядеть на поверхность Ф из ее центра, то точки a_1 и a_2 окажутся описывающими контуры S_1 и S_2 либо оба по часовой стрелке, либо оба — против. (*Разрез типа* II и пара порожденных им *дыр типа* II.)

2.2) При движении точки a_1 по контуру S_1 точка a_2 описывает контур S_2 в противоположном относительно поверхности Ф направлении. (*Разрез типа* III и пара *дыр типа* III.)

Если хотя бы один из разрезов принадлежит к типам I или II, то поверхность неориентируема. Следовательно, в случае ориентируемой поверхности могут представиться только разрезы типа III. Таким образом, каждая ориентируемая замкнутая поверхность F с точки зрения топологии может быть получена из сферы вырезанием некоторого числа $p \geqslant 0$ пар круглых дыр, не задевающих друг друга, и последующим отождествлением граничных окружностей дыр каждой пары, причем это отождествление должно быть осуществлено по типу III. Для определенности будем

считать, что дыры, составляющие пару, симметричны относительно некоторой (для каждой пары своей) диаметральной плоскости сферы. Отождествление граничных окружностей удобнее всего теперь выполнить, соединяя в одну те их точки, которые соответствуют друг другу в смысле указанной симметрии.

Описанная модель замкнутой ориентируемой поверхности, по существу, совпадает с клейновой нормальной формой — сферой с p «ручками». В этом легко убедиться наглядно, вытягивая части поверхности Ф, прилежащие к дырам, в виде трубок наружу; тогда отождествление их граничных окружностей можно осуществить непосредственным склеиванием; при этом каждая пара трубок образует одну ручку. Читатель без труда докажет, что эйлерова характеристика последней модели $\chi = 2 - 2p$. Так как, с другой стороны, $\chi = 2 - q$, то у замкнутой ориентируемой поверхности порядок связности $q = 2p$, т. е. является четным. Число p называется *родом* поверхности.

Остановимся еще на другой нормальной форме, к которой могут быть приведены все, за исключением сферы, замкнутые ориентируемые поверхности. Будем снова отправляться от поверхности Ф и проведем на ней p непересекающихся разрезов — на каждую пару дыр по одному, ведущему от некоторой точки на граничной окружности одной дыры к соответствующей точке на окружности другой. При этом пара дыр сольется в одну «четырехугольную» дыру, у которой одна пара противоположных сторон — это берега только что проведенного разреза, а другая — противоположные берега разреза Г, породившего рассматриваемую пару дыр. Таким образом, поверхность Ф превратится в новую поверхность — сферу с p четырехугольными дырами. Для получения из нее первоначальной поверхности F нужно склеить берега разрезов, иными словами, склеить противоположные стороны граничных четырехугольников (при этом каждый четырехугольник порождает одну ручку).

После того как склеиванием уничтожена одна четырехугольная дыра, другой четырехугольник можно передвинуть по поверхности так, чтобы одна из его вершин совпала с какой-либо вершиной четырехугольника первой дыры. Поэтому мы можем заранее предполагать, что все четырехугольники имеют общую вершину. Тогда после вырезания их на сфере получится одна дыра, ограниченная $4p$ отрезками — сторонами вырезанных четырехугольников. Оставшаяся поверхность P гомеоморфна кругу, так как является простой и имеет край, состоящий из одного куска. Окружность этого «круга» P разбита на $4p$ дуг, которые мы обозначим последовательно через ξ_1, η_1, ξ_1', η_1', ..., ξ_p, η_p, ξ_p', η_p'. Поверхность F получается из P, если каждую дугу ξ_k склеить с дугой $\xi_k' = \xi_k^{-1}$ (т. е. с дугой ξ_k, но проходимой в противоположном направлении), дугу η_k —

с дугой $\eta'_k = \eta_k^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Обратно, проводя на F соответствующие разрезы (обозначим их через $\xi_1, \ldots, \xi_p$; $\eta_1, \ldots, \eta_p$; каждый из них дает две дуги), мы превратим ее в $4p$-угольник P, стороны которого соответствуют друг другу, как было объяснено выше. Разрезы $\xi_1, \ldots, \xi_p$; $\eta_1, \ldots, \eta_p$ называются «каноническими разрезами» ориентируемой поверхности. Особенно наглядно вся эта конструкция выступает на торе (поверхности рода $p = 1$).

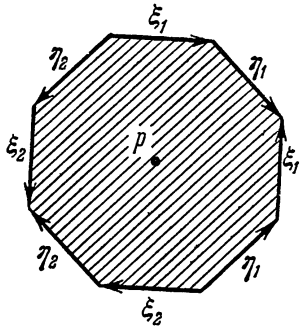


Рис. 19.

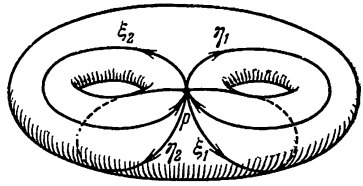


Рис. 20.

На рис. 19, 20 представлены канонические разрезы для поверхности рода $p = 2$.

Перейдем теперь к построению модели замкнутой неориентируемой поверхности. Превращая замкнутую неориентируемую поверхность в простую поверхность Ф, мы можем встретиться с разрезами всех трех типов, причем среди них найдется по крайней мере один разрез типа I или II. Каждый разрез типа III будет по-прежнему соответствовать обычной ручке. Разрез типа II можно наглядно представить себе как разрез «вывернутой ручки» (рис. 21). Для этого части поверхности Ф, прилегающие к окружностям одной пары типа II, вытянем в виде трубочек, одну — внутрь сферы, из которой получена поверхность Ф, а другую — наружу. Если теперь склеить их граничные окружности, то и получится вывернутая ручка, идущая от внутренней стороны поверхности Ф к ее наружной стороне. Так наглядно выполняется отождествление по типу II. Заметим, что при склеивании внутренней и внешней трубочек одна из них необходимо должна пересечь поверхность. Это не случайно — в трехмерном пространстве для замкнутой неориентируемой поверхности нельзя построить модели без самопересечения (уже в четырехмерном пространстве это сделать можно).

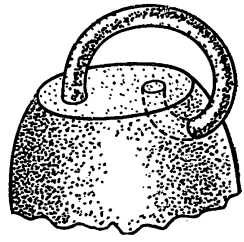


Рис. 21.

Труднее представить себе наглядно то отождествление, которое соответствует разрезу типа I. Пусть Γ — такой разрез; он порождает на поверхности Ф один контур S (рис. 22), который мы вправе

считать окружностью; проведем на поверхности Ф окружность $\overline{S}$, весьма близкую к S; тогда при отождествлении соответственных (т. е. диаметрально противоположных) точек окружности S (для получения поверхности F из Ф) часть поверхности Ф, заключенная между S и $\overline{S}$, превратится в полосу, содержащую однобережный разрез Г, т. е. в поверхность Мёбиуса. Граница последней есть $\overline{S}$: поверхность Мёбиуса как бы вклеена в дыру, вырезанную на сфере окружностью $\overline{S}$. Таким образом, каждая замкнутая неориентируемая поверхность может быть получена

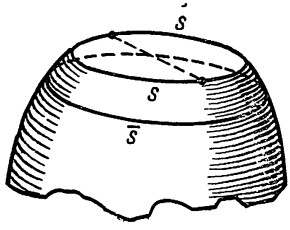


Рис. 22.

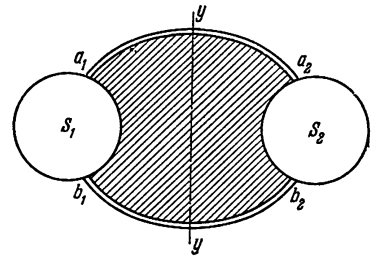


Рис. 23.

из сферы присоединением к ней некоторого числа простых ручек, вывернутых ручек и поверхностей Мёбиуса, вклеенных в приготовленные для них дыры на сфере. Следующие преобразования позволяют эту довольно сложную модель упростить.

1-е преобразование. Заметим прежде всего, что *каждый разрез* Г *типа* II *может быть заменен двумя разрезами типа* I (иначе говоря, каждая вывернутая ручка может быть заменена вклеиванием двух поверхностей Мёбиуса).

Пусть S_1 и S_2 — два контура, получившихся от разреза Г; a_1 и b_1 — какие-нибудь точки контура S_1, а a_2 и b_2 — соответствующие точки контура S_2. Проведем на сфере два не пересекающих друг друга вспомогательных разреза a_1a_2 и b_1b_2 (рис. 23) таким образом, чтобы одна (на чертеже заштрихованная) из частей, на которые эти разрезы разбивают поверхность Ф, не содержала других дыр. Если теперь отождествить соответственные точки контуров S_1 и S_2 (при этом заштрихованная часть поверхности Ф как бы перевернется вокруг оси yy наизнанку), то мы получим новую простую поверхность Ψ, в которой вместо пары дыр, ограниченных контурами S_1 и S_2, появятся две новые дыры Σ_1 и Σ_2, возникшие из разрезов a_1a_2 и b_1b_2. Противоположные точки границы каждой из новых дыр (т. е. точки, которые разделяют эту границу на две дуги одинаковой длины) соответствуют друг другу, и, следовательно, каждая из дыр, а значит, и порождающие их разрезы от-

носятся к типу I. Данную поверхность F можно получить из Φ, производя отождествление соответствующих точек контуров S_1 и S_2; но ту же поверхность F мы получим из Ψ, отождествляя противоположные точки границы каждой из дыр Σ_1 и Σ_2.

2-е преобразование. Мы покажем теперь, что *при наличии разреза типа* I *каждый разрез типа* III *может быть превращен в разрез типа* II, *и обратно.*

Действительно, пусть (рис. 24) I — дыра типа I, а III_1 и III_2 — пара дыр типа III; a_1 и a_2 — соответственные точки окружности I. Проведем на поверхности Φ разрез a_1a_2 таким образом, чтобы одна из двух частей (на чертеже заштрихованная), на которые он разбивает поверхность Φ, содержала дыру III_1 и не содержала никакой другой. Тогда, отождествив соответственные точки окружности I, мы уничтожим дыру I (при этом заштрихованный кусок как бы перевернется вокруг своей оси xx наизнанку, вследствие чего направление вращения на окружности III_1 должно будет казаться наблюдателю изменившимся). Но вместо дыры I теперь проявляется новая дыра I' типа I (возникшая из разреза a_1a_2). Из поверхности Φ образовалась новая простая поверхность Ψ. Поверхность F получается из Ψ совершенно так же, как и из Φ, лишь с заменой дыры I на дыру I' (того же типа), но пара III_1, III_2 на поверхности Ψ, как нетрудно видеть, является уже парой типа II, ибо, как выше указано, заштрихованный кусок вместе с дырой III_1 повернулся к ним изнанкой. Остальные дыры остаются при этом без изменения. Другими словами, при наличии разреза типа I каждую простую ручку можно превратить в вывернутую, не изменяя ничего в других частях поверхности.

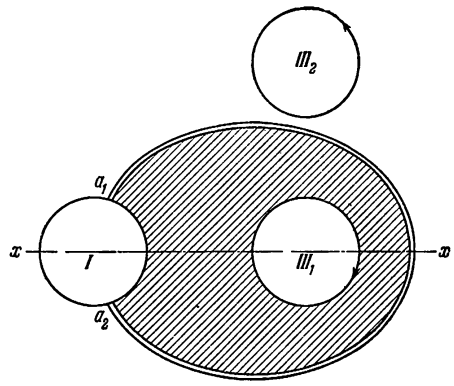


Рис. 24.

Из этих двух преобразований поверхности Φ сразу следует, что в описанной выше модели неориентируемой замкнутой поверхности можно все простые ручки превратить в вывернутые, а каждую из последних — в две поверхности Мёбиуса, вклеенные в сферу, как было описано выше.

Итак, каждая замкнутая неориентируемая поверхность может быть получена из сферы «вклеиванием» некоторого числа p поверхностей Мёбиуса. Легко подсчитать, что эйлерова характеристика последней модели $\chi = 2 - p$, откуда $p = q$, т. е. порядку связности поверхности.

Итак, мы получили простейшие нормальные формы замкнутых поверхностей: для ориентируемой поверхности — сфера с $p = q/2$ простыми ручками, для неориентируемой — сфера с q поверхностями Мёбиуса. Это значит, что каждая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из этих «образцовых» поверхностей — «нормальных форм».

Всякая ориентируемая замкнутая поверхность, имеющая порядок связности q, гомеоморфна сфере с $p = q/2$ простыми ручками. Все такие поверхности при данном q гомеоморфны между собой.

Всякая неориентируемая замкнутая поверхность, имеющая порядок связности q, гомеоморфна сфере с q круглыми дырами, в границах каждой из которых произведено отождествление пар диаметрально противоположных точек (или, если угодно, сфере с вклеенными q поверхностями Мёбиуса). Все такие поверхности при данном q также гомеоморфны между собой.

С другой стороны, никакие две поверхности с различными q, или две поверхности, из которых одна ориентируема, а другая неориентируема, не могут быть гомеоморфны, так как ориентируемость и порядок связности q суть топологические инварианты, т. е. одинаковы у всех гомеоморфных поверхностей. (В частности, все нормальные формы топологически различны.)

Итак, две замкнутые поверхности тогда и только тогда гомеоморфны, когда они обе ориентируемы или неориентируемы и имеют один и тот же порядок связности. Таким образом, два инвариантных свойства: ориентируемость и порядок связности — вполне характеризуют топологическую структуру замкнутой поверхности, или, как говорят иначе, они образуют полную систему топологических инвариантов замкнутых поверхностей. Изложенный здесь метод построения нормальных форм принадлежит американскому математику Дж. Александеру.

Не останавливаясь на этом подробно, заметим, что классификация поверхностей с краем теперь легко уже может быть выполнена. Полную систему топологических инвариантов для них образуют: 1) ориентируемость, 2) порядок связности, 3) число компонент края. (Конечно, при этом еще должно быть строго доказано, что число компонент края — топологический инвариант.)

§ 2. Многообразия

2.1. Введение. Наиболее важными из всех топологических объектов являются n-мерные *многообразия*. Это — связные множества, имеющие вблизи каждой своей точки ту же топологическую структуру, что и n-мерное евклидово пространство, которое, следовательно, является частным случаем многообразия. Одномерных многообразий существует только два: прямая линия и окружность

(точнее, всякое одномерное многообразие гомеоморфно или прямой, или окружности). Двумерные многообразия иначе называются *поверхностями*; ими мы занимались в § 1. Здесь мы познакомимся с трехмерными многообразиями.

Начало систематическому изучению топологии многообразий положил А. Пуанкаре в известной работе Analysis situs (1895 г.) и в нескольких прибавлениях к ней. Следует отметить, что Пуанкаре был приведен к своим топологическим исследованиям проблемами качественной теории дифференциальных уравнений. Эта теория в свою очередь возникла из потребности получить наиболее существенные сведения качественного характера при решении тех или иных механических задач (у Пуанкаре — в основном задач небесной механики). Эта же связь с математическим анализом продолжала быть движущей силой в последующих работах Л. Брауэра по топологии многообразий и векторных полей и, в особенности, в относящихся к этой области топологии работах советских математиков, среди которых наиболее выдающимися являются работы Л. С. Понтрягина. Комбинаторные методы, лежащие в основе топологии многообразий, были перенесены П. С. Александровым и в область изучения более общих геометрических фигур — компактов и даже еще более широких классов объектов теоретико-множественной топологии. А. Н. Колмогоров существенно пополнил алгебраический аппарат комбинаторной топологии введением так называемых *коциклов* и *когомологий*, находящих в настоящее время широкие применения почти во всех частях топологии, в особенности же в теории многообразий и в теории векторных полей на многообразиях.

2.2. Трехмерная клетка. Будем называть *элементом* любое множество, гомеоморфное некоторому шару A. Поверхностью элемента будем считать ту его часть, в которую перейдет поверхность шара при некотором определенном топологическом отображении φ шара на этот элемент. Остальные точки элемента считаем его внутренними точками, их совокупность назовем открытым элементом.

Назовем, далее, *трехмерной клеткой* (3-клеткой) трехмерный элемент, поверхность которого разбита на клетки, образующие двумерный комплекс. Вершины, ребра и грани этого комплекса считаются вершинами, ребрами и гранями клетки, причем они тоже рассматриваются как клетки (0-клетки, 1-клетки, 2-клетки), подчиненные данной 3-клетке. Кроме того, говорят, что каждая клетка подчинена сама себе.

Примером клетки может служить любой выпуклый многогранник. Простейшая из 3-клеток — это тетраэдр (или трехмерный симплекс, см. стр. 380 этой книги ЭЭМ); ему подчинены 4 треугольника, 6 ребер и 4 вершины.

Подобным же образом определяется (индуктивно) n-клетка ($n \geqslant 1$) — это n-мерный элемент, поверхность которого разбита на клетки, образующие $(n-1)$-мерный комплекс (см. ниже п. **2.3**). О всех r-клетках ($r=0, 1, \ldots, n-1$) этого комплекса говорят, что они подчинены данной n-клетке. Простейшей n-клеткой является n-мерный симплекс. Это — выпуклая оболочка $n+1$ точек n-мерного пространства, не лежащих в одной $(n-1)$-мерной плоскости (см. стр. 380 этой книги ЭЭМ). Можно определить n-симплекс и индуктивно как пирамиду, основанием которой служит $(n-1)$-симплекс. Рис. 25 можно рассматривать как проекцию 4-симплекса на плоскость. Тетраэдр $abcd$ — основание, e — вершина пирамиды. У n-симплекса имеется $n+1$ вершин, $\frac{(n+1)\,n}{2}$ ребер и вообще C_{n+1}^{r+1} подчиненных ему r-клеток.

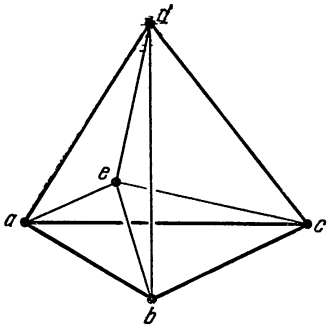


Рис. 25.

Другим примером n-клетки может служить n-мерный куб. Его можно определить как множество точек n-мерного пространства, каждая координата которых заключена между двумя постоянными числами, например $0 \leqslant x_k \leqslant l$, $k=1, 2, \ldots, n$; здесь положительное число l — ребро куба. Можно n-мерный куб определить и индуктивно: n-куб — это прямая призма, построенная на $(n-1)$-кубе, как на основании, причем высота призмы должна быть равна ребру l этого основания. Нетрудно доказать, что число клеток различных размерностей, подчиненных данному n-кубу, может быть вычислено следующим образом: разложим $(2+1)^n$ по правилу бинома Ньютона; тогда последовательные члены этого разложения как раз дадут числа 0-мерных, 1-мерных, ... и т. д. клеток, подчиненных нашему кубу (ср. выше, стр. 380).

Если в определении клетки под элементом понимать открытый элемент, то клетку назовем *открытой*, если же элемент рассматривать вместе с точками его поверхности, т. е. присоединить к открытой клетке точки всех подчиненных ей клеток, то будем говорить о *закрытой* клетке. Если открытую клетку обозначить через a, то соответствующую закрытую обозначим через $\overline{a}$.

Обычно будем рассматривать открытые клетки. Если рассматривается клетка закрытая, то это будем всегда подчеркивать, называя полностью: *закрытая клетка*.

Каждую вершину, иначе говоря 0-клетку, считаем и о т к р ы т о й и з а к р ы т о й одновременно.

2.3. Трехмерный комплекс. *Трехмерным комплексом* называется система 3-мерных, 2-мерных, 1-мерных и 0-мерных клеток, удовлетворяющая двум условиям: 1) две закрытые клетки системы либо не имеют общих точек, либо их общая часть есть закрытая клетка, подчиненная им обеим; 2) клетка, подчиненная какой-нибудь клетке системы, сама принадлежит системе. Если в системе конечное число клеток, то комплекс называется *конечным*, в противном случае — *бесконечным*.

Совершенно аналогично вводится понятие *n-мерного комплекса*. 0-клетки называются также *вершинами*, 1-клетки — *ребрами* комплекса. В случае конечного комплекса число r-клеток обозначим через α_r, $r=0, 1, 2, 3$. Число $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ называется *эйлеровой характеристикой* (трехмерного) комплекса K и обозначается через $\chi(K)$.

Два комплекса K_1 и K_2 называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между r-клетками комплекса K_1 и r-клетками комплекса K_2, $r=0, 1, 2, 3$, так, чтобы из подчиненности клетки a клетке b в одном комплексе следовала такая же подчиненность соответствующих клеток в другом.

Понятия связности и компоненты определяются буквально так же, как для двумерных комплексов (см. п. **1.5**). Буквально повторяется и определение звезды данной вершины. Вообще, *звездой* данной клетки называется совокупность клеток, которым подчинена данная клетка.

Множество всех точек, принадлежащих клеткам комплекса K, называется *телом* K и обозначается через $|K|$. Наоборот, K называется *клеточным разбиением* множества $|K|$. Если считать все клетки открытыми, то каждая точка из $|K|$ принадлежит точно одной клетке комплекса K.

Параллельно понятию изоморфизма вводится понятие дуальности, или взаимности (аналогичное полярному соответствию в проективной геометрии, см. ЭЭМ, кн. IV, стр. 128).

Два комплекса K и $\mathcal{Y}$ называются *дуальными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между r-клетками комплекса K и $(3-r)$-клетками комплекса $\mathcal{Y}$, $r=0, 1, 2, 3$, так, чтобы из подчиненности клетки a клетке b в одном комплексе следовала о б р а т н а я подчиненность соответствующих клеток в другом.

Не у всякого комплекса K существует дуальный ему комплекс. Для этого необходимо, чтобы тело комплекса K было многообразием или, если оно несвязно, чтобы все его компоненты были многообразиями (определение многообразия см. ниже, п. **2.5**).

2.4. Барицентрическое разбиение трехмерного комплекса. Как и в двумерном случае, определим прежде всего барицентрическое разбиение клетки. Пусть $a^3=\varphi(A^3)$ — некоторая 3-клетка, а A^3 — трехмерный шар, являющийся ее прообразом, который мы вправе тоже рассматривать как 3-клетку, O — его центр. Произведем барицентрическое разбиение двумерного комплекса, составленного из всех вершин, ребер и граней клетки A^3. П р о е к т и р у я[1]) получившийся комплекс B из O, мы каждую его вершину b^0 прев-

[1]) Здесь под проектированием из точки O понимается процесс соединения каждой проектируемой точки x с точкой O отрезком Ox.

ращаем в ребро Ob^0, каждое ребро b' — в треугольник Ob', каждый треугольник b^2 — в тетраэдр Ob^2. Одним словом, каждый симплекс из B порождает новый симплекс, на единицу большего числа измерений. Легко видеть, что все симплексы из B вместе со всеми новыми симплексами и с вершиной O образуют комплекс. Последний и называется барицентрическим разбиением клетки A^3; он обозначается через $(A^3)'$. Отображение φ переносит это разбиение в клетку a^3. Таким образом, *барицентрическим разбиением* $(a^3)'$ клетки a^3 является комплекс, составленный из образов при отображении φ всех симплексов комплекса $(A^3)'$.

Нетрудно подсчитать эйлерову характеристику $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ комплекса $(a^3)'$ или, что все равно, комплекса $(A^3)'$; она равна $+1$. Действительно, комплекс $(A^3)'$ состоит из симплексов комплекса B, из новых симплексов, возникших при проектировании, и из вершины O. При подсчете эйлеровой характеристики каждый новый симплекс будет давать единицу противоположного знака по сравнению с тем симплексом комплекса B, из которого он возник, так как размерности их отличаются на единицу; итак, получится столько положительных единиц, сколько отрицательных, да еще одна, возникшая от вершины O.

Барицентрическое разбиение K' комплекса K, по определению, мы получим, если произведем барицентрическое разбиение всех его клеток всех размерностей от 1 до 3.

Эйлерова характеристика конечного комплекса при барицентрическом разбиении не изменяется: $\chi(K) = \chi(K')$. Это легко проверить, производя сначала барицентрическое разбиение всех ребер поодиночке, затем всех 2-клеток поодиночке и т. д. При каждой из этих операций эйлерова характеристика не изменяется, так как одна клетка имеет эйлерову характеристику равной $+1$, заменяющее ее барицентрическое разделение — тоже. Значит, она не изменится и после окончания последней операции, т. е. когда будет произведено барицентрическое разбиение всего комплекса.

2.5. Трехмерное многообразие. *Трехмерным многообразием* называется такое связное множество M^3, что у каждой его точки существует окрестность, гомеоморфная внутренности шара в трехмерном евклидовом пространстве. Это последнее обстоятельство и имеют в виду, когда говорят, что многообразие локально имеет ту же топологическую структуру, что и евклидово пространство.

Однако это слишком общее понятие обычно сужают дополнительным требованием возможности разбить M^3 на конечное или счетное число клеток, образующих в совокупности комплекс. При этом, если комплекс конечный, то многообразие называют *замкнутым*, в противном случае — *открытым*.

Подобным же образом определяется *n-мерное многообразие.*

Для трехмерного многообразия можно строго доказать, что звезда каждой вершины в барицентрическом разбиении изоморфна радиальному разбиению шара на симплексы (сферическая звезда). Другими словами, барицентрическая окрестность каждой вершины a^0 может быть так топологически отображена на шар, что a_0 перейдет в его центр, а каждый симплекс звезды перейдет в радиальную часть шара, опирающуюся на соответствующий сферический треугольник некоторой триангуляции поверхности шара.

Заметим, кроме того, что каждая внутренняя точка любого ребра a^1 имеет такую окрестность, которая в пересечении с клетками, входящими в звезду ребра a^1, образует фигуру, изоморфную разбиению шара на дольки несколькими меридианными полуплоскостями (дольки апельсина!). В этом случае говорят, что каждое ребро имеет циклическую звезду. Таким же образом каждая внутренняя точка 2-клетки a^2 имеет такую окрестность, которая в пересечении с клетками, входящими в звезду клетки a^2, образует фигуру, изоморфную разбиению шара экваториальной плоскостью на два полушара.

2.6. Примеры замкнутых многообразий. Вполне наглядно представить себе замкнутое трехмерное многообразие вам не удастся по той простой причине, что никакое такое многообразие, разумеется, нельзя поместить в наше пространство. Однако некоторые из них вы должны постараться представить себе почти наглядно. Вот несколько примеров.

1. Возьмем два шара одинакового радиуса r и расположим их симметрично по разные стороны от некоторой вертикальной плоскости α. Будем считать, что любая точка x граничной сферы первого шара тождественна с симметричной ей относительно α точкой x' граничной сферы второго шара (рис. 26). Выражаясь образно, скажем, что два наших шара мы «склеили» вместе так, что оказались совпавшими их границы, как точно указано выше. Полученное трехмерное многообразие обозначим через S^3 (читатель легко проверит, что данные шары нетрудно так разбить на клетки, чтобы клетки разбиения того и другого шара после склеивания дали трехмерный комплекс — клеточное разбиение нашего многообразия S^3). Проверка того, что S^3 действительно есть многообразие (и притом замкнутое), т. е. что у каждой точки

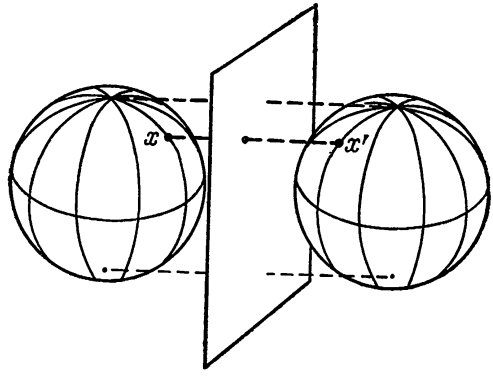


Рис. 26.

из S^3 найдется окрестность, гомеоморфная трехмерному шару, несложна. Это очевидно для внутренних точек каждого из склеиваемых шаров; для любой же точки, происшедшей от склеивания соответственных точек x и x' сфер, это станет ясным, если из каждого шара вырезать маленькими сферами радиуса ε, описанными около точек x и x', куски, для которых необходимое склеивание попавших в них частей сфер можно совершить вполне наглядно; после этого склеивания оба куска дадут кусок, гомеоморфный трехмерному шару. Многообразие S^3 есть трехмерная сфера (т. е. оно гомеоморфно поверхности $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ шара $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leqslant 1$ в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4). Описанный способ получения сферы S^3 вполне аналогичен представлению земной поверхности при помощи географической карты восточного и западного полушарий.

2. Проективное пространство. Пространство проективной геометрии (см. п. **1.13**) дает простой и интересный пример трехмерного замкнутого многообразия. Приведем модель проективного пространства, аналогичную второй модели проективной плоскости, данной в § 1. Возьмем шар и отождествим каждую точку x его граничной сферы с диаметрально противоположной ей точкой $\bar{x}$. При таком «склеивании» возникает замкнутое многообразие, в чем легко убедиться совершенно так же, как и в предыдущем примере. Полученное многообразие — будем обозначать его через P^3 — гомеоморфно проективному пространству. Если в проективном пространстве взять четыре плоскости, которые не пересекаются в одной точке и никакие три из которых не проходят через одну прямую (рис. 27), то они разобьют его на восемь тетраэдров: один весь расположен в конечной части пространства, четыре других примыкают к нему каждый по некоторой грани и в противоположной вершине, каждый из остальных трех касается его по двум его противоположным ребрам. Читатель должен наглядно представить себе расположение этих восьми тетраэдров в пространстве, помня, что семь из них рассечены бесконечно удаленной плоскостью.

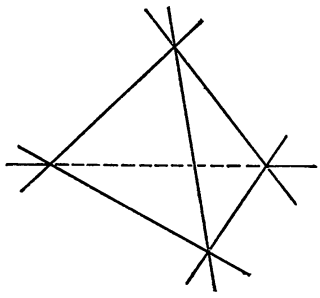


Рис. 27.

3. Линзовые пространства. Только что описанная модель проективного пространства может быть легко обобщена. Это приведет нас к весьма интересному классу трехмерных многообразий — линзовых пространств. Возьмем снова шар, разобьем его поверхность экватором на северную и южную полусферы.

Диаметр, перпендикулярный к плоскости экватора, назовем осью. Каждую точку x северной полусферы отождествим с той точкой x' южной полусферы, которая может быть получена из x поворотом вокруг оси на угол $\frac{q}{p}2\pi$ (где $\frac{q}{p}$ — правильная несократимая дробь) и последующим отражением от плоскости экватора. Легко проверить, что в результате отождествления получится замкнутое многообразие; оно называется *линзовым пространством* типа (q/p). При $q/p=0$ получим сферу S^3, при $q/p={}^1/_2$ — проективное пространство P^3.

4. Пусть дан куб. Будем считать, что любая точка x любой из его граней тождественна с ее ортогональной проекцией x' на противоположную грань (рис. 28). В силу этого условия, каждая грань склеивается с противоположной гранью. Чтобы убедиться, что при таком склеивании возникает замкнутое многообразие (обозначим его через T^3), придется рассмотреть окрестности точек четырех видов: 1) внутренняя точка куба имеет окрестность в виде маленького шара; 2) точка, возникшая от склеивания двух внутренних точек противоположных граней, имеет окрестность, склеенную из двух маленьких полушаров; 3) точка, возникшая из соответственных внутренних точек четырех параллельных ребер куба, имеет окрестность, состоящую из четырех долек, которые, склеиваясь, образуют шар; наконец, 4) единственная точка, которая возникает от соединения в одну всех восьми вершин куба, имеет окрестность, состоящую из восьми октантов, склеивающихся друг с другом так, как восемь октантов, на которые разбивается шар тремя взаимно перпендикулярными плоскостями. Во всех случаях получаются окрестности, гомеоморфные шару.

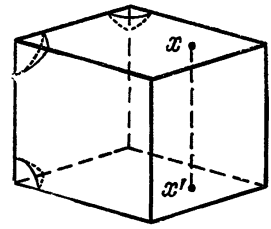


Рис. 28.

Через каждую точку куба проходят три прямолинейных отрезка, соответственно параллельных трем ребрам куба; при указанном склеивании каждый из них превращается в замкнутую линию, и мы вправе считать ее окружностью. Каждая точка куба может быть задана тремя координатами, иначе говоря, тремя точками на трех отрезках (проекции данной точки на три взаимно перпендикулярных ребра куба). Каждая точка нашего замкнутого многообразия T^3 может быть определена при помощи трех «проекций» на три окружности, в которые обратились при склеивании три перпендикулярных ребра куба. Описанный здесь способ получения многообразия T^3 из куба вполне аналогичен способу получения тора T^2 из квадрата отождествлением его противоположных сторон.

Последний пример подводит нас к весьма важному вопросу о *топологическом произведении* множеств. Пусть X и Y — два множества

с заданной топологической структурой. Тогда произведением $X \cdot Y$ называется совокупность всевозможных пар (x, y), где x принадлежит множеству X, а y принадлежит множеству Y, причем пара (x, y) должна рассматриваться как близкая к паре (x_0, y_0), когда x близко к x_0, а y близко к y_0. Этим устанавливается топологическая структура в произведении $X \cdot Y$. Например, прямоугольник гомеоморфен произведению своих сторон, так как любой точке прямоугольника однозначно соответствует пара проекций ее на стороны, причем это соответствие взаимно однозначно и сохраняет отношение близости, в силу сделанного соглашения о близости двух пар в произведении. Аналогично, боковая поверхность цилиндра гомеоморфна произведению окружности на образующую. Тор (поверхность) можно рассматривать как топологическое произведение двух окружностей. Если мы рассмотрим механическую систему, состоящую из двух точек, движущихся по замкнутым орбитам (две планеты!), то многообразие всевозможных положений этой системы с точки зрения топологии будет произведением двух окружностей (орбит); таким образом, это многообразие гомеоморфно тору.

Подобным же образом определяется произведение любого конечного числа сомножителей. А. Н. Тихонов распространил это определение на произвольное бесконечное множество сомножителей. Л. С. Понтрягин в другом направлении обобщил это понятие, введя так называемое *косое произведение* (согласно его терминологии, поверхность Мёбиуса есть косое произведение окружности на отрезок).

Многообразие всевозможных положений системы трех планет, движущихся по замкнутым орбитам, гомеоморфно T^3, т. е. произведению трех окружностей. Заметим, что число степеней свободы механической системы — это число измерений многообразия всевозможных положений этой системы. Точно так же, если рассматривается многообразие (или «семейство») каких-либо объектов, зависящее от n параметров, то n есть число измерений этого многообразия. Так, многообразие всех кругов на плоскости трехмерно (три параметра: координаты центра и радиус), многообразие всех прямых пространства четырехмерно.

5. Постараемся наглядно представить себе произведение сферы S^2 на окружность S^1. Для этого разрежем окружность S^1 в одной точке, в результате чего она превратится в отрезок xx'. Произведение сферы на отрезок гомеоморфно сферической оболочке, т. е. части пространства между двумя концентрическими сферами (рис. 29), одна из которых представляет произведение $S^2 \cdot x$, а другая — произведение $S^2 \cdot x'$. Отождествляя точку x с x', мы вернемся от отрезка xx' к окружности S^1. При этом внешняя поверхность $S^2 \cdot x$ сферической оболочки отождествится с внутренней поверхно-

стью $S^2 \cdot x'$ так, что совпадут точки этих поверхностей, лежащие на одном радиусе.

6. Исследуем топологию многообразия всевозможных положений твердого тела, одна точка которого закреплена неподвижно. Примем одно из положений этого тела за начальное; тогда в любое другое положение, как известно из кинематики, его можно перевести поворотом на угол $\alpha \leqslant \pi$ вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку. Будем рассматривать *направленные оси* (значит, каждая прямая дает две оси, соответственно двум противоположным направлениям) и повороты вокруг них будем производить лишь по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления оси. Тогда поворот на угол α, $\alpha \leqslant \pi$, можно изобразить вектором длины α, направленным вдоль оси. При этом поворот на тот же угол, но в противоположном направлении изобразится противоположным вектором. Каждому положению тела будет соответствовать свой вектор; откладывая все векторы от фиксированной точки O, можно заменить векторы их концами. Начальному положению тела будет соответствовать нулевой вектор (или, иначе, точка O). Многообразию всех положений тела будет соответствовать множество точек шара $Ш$ радиуса π с центром O. Однако при этом надо принять во внимание, что любые два противоположно направленных вектора длины π соответствуют одному и тому же положению тела. Итак, чтобы получить взаимно однозначное соответствие, необходимо отождествить диаметрально противоположные точки поверхности шара $Ш$; значит, многообразие всех положений твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, гомеоморфно трехмерному проективному пространству P^3 (см. пример 2).

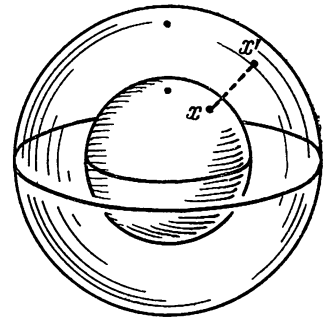


Рис. 29.

2.7. Дуальное клеточное разбиение многообразия. Пусть K — клеточное разбиение многообразия M. Определим *дуальное к K разбиение* многообразия M следующим образом. Вершинами этого нового разбиения назовем те вершины барицентрического разбиения K', которые являются центрами 3-клеток комплекса K (следовательно, их будет всего α_3); ребро нового разбиения получим, объединяя те два ребра барицентрического разбиения, которые соединяют центр какой-нибудь грани из K с центрами двух примыкающих к ней 3-клеток (ведь M — многообразие, поэтому к каждой грани примыкают две клетки); значит, каждой грани комплекса K будет соответствовать свое ребро дуального разбиения (всего α_2 ребер); точно так же, взяв какое-нибудь ребро a^1 из K, объединим в одну 2-клетку все треугольники из K', которые в качестве вершины

содержат середину c^0 ребра a^1 и не примыкают к половинкам этого ребра (все такие треугольники образуют как бы колесо, надетое на данное ребро как на ось, ибо каждое ребро имеет в многообразии циклическую звезду; спицами колеса являются ребра разбиения K', ведущие из c^0 в центры смежных к ребру a^1 граней и 3-клеток). (Таких новых 2-клеток будет столько, сколько имеется ребер в комплексе K, т. е. α_1.) Наконец, взяв произвольную вершину a^0 из K, объединим в одну новую 3-клетку все симплексы из K', имеющие a^0 своей вершиной; все такие симплексы заполняют часть многообразия M, гомеоморфную шару. Таким образом, каждая вершина a^0 из K порождает новую 3-клетку (всего таких клеток будет α_0). Новые вершины, ребра, 2-клетки и 3-клетки образуют трехмерный комплекс $\mathcal{Y}$ — дуальное к K клеточное разбиение многообразия M. Важно заметить, что комплекс K' можно рассматривать как барицентрическое разбиение комплекса $\mathcal{Y}$; поэтому, построив дуальное к $\mathcal{Y}$ разбиение, мы получим комплекс K: разбиения K и $\mathcal{Y}$ взаимно дуальны.

Мы доказали выше, что эйлерова характеристика конечного комплекса K равна эйлеровой характеристике его барицентрического разбиения, а так как K и $\mathcal{Y}$ имеют общее барицентрическое разбиение $K' = \mathcal{Y}'$, то $\chi(K) = \chi(\mathcal{Y})$. Но из способа построения дуального разбиения мы заметили, что

$$\alpha_0(\mathcal{Y}) = \alpha_3(K), \quad \alpha_1(\mathcal{Y}) = \alpha_2(K), \quad \alpha_2(\mathcal{Y}) = \alpha_1(K), \quad \alpha_3(\mathcal{Y}) = \alpha_0(K);$$

значит,

$$\chi(K) = \chi(\mathcal{Y}) = \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 = -(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = -\chi(K)$$

и потому

$$\chi(K) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к важной теореме:

Эйлерова характеристика любого замкнутого трехмерного многообразия равна 0.

Так же можно было бы доказать, что эйлерова характеристика замкнутого многообразия любого нечетного числа измерений равна нулю.

Задача. Проверить, что дуальное разбиение к разбиению пространства на кубы тремя сериями плоскостей, параллельных координатным (обычный кубильяж), будет представлять собой такой же кубильяж, но смещенный на половину ребра куба вдоль всех осей координат.

2.8. Многообразие с краем. *Трехмерным многообразием с краем* называется связное множество M^3, каждая точка x которого имеет окрестность, допускающую либо топологическое отображение на внутренность трехмерного шара, либо такое топологическое отображение на половину шара, что x переходит в центр шара; кроме того, предполагается, что M^3 допускает разбиение на конечное число клеток, образующих в совокупности комплекс.

Заметим, что если точка имеет окрестность первого из только что указанных типов, то она не может иметь окрестности второго типа, и наоборот (совсем непростое доказательство этого факта мы опускаем). Из этого замечания следует, что все точки многообразия с краем распределяются на два класса соответственно типам их окрестностей. Точки первого класса назовем внутренними точками многообразия M^3, точки второго класса — краевыми точками; совокупность последних назовем краем многообразия M^3. Можно показать, что внутренние точки образуют открытое многообразие; край состоит из конечного числа замкнутых поверхностей. Заметим, что само многообразие с краем не является многообразием в смысле определения п. **2.5**.

Все клетки клеточного разбиения многообразия с краем также разделяются на два класса: внутренние клетки — клетки, состоящие из внутренних точек, и краевые клетки — составленные из краевых точек. В случае трехмерного многообразия с краем можно доказать, что каждая внутренняя вершина имеет в барицентрическом разбиении сферическую звезду (см. п. **2.5**), каждая краевая вершина — «полусферическую» барицентрическую звезду, т. е. звезду, изоморфную радиальному разбиению полушара (разбиению, которое получится, если некоторую триангуляцию соответствующей полусферы проектировать радиусами из центра шара).

Каждое внутреннее ребро имеет циклическую звезду (п. **1.6**), каждое краевое ребро — «полуциклическую» звезду (барицентрическая звезда краевого ребра составлена из симплексов подобно половине апельсина, составленной из долек). Наконец, каждая внутренняя 2-клетка подчинена двум 3-клеткам, каждая краевая 2-клетка подчинена только одной 3-клетке.

2.9. Эйлерова характеристика многообразия с краем. Поверхности, не могущие быть краем. Пусть M^3 — многообразие с краем, а Ф — его край, который, как мы видели, состоит из нескольких замкнутых поверхностей. Пусть, далее, K^3 — клеточное разбиение многообразия M^3, а K^2 — соответствующее разбиение края Ф. Мы покажем, что имеет место соотношение

$$\chi(K^2) = 2\chi(K^3).$$

Действительно, взяв два экземпляра комплекса K^3, отождествим (склеим) соответствующие точки их краев. Как нетрудно видеть, при этом образуется новый комплекс L^3, являющийся клеточным разбиением некоторого замкнутого многообразия, ибо при таком отождествлении звезды внутренних вершин не изменятся, а звезды вершин края, которые до отождествления были полусферическими, станут сферическими; итак, после отождествления звезды всех вершин станут сферическими, т. е. у нас получилось замкнутое многообразие. Подсчитаем эйлерову характеристику многообразия

L^3. Понятно, что

$$\chi(L^3) = \chi(K^3) + \chi(K^3) - \chi(K^2) = 2\chi(K^3) - \chi(K^2),$$

ибо в сумме $\chi(K^3) + \chi(K^3)$ все клетки края подсчитаны дважды, поэтому пришлось из нее вычесть $\chi(K^2)$. Но, как было доказано в предыдущем параграфе, эйлерова характеристика замкнутого многообразия L^3 равна 0. Итак,

$$2\chi(K^3) - \chi(K^2) = 0.$$

Отсюда, между прочим, следует, что никакая замкнутая поверхность с нечетной эйлеровой характеристикой (например, эллиптическая плоскость) не может одна являться краем трехмерного многообразия. Можно показать, что, наоборот, для каждой замкнутой поверхности с четной эйлеровой характеристикой можно найти трехмерное многообразие, для которого она служит полным краем.

2.10. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Будем говорить, что 3-клетка $a^3 = \varphi(A^3)$ ориентирована, если выбрана определенная ориентация на ее поверхности, т. е. если ориентированы все ее грани и притом одинаково (см. стр. 500). Для осуществления такой ориентировки граней перейдем к шару A^3, служащему прообразом для a^3, и, рассматривая грани из его центра, снабдим каждую из них направлением вращения, например, по часовой стрелке. Всякий трехмерный элемент, лежащий внутри данной ориентированной 3-клетки, считается ориентированным с ней одинаково, если, рассматривая их поверхности из внутренней точки внутреннего элемента, мы видим вращения, задающие ориентации граней, одинаково направленными.

Пусть M^3 — трехмерное многообразие, а K^3 — какое-нибудь его клеточное разбиение. Многообразие M^3 называется ориентируемым, если можно так ориентировать все 3-клетки комплекса K^3, что каждые две соседние будут ориентированы одинаково, т. е. будут сообщать их общей грани противоположные ориентации. Мы не будем приводить доказательства того факта, что свойство ориентируемости или неориентируемости не зависит от выбора разбиения K^3, т. е. что если многообразие M^3 оказалось ориентируемым (или неориентируемым) при некотором его разбиении K^3, то оно окажется таким же и при всяком другом его клеточном разбиении.

Приведем пример неориентируемого многообразия (с краем). Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — прямоугольный параллелепипед, который мы будем представлять себе сложенным из трех одинаковых кубов, поставленных друг на друга (рис. 30). Интересующее нас многообразие N^3 получится путем отождествления нижней грани $ABCD$ с верхней гранью $A'B'C'D'$ таким образом, чтобы оказались отождествленными (склеенными) точки этих оснований, симметричные

относительно одной из горизонтальных осей, проведенных через центры противоположных граней среднего куба, например, так:

$$A'B'C'D' \equiv DCBA.$$

Легко видеть, что если ориентировать нижний и средний кубы, а также верхний и средний одинаково, то нижний и верхний окажутся ориентированными неодинаково, так как на общей их грани $A'B'C'D' \equiv DCBA$ возникнет одна и та же ориентация от верхнего и от нижнего кубов.

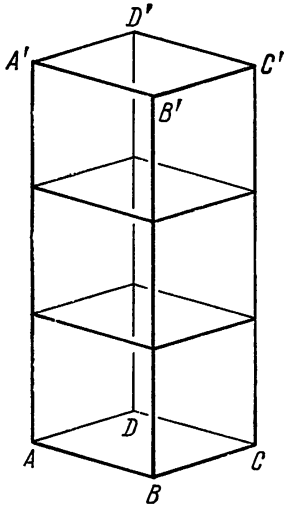


Рис. 30.

Полной границей нашего многообразия N^3 служит поверхность Клейна, в чем нетрудно убедиться, проследив, как произведено склеивание нижнего и верхнего краев боковой поверхности параллелепипеда.

Точно так же при склеивании обратится в поверхность Клейна всякая цилиндрическая поверхность, описанная вокруг вертикальной оси параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Интересно, что эта неориентируемая поверхность в нашем многообразии располагается двусторонне. Заметим, что в неориентируемых многообразиях ориентируемые поверхности могут тоже располагаться и односторонне и двусторонне.

Продвигая вверх вдоль вертикальной оси нашего параллелепипеда правый (обыкновенный) буравчик, посмотрим, что станет с ним при переходе через грань $ABCD \equiv D'C'B'A'$. Так как направление «в в е р х» при переходе через эту грань не изменяется, а направление вращения по часовой стрелке превращается в противоположное, то п р а в ы й буравчик превращается в л е в ы й.

Рассматриваемое многообразие N^3, являющееся трехмерным аналогом поверхности Мёбиуса, можно считать самым простым из всех неориентируемых трехмерных многообразий (в том смысле, что в каждом таком многообразии содержится часть, гомеоморфная многообразию N^3).

С другой стороны, очевидно, что всякое трехмерное многообразие, содержащее часть, гомеоморфную многообразию N^3, необходимо будет неориентируемым.

З а д а ч а. Разбив проективное пространство P^3 четырьмя плоскостями на восемь тетраэдров (см. п. **2.6**, пример 2) и надлежащим образом ориентировав их, убедиться, что в противоположность проективной плоскости многообразие P^3 ориентируемо [1]).

[1]) Вообще проективное пространство P^n ориентируемо при n нечетном и неориентируемо при n четном.

Простым примером трехмерного замкнутого неориентируемого многообразия может служить топологическое произведение $P^2 \cdot S^1$ проективной плоскости P^2 на окружность S^1. Пусть читатель самостоятельно докажет, что, умножив любую замкнутую неориентируемую поверхность на окружность, мы получим замкнутое неориентируемое многообразие.

2.11. Теорема Хегора. Существует единообразный метод, при помощи которого может быть построено любое замкнутое трехмерное многообразие. Этот метод принадлежит Хегору.

Назовем телом рода p многообразие с краем, которое можно получить из шара, отождествляя p попарно не пересекающихся 2-клеток его северной полусферы с симметричными им относительно экваториальной плоскости элементами южной полусферы (каждая точка элемента отождествляется с ей симметричной). Топологически тот же результат получается, если взять на поверхности шара $2p$ произвольных непересекающихся 2-клеток и произвести попарное их отождествление; важно только, чтобы элементы a^2 и $'a^2$ отождествлялись при помощи топологического соответствия, которое ориентацию клетки a^2 переводит в противоположную ориентацию клетки $'a^2$.

Если последнее условие нарушено хотя бы для одной пары a^2, $'a^2$, то получившееся после отождествления многообразие с краем будет неориентируемым (см. пример в п. **2.10**).

Нетрудно показать, что, если нам дано несколько 3-клеток и на каждой из них отмечено несколько 2-граней, попарно непересекающихся, то, отождествляя попарно эти 2-грани так, чтобы получилось одно ориентируемое многообразие (с краем), мы получим тело некоторого рода p. В самом деле, отождествляя две грани, принадлежащие разным 3-клеткам, мы получим из этих двух 3-клеток новый многогранник, гомеоморфный шару, поэтому его можно снова считать 3-клеткой. Продолжая таким образом, мы получим из всех данных 3-клеток одну «большую» 3-клетку, некоторые грани которой еще должны быть отождествлены попарно. Таким образом, построение свелось к предыдущему.

Тело рода p можно реализовать в трехмерном пространстве в виде гири с p ручками. Понятно, что поверхностью тела рода p служит замкнутая поверхность рода p. Нетрудно убедиться, что эйлерова характеристика тела рода p равна $1-p$; действительно, при появлении каждой ручки эйлерова характеристика тела уменьшается точно на единицу (число граней уменьшается на 1, число ребер и вершин уменьшается одинаково), а эйлерова характеристика шара равна 1.

Теорема Хегора. *Каждое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие M^3 может быть разрезано замкнутой поверхностью некоторого рода p на два тела рода p. Значит,*

наоборот, склеивая подходящим образом своими поверхностями два тела рода p при подходящем p, получим данное многообразие M^3.

Доказательство. Рассмотрим некоторое клеточное разбиение многообразия M^3 и обозначим через T_1 совокупность всех точек, находящихся в любой из клеток на расстоянии, меньшем ε, от какого-либо ее ребра. При очень малом ε тело T_1 состоит из тоненьких цилиндриков, описанных около всех ребер и соединяющихся между собой у вершин. Можно показать, что T_1 является телом рода p, где p — порядок связности линейного комплекса, составленного из всех ребер и вершин разбиения. Поверхность тела T_1, как мы уже знаем, есть замкнутая поверхность рода p. Эта поверхность разрезает многообразие M^3 на две части: T_1 и T_2. Остается установить, что последняя также представляет собой тело рода p. В этом легко убедиться, если заметить, что каждая 3-клетка после удаления из нее частей, попавших в T_1, остается гомеоморфной шару. Множество T_2 состоит из таких «урезанных» клеток, соединяющихся между собой по «урезанным» 2-клеткам. Таким образом, T_2 является телом некоторого рода p', а так как T_2 имеет ту же поверхность, что и T_1, т. е. замкнутую поверхность рода p, то $p = p'$.

2.12. Цепь. Гомологии. Пусть K^3 — какой-нибудь клеточный 3-комплекс. Выберем на каждой клетке определенную ориентацию и будем обозначать такие ориентированные клетки одной буквой: a_l^3, a_k^2, a_j^1, a_i^0; верхний значок указывает размерность клетки, нижний — ее порядковый номер. Если нам нужно рассмотреть клетку a, но с противоположной (относительно наперед выбранной) ориентацией, будем ее обозначать через $-a$.

Возьмем какую-нибудь, например трехмерную, клетку a^3; все двумерные клетки, подчиненные ей, получают от нее определенную ориентацию (именно ту, которая была употреблена при задании ориентации клетки a^3). Возможно, что эта ориентация для некоторых из них будет противоположна ориентации, выбранной для них вначале. Таким образом, некоторые 2-клетки войдут в границу клетки a^3 с коэффициентом $+1$, другие с коэффициентом -1; о тех же клетках, которые не подчинены клетке a^3, будем говорить, что они входят в границу ее с коэффициентом 0. Мы будем обозначать границу клетки a^3 через Δa^3 и условимся записывать ее в виде линейной формы 2-клеток:

$$\Delta a^3 = \varepsilon_1 a_1^2 + \varepsilon_2 a_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\alpha_2} a_{\alpha_2}^2,$$

где коэффициенты ε_k равны ± 1 или 0.

Оказывается полезным рассматривать подобные линейные формы с произвольными целочисленными коэффициентами; такие формы

будем называть *цепями — трехмерными, двумерными, одномерными, нульмерными*, в зависимости от размерности клеток, из которых они составлены.

Говорят, что цепь равна нулю, если все коэффициенты линейной формы равны 0.

Суммой двух r цепей, $r=0, 1, 2, 3$,

$$L^r=\lambda_1 a_1^r+\ldots+\lambda_{\alpha_r} a_{\alpha_r}^r \quad \text{и} \quad M^r=\mu_1 a_1^r+\ldots+\mu_{\alpha_r} a_{\alpha_r}^r$$

назовем r-цепь

$$L^r+M^r=(\lambda_1+\mu_1) a_1^r+\ldots+(\lambda_{\alpha_r}+\mu_{\alpha_r}) a_{\alpha_r}^r.$$

Подобным же образом определяется *произведение* цепи на целое число α:

$$\alpha L^r=(\alpha\lambda_1) a_1^r+\ldots+(\alpha\lambda_{\alpha_r}) a_{\alpha_r}^r.$$

Границей цепи

$$L^r=\lambda_1 a_1^r+\ldots+\lambda_{\alpha_r} a_{\alpha_r}^r$$

назовем цепь

$$\Delta L=\lambda_1 \Delta a_1^r+\ldots+\lambda_{\alpha_r} \Delta a_{\alpha_r}^r.$$

Если граница цепи равна нулю, цепь называют *циклом* (или *замкнутой цепью*).

Заметим прежде всего, что граница клетки всегда есть цикл. Покажем это, например, для 3-клетки. В данном случае утверждение непосредственно вытекает из определения ориентации граней клетки: ориентация граней выбирается так, чтобы общее ребро двух клеток получало противоположные ориентации от той и другой грани. Следовательно, составляя сумму границ всех граней, мы получим 0, так как каждое ребро в эту сумму войдет один раз со знаком «+», а другой раз со знаком «—».

По этой же причине, если одинаково ориентировать все грани некоторой ориентируемой замкнутой поверхности (или все клетки ориентируемого замкнутого многообразия), то цепь, равная сумме всех граней (клеток), будет циклом. Так как граница любой цепи по определению вычисляется как линейная комбинация границ составляющих ее клеток, то граница границы всегда равна 0, т. е. граница цепи всегда является циклом.

В совокупности всех цепей нами была введена операция сложения. Легко видеть, что эта операция удовлетворяет обычным групповым аксиомам; иначе говоря, все цепи образуют г р у п п у [1]) по операции сложения. Так как сумма двух циклов есть цикл, то совокупность циклов образует подгруппу группы всех цепей.

Граница любой цепи есть цикл, однако не каждый цикл является границей некоторой цепи. Циклы, являющиеся границами,

[1]) О понятии группы см. ЭЭМ, кн. I, стр. 102.

называются *гомологичными нулю*. Если разность двух циклов Z_1 и Z_2 гомологична нулю ($Z_1 - Z_2 \sim 0$), то сами циклы называются *гомологичными* ($Z_1 \sim Z_2$).

Если в группу всех r-мерных циклов ввести добавочное условие, считая все гомологичные нулю циклы нулями, то эта группа превращается в новую группу (фактор-группу), называемую *r-мерной группой гомологий Бетти* (или r-мерной группой) рассматриваемого комплекса. Максимальное число линейно независимых элементов в ней называется *r-мерным числом Бетти* комплекса и обозначается через p_r.

Оказывается, что группы Бетти, а следовательно, и числа Бетти являются топологическими инвариантами тела комплекса (доказательство см. в книгах [6, 7, 8, 9], указанных в списке литературы в конце статьи). Это значит, что если комплексы K_1 и K_2 имеют гомеоморфные тела $|K_1|$ и $|K_2|$, то их r-мерные группы Бетти изоморфны, а r-мерные числа Бетти равны. Таким образом, если, например, хотя бы одно число Бетти у двух многообразий оказывается не совпадающим, то такие многообразия наверное не гомеоморфны. Заметим, однако, что если у двух многообразий все соответствующие числа Бетти совпадают и если даже все соответствующие группы Бетти изоморфны, то это еще не значит, что многообразия гомеоморфны: в таких случаях для их топологического различения приходится искать более тонкие инварианты.

Для связного комплекса справедливо соотношение $p_0 = 1$. Действительно, условливаясь любую нульмерную цепь считать целиком (граница 0-цепи равна 0), мы легко докажем, что каждая вершина, рассматриваемая как 0-цепь, гомологична любой другой вершине. В самом деле, мы уже видели, что в связном комплексе любые две вершины могут быть связаны простой цепочкой ребер. Рассматривая эту цепочку как 1-цепь, находим, что граница последней содержит лишь две заданные вершины и притом с противоположными знаками; таким образом, линейная форма, представляющая собой разность двух данных вершин, гомологична нулю. Если одну из вершин фиксировать и обозначить в качестве 0-цикла через Z^0, то любая другая вершина связного комплекса оказывается гомологичной этой фиксированной. Поэтому любой 0-цикл в связном комплексе гомологичен циклу λZ^0, где λ — целое число. Таким образом, нульмерная группа гомологий имеет лишь одну образующую и потому $p_0 = 1$. Точно так же убеждаемся, что если комплекс имеет p компонент, то всякий 0-цикл гомологичен линейной форме из p фиксированных вершин, взятых по одной в каждой компоненте; никакая линейная комбинация этих p вершин не гомологична нулю. Другими словами, $p_0 = p$. Итак, нульмерное число Бетти p_0 имеет простой наглядный смысл: оно равно числу компонент комплекса.

Старшее число Бетти p_n любого n-мерного комплекса K^n есть просто максимальное число линейно независимых циклов в группе всех n-циклов комплекса (здесь переход к фактор-группе отпадает, так как ни один n-цикл, конечно, не может быть гомологичен нулю в K^n). В частности, для линейного комплекса число p_1 совпадает с порядком связности; именно поэтому для последнего в § 1 и было принято обозначение p_1.

Определим значение p_n для ориентируемого n-мерного многообразия. Как уже было сказано, старшие клетки его клеточного разбиения могут быть так ориентированы, что на каждой $(n-1)$-клетке обе подчиняющие ее старшие клетки индуцируют противоположные ориентации. Это значит, что сумма границ ориентированных таким образом старших клеток равна нулю. Обозначим через Z^n линейную форму старших клеток, в которую каждая клетка входит с коэффициентом $+1$. Как мы только что видели, $\Delta Z^n = 0$. Докажем, что цикл Z^n является единственным образующим элементом в группе всех n-циклов, т. е. что любой n-цикл $'Z^n = \lambda^1 a_1^n + \ldots$ $\ldots + \lambda^{\alpha_n} a_{\alpha_n}^n$ равен λZ^n, где λ — целое число. Действительно, все коэффициенты λ_k должны быть равны между собой, иначе мы не имели бы цикла. Пусть, например, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда, соединяя клетки a_i^n и a_j^n цепочкой n-клеток, в которой каждые две последовательные клетки $'a^n$ и $''a^n$ имеют общую $(n-1)$-клетку (ср. стр. 493), мы убеждаемся, что эти соседние клетки должны входить в сумму $'Z^n$ с одинаковыми коэффициентами, иначе их общая $(n-1)$-клетка вошла бы в $\Delta' Z^n$ с коэффициентом, отличным от нуля (равным разности коэффициентов при клетках $'a^n$ и $''a^n$), и, следовательно, цепь $\Delta' Z^n$ не была бы равна нулю. Таким образом, коэффициенты при всех n-клетках нашей цепочки одинаковы, что противоречит предположению $\lambda_i \neq \lambda_j$. Этим доказано, что группа всех n-циклов порождается одним образующим циклом Z^n, и потому $p_n = 1$.

Для неориентируемого замкнутого многообразия, а также для всякого многообразия с краем старшее число Бетти равно нулю, так как в них вовсе не существует отличных от нуля циклов старшей размерности.

Чтобы составить наглядное представление о числах Бетти промежуточных размерностей, разберем следующий пример: на рис. 31 изображено многообразие с краем, сложенное из 36 одинаковых кубиков (здесь к среднему полому кубу, составленному из 26 кубиков, — центральный кубик отсутствует — справа и слева присоединено по «ручке», составленной из пяти кубиков каждая). Это многообразие с краем представляет собой тело рода 2, из которого вырезана одна 3-клетка — центральный кубик. Вот значения чисел Бетти этого комплекса: $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$. На чертеже указаны 1-циклы Z_1^1 и Z_2^1, линейная комбинация которых

с подходящими коэффициентами может быть сделана гомологичной любому 1-циклу (таким образом, $p_1 = 2$). Далее, 2-цикл Z^2, являющийся границей центрального кубика, гомологичен 2-циклу Z_1^2, являющемуся границей тела рода 2, ибо разность этих циклов дает границу 3-цепи, составленной из всех 36 кубиков. Нетрудно убедиться, что любой 2-цикл гомологичен λZ^2, где λ — целое число. Двумерная группа Бетти, следовательно, есть бесконечная циклическая, и потому $p_2 = 1$.

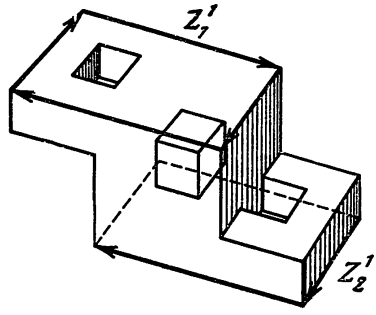


Рис. 31.

Для трехмерной сферы (пример 1 п. **2.6**) значения чисел Бетти следующие: $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$; для проективного пространства (пример 2 п. **2.6**) числа Бетти имеют те же значения; в частности, $p_1 = 0$. Однако здесь одномерная группа Бетти не состоит из одного нуля, в ней существует единственный отличный от нуля элемент: цикл Z^1, составленный из ребер, на которые предполагается разбитой «проективная прямая», не гомологичен нулю. Неожиданным является то обстоятельство, что цикл $2Z^1$ гомологичен нулю. Проще всего в этом убедиться, проведя через прямую «проективную плоскость» (на нашей модели «прямая» — это диаметр шара, причем концы диаметра отождествлены; «проективная плоскость» — это проходящее через данный диаметр плоское сечение шара, причем диаметрально противоположные точки этого сечения должны считаться отождествленными). Ориентируя 2-клетки, лежащие на нашей модели проективной плоскости, по одну сторону от диаметра, по часовой стрелке, а 2-клетки, лежащие по другую сторону, — против часовой стрелки, составим из них 2-цепь с границей, равной $2Z^1$. Итак, $2Z^1 \sim 0$.

Таким образом, для топологического различения проективного пространства P^3 и сферы S^3 числа Бетти оказались недостаточными, однако различие их одномерных групп Бетти убеждает нас, что P^3 не гомеоморфно S^3.

В примере 4 (п. **2.6**) всякий 1-цикл гомологичен линейной комбинации циклов Z_1^1, Z_2^1, Z_3^1, получающихся из 1-клеток, на которые разбиты три взаимно перпендикулярных ребра куба (каждое из них превращается в замкнутую линию при отождествлении соответственных точек). Точно так же всякий 2-цикл гомологичен линейной комбинации циклов, Z_1^2, Z_2^2, Z_3^2, получающихся из трех взаимно перпендикулярных граней куба (каждая из граней при отождествлении граничных точек куба обращается в тор — носитель

цикла Z_k^2, $k=1, 2, 3$). Рассматриваемое многообразие имеет числа Бетти: $p_0=1$, $p_1=3$, $p_2=3$, $p_3=1$.

Наконец, можно убедиться, что в примере 5 (п. **2.6**) числа Бетти многообразия $S^2 \cdot S^1$ все равны 1:

$$p_0=p_1=p_2=p_3=1.$$

Для любого трехмерного комплекса справедлива *обобщенная формула Эйлера:*

$$\chi=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=p_0-p_1+p_2-p_3$$

(доказательство см. в книге [1]).

Соответствующая формула для двумерного комплекса такова:

$$\chi=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=p_0-p_1+p_2.$$

Для трехмерного многообразия из формулы Эйлера вытекает интересное следствие: *так как* $\chi=0$ *для всякого замкнутого трехмерного многообразия, то для ориентируемого многообразия* ($p_0=1$, $p_3=1$) *получаем* $p_1=p_2$ (закон двойственности Пуанкаре). Для неориентируемого многообразия ($p_0=1$, $p_3=0$) получаем $p_1=p_2+1$. Значит, для неориентируемого замкнутого трехмерного многообразия число p_1 всегда положительно, и поэтому одномерная группа Бетти непременно бесконечна.

Применим теперь формулу Эйлера к замкнутым поверхностям. Для ориентируемой поверхности ($p_0=1$, $p_2=1$) находим $\chi=2-p_1$. Для неориентируемой ($p_0=1$, $p_2=0$) — имеем $\chi=1-p_1$. Эти соотношения показывают, что для ориентируемой поверхности одномерное число Бетти p_1 совпадает с порядком связности: $p_1=q$, а для неориентируемой замкнутой поверхности $p_1=q-1$.

§ 3. Общие топологические понятия

3.1. Метрическая геометрия. В предыдущих параграфах рассматривались сравнительно простые, элементарные фигуры — линии, поверхности, многообразия. Теперь мы займемся любыми фигурами — произвольными точечными множествами. Топология изучает множества элементов любой природы, лишь бы в них было установлено отношение бесконечной близости, т. е., например, определено явление приближения переменного элемента к пределу. Такие множества, в которых определена бесконечная близость, и называются топологическими пространствами в самом широком смысле.

Изложению идеи топологического пространства естественно предпослать определение метрического пространства. Понятие метрического пространства, играющее очень важную роль в современной математике, не относится к топологии, а принадлежит

метрической геометрии. Однако понятие топологического пространства так естественно возникает из понятия метрического, что удобно начать именно с него.

Множество произвольных элементов, между каждыми двумя элементами которого установлено расстояние, является предметом изучения метрической геометрии. В этом смысле такое множество называется метрическим пространством, а его элементы — точками. Итак:

Метрическим пространством называется совокупность точек, в которой для каждых двух точек x и y определено положительное *расстояние* $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$. Расстояние от точки x до нее самой считается равным нулю: $\rho(x, x) = 0$.

Обычно рассматривают лишь такие метрические пространства, в которых расстояние удовлетворяет так называемой *аксиоме треугольника:*

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z).$$

В дальнейшем будем всегда предполагать, что эта аксиома имеет место.

Множество всех действительных (или комплексных) чисел образует метрическое пространство, если за расстояние между числами x и y принять абсолютную величину их разности:

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Множество всех точек плоскости и все наше пространство являются метрическими пространствами, так как в них определено понятие расстояния. Они представляют собой частные случаи евклидова пространства n измерений, при $n = 2$ и 3.

Евклидовым n-мерным пространством называется совокупность всех систем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел; каждая такая система называется его *точкой*, а *расстоянием* между двумя точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число

$$\rho(x, y) = +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2};$$

числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* точки x.

Всякая часть (любое множество точек) метрического пространства R, рассматриваемая вне отношения к остальным точкам пространства, образует метрическое пространство, так как для любых двух ее точек уже определено расстояние, как расстояние между всякими двумя точками из R. В частности, всякая фигура в евклидовом пространстве может быть рассматриваема как метрическое пространство.

Вот еще несколько примеров метрических пространств.

1) Пусть дана произвольная поверхность; назовем расстоянием между двумя ее точками a и b длину кратчайшей из дуг, соединяющих эти две точки и лежащих всеми своими точками на

поверхности. Заданная таким образом метрика называется *внутренней метрикой поверхности* (ср. стр. 470 этой книги ЭЭМ). При этом поверхность превращается в метрическое пространство.

Конечно, это, вообще говоря, совсем другое метрическое пространство, чем то пространство, которое представляет собой поверхность, рассматриваемая как подмножество пространства, в котором она лежит.

2) Связка прямых трехмерного пространства, проходящих через фиксированную точку, образует метрическое пространство, если прямые связки назвать «точками», а за расстояние между такими двумя точками принять меньший из двух углов, образованных этими прямыми. Это метрическое пространство называется *эллиптической плоскостью* (см. стр. 406—407). Если рассмотреть связку прямых в евклидовом пространстве E^{n+1}, то совершенно так же приходим к понятию n-мерного *эллиптического пространства*.

Приведем еще примеры, заимствованные из функционального анализа.

3) Множество непрерывных функций $f(x)$, определенных на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, образует метрическое пространство, если определить расстояние между двумя функциями f_1 и f_2 как максимум абсолютной величины их разности:

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

4) То же множество непрерывных функций превращается в другое метрическое пространство, если расстояние определить формулой

$$\rho(f_1, f_2) = +\sqrt{\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))^2 dx}.$$

Два метрических пространства R и R' называются *изометричными*, если они могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняются расстояния, т. е. если точкам x и y соответствуют точки x' и y', то $\rho(x, y) = \rho(x', y')$. Такое соответствие называется *изометрическим*. При изометрическом соответствии двух множеств одно как бы накладывается на другое, и при этом наложении ни одно расстояние не меняется; таким образом, изометрическое соответствие в метрических пространствах — это то, что в элементарной геометрии называется *конгруэнтным преобразованием*.

Вот несколько важных понятий из теории метрических пространств, которые нам будут нужны.

Диаметром множества A называется точная верхняя грань расстояний $\rho(x, y)$, где x и y принадлежат A. Диаметр обозначается через $\delta(A)$. Например, диаметр треугольника есть бо́льшая из его

сторон, диаметр квадрата равен его диагонали, диаметр круга равен его диаметру в обычном смысле.

Расстоянием $\rho(A, B)$ между двумя множествами A и B метрического пространства называют минимум (точную нижнюю грань) расстояния $\rho(x, y)$, где x принадлежит A ($x \in A$), y принадлежит B ($y \in B$). В частности, расстоянием $\rho(a, B)$ точки a от множества B называется точная нижняя грань всех расстояний $\rho(a, y)$ при всех возможных y из B.

Согласно этому определению, расстояние от точки до прямой (или до плоскости) есть длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую (на плоскость). Расстояние между двумя непересекающимися шарами радиусов r_1 и r_2 равно $d - r_1 - r_2$, где d — расстояние между их центрами.

Расстояние между пересекающимися множествами всегда равно нулю, так как минимум расстояния $\rho(x, y)$ достигается в каждой общей точке z:

$$\rho(z, z) = 0.$$

Однако расстояние между двумя множествами может равняться нулю и без того, чтобы они имели общие точки. Например, если A и B — множества внутренних точек двух внешне касающихся шаров (или кругов), то $\rho(A, B) = 0$. Точно так же равно нулю расстояние от любой точки окружности до множества точек, лежащих внутри этой окружности. Еще пример: расстояние от кривой до ее асимптоты равно нулю.

Расстояние не является топологическим отношением, но обращение в нуль расстояния является топологическим фактом. Точка a называется бесконечно близкой к множеству B (будем кратко писать $a \delta B$), если расстояние между ней и множеством равно нулю. Два множества A и B называются *бесконечно близкими* (кратко будем писать $A \delta B$), если расстояние между ними равно нулю.

Укажем в заключение понятие компактного множества, которое понадобится нам в дальнейшем. Некоторое множество A метрического пространства R называется *компактным*, если, какова бы ни была последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества A, найдется такая ее подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ и такая точка $a \in A$, что эта подпоследовательность сходится к точке a. В качестве примера укажем, что множество A, расположенное в евклидовом пространстве (любого числа измерений), в том и только в том случае компактно, если оно ограничено и замкнуто.

3.2. Топологическое пространство. *Топологическим пространством* R называется совокупность элементов («точек»), в которой введено отношение бесконечной близости между точками, с одной стороны, и множеством точек — с другой: для каждого множества A

определено, какие точки являются к нему «бесконечно близкими», или, как принято говорить, являются его *точками прикосновения*.

Совокупность всех бесконечно близких к A точек называется замыканием множества A и обозначается через $\bar{A}$.

Каждое метрическое пространство автоматически является топологическим пространством, так как в нем определено понятие бесконечной близости. Вместе с тем важно заметить, что понятие топологического пространства значительно шире понятия метрического пространства: отношение бесконечной близости может быть установлено и в том случае, когда понятие расстояния вовсе не установлено. Именно, самый факт отнесения каждому множеству A некоторого множества $\bar{A}$ в качестве замыкания (другими словами, указание, какие точки считаются бесконечно близкими к A) определяет топологическую структуру пространства. Поэтому топология находит приложения часто и в тех случаях, когда метрическая геометрия неприложима. Так, в многообразии всех цветов или всех положений некоторой механической системы, или всех векторов пространства естественно существует отношение бесконечной близости, хотя понятие расстояния и не определено, а иногда и не может быть определено целесообразно.

Два топологических пространства (или два множества) R и R' называются *гомеоморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение бесконечной близости между их точками и подмножествами, т. е. если $a \in R$ и $a' \in R'$ — соответственные точки, $A \subset R$ и $A' \subset R'$ — соответственные подмножества, то a' и A' тогда и только тогда бесконечно близки, когда бесконечно близки a и A.

Гомеоморфные пространства с точки зрения топологии эквивалентны (подобно тому как изометричные пространства эквивалентны с точки зрения метрической геометрии).

Всякое множество M, лежащее в топологическом пространстве R, само является топологическим пространством: точка $a \in M$, по определению, бесконечно близка к множеству $A \subset M$, если она бесконечно близка к A в пространстве R.

Определив понятие топологического пространства через отношение бесконечной близости между точками и множествами, подчиним это отношение следующим условиям, называемым аксиомами топологического пространства:

1°. Каждая точка множества A бесконечно близка к A.

2°. Точка a в том и только в том случае бесконечно близка к сумме двух множеств, если она бесконечно близка хотя бы к одному из них.

3°. Если точка бесконечно близка к множеству точек, бесконечно близких к A, то она бесконечно близка и к самому множеству A.

Употребляя обозначение замыкания, можно эти аксиомы сформулировать очень кратко:

1°. $A \subset \overline{A}$.

2°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3°. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ (собственно $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$, но тогда из 1° следует, что $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$).

Когда говорят о топологическом пространстве, то обычно считают выполненными эти аксиомы, включая их таким образом в определение понятия «топологическое пространство». Легко видеть, что для метрического пространства все три условия выполняются (здесь они являются теоремами).

Множество, лежащее в топологическом пространстве, называется *замкнутым*, если оно содержит все бесконечно близкие к нему точки, т. е. если оно совпадает со своим замыканием. Множество, дополнительное к замкнутому, называется *открытым*.

Называя точку какого-нибудь множества M *внутренней*, если она не является бесконечно близкой к дополнительному множеству $R \setminus M$, можно открытое множество иначе определить как такое, которое состоит из одних внутренних точек.

Наконец, *окрестностью* данной точки a топологического пространства R называется любое множество U, дополнение $R \setminus U$ которого не является бесконечно близким к a.

3.3 Связность. Компоненты. Будем говорить, что два множества A и B, лежащих в данном топологическом пространстве R, *топологически не связаны*, если ни одно из них не содержит точки, бесконечно близкой к другому. Это отношение с помощью символа пересечения может быть выражено формулами

$$A \cap \overline{B} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{A} \cap B = 0.$$

Согласно этому определению, два открытых интервала $0 < x < 1$ и $1 < x < 2$ топологически не связаны, так же как и интервалы $0 < x < 1$ и $2 < x < 3$.

Множество M называется *связным* (состоящим из одного цельного куска), если его нельзя разбить на две топологически не связанные части, т. е. M нельзя представить в виде суммы $M = A \cup B$, причем $A \cap \overline{B} = 0$, $\overline{A} \cap B = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Докажем, что прямолинейный отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ (а следовательно и всякая простая дуга) есть связное множество. Предположим противное; это значит, что точки отрезка могут быть распределены в два такие класса A и B, что $A \cap \overline{B} = 0$ и $\overline{A} \cap B = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Пусть точка a принадлежит, например, множеству A; точную нижнюю грань множества B обозначим через β. Тогда, если β принадлежит множеству A, то сколь угодно близко от нее сверху

должны находиться точки множества B, значит, β принадлежит множеству $\overline{B}$, и пересечение $A \cap \overline{B}$ не пусто. Если же β принадлежит множеству B, то она не может совпадать с точкой a (которая принадлежит множеству A); тогда все точки, лежащие между a и β, принадлежат множеству A, и, следовательно, β принадлежит множеству $\overline{A}$, т. е. пересечение $\overline{A} \cap B$ не пусто. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Нетрудно понять, что если всякие две точки множества M могут быть связаны простой дугой, то множество M связно. Обратное утверждение неверно (см. ниже, пример).

Если множество M несвязно, то оно разлагается в конечную или бесконечную сумму связных частей, каждая из которых обладает тем свойством, что она не содержится ни в какой отличной от нее связной части множества M. Каждая из связных частей, обладающих этим максимальным свойством, называется *компонентой* множества M. Разложение множества M на компоненты единственно.

Пример. Множество M, составленное из всех точек отрезков единичной длины, восставленных на плоскости перпендикулярно к оси x в точках $x = 1, {}^1/_2, {}^1/_3, {}^1/_4, \ldots$, а также в точке $x = 0$, имеет бесчисленное множество компонент—каждый из отрезков образует компоненту.

Присоединяя к множеству M отрезки, соединяющие верхние точки первого и второго отрезков, третьего и четвертого и т. д., а также нижние точки второго и третьего отрезков, четвертого и пятого и т. д., получим уже связное множество (рис. 32); однако в нем нельзя соединить простой дугой, например, точки с координатами (1,0) и (0,1).

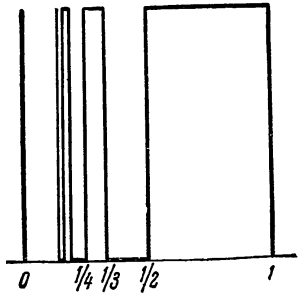


Рис. 32.

При помощи понятия связности можно совсем просто доказать, что прямолинейный отрезок не гомеоморфен квадрату. Действительно, удаляя из отрезка внутреннюю точку, мы получаем несвязное множество (именно, состоящее из двух компонент); удаляя же произвольную точку квадрата, получаем связное множество, так как после удаления одной точки из квадрата любые две точки остатка все еще можно соединить простой дугой (например, ломаной из двух звеньев), лежащей внутри остатка. Значит, квадрат и отрезок не гомеоморфны.

3.4 Непрерывные отображения. Если каждой точке x множества A поставлена в соответствие определенная точка $y = f(x)$ множества B, то говорят, что задано отображение f множества A в множество B. Точка $y = f(x)$ называется *образом* точки x, а все такие точки $y = f(x)$ при всевозможных x из A составляют *образ* множества A при отображении f; он обозначается через $f(A)$.

Если $B=f(A)$, т. е. если для каждой точки y из B найдется по крайней мере одна точка x из A, для которой $f(x)=y$, то говорят, что f отображает множество A на B. Таким образом, отображение множества A на B есть частный случай отображения множества A в B.

Совокупность всех точек из A, отображающихся в данную точку y, называется *прообразом* точки y и обозначается через $f^{-1}(y)$. Если $f^{-1}(y)$ состоит из одной точки для каждой точки y множества B, то соответствие f взаимно однозначно. В этом случае мы имеем, кроме прямого отображения f множества A на B, еще обратное отображение f^{-1} множества B на A.

Пусть A и B—множества, лежащие в топологических пространствах. Отображение f множества A в множество B называется *непрерывным* в точке a, если образ всякого подмножества, бесконечно близкого к a, бесконечно близок к $f(a)$ (т. е. из $a\ \delta\ M$ следует $f(a)\ \delta\ f(M)$).

Если отображение f непрерывно в каждой точке множества A, то оно называется *непрерывным отображением* множества A.

Нетрудно установить эквивалентность этого определения непрерывности с определением Коши: *отображение f непрерывно в точке a, если для каждой окрестности V точки $b=f(a)$ существует окрестность U точки a, образ $f(V)$ которой принадлежит множеству V.*

Понятие непрерывности отображения является одним из самых основных топологических понятий [1]). Понятие равномерной непрерывности (см. п. **3.6**), однако, не является топологическим понятием. Чтобы описать это понятие в терминах качественной геометрии, нужно сделать всего один шаг от топологии в сторону метрической геометрии.

3.5. Инфинитезимальные свойства. В топологическом пространстве установлено отношение бесконечной близости между точкой и множеством, но не определено понятие бесконечной близости между двумя множествами, понятие, которое имеет простой смысл в метрической геометрии. Заимствуя из метрической геометрии только одно это понятие и рассматривая бесконечную близость точки и множества его частным случаем, мы приходим к новому виду пространств.

Инфинитезимальным пространством, или *пространством близости*, называется совокупность точек, в которой введено отношение бесконечной близости между двумя множествами: для

---

[1]) Взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y называется топологическим, если и само это отображение, и обратное отображение непрерывны. Два топологических пространства называются *гомеоморфными*, если одно из них можно топологически отобразить на другое.

каждых двух множеств установлено, являются они бесконечно близкими (будем кратко писать $A \delta B$) или нет ($A \overline{\delta} B$), причем, в частности, два множества, имеющие общие точки, считаются бесконечно близкими. Понятие пространства близости было введено В. А. Ефремовичем.

Каждое метрическое пространство автоматически является инфинитезимальным пространством, так как в нем определено понятие бесконечной близости.

Каждое инфинитезимальное пространство является автоматически топологическим пространством, так как, в частности, определена бесконечная близость между любыми множествами, с одной стороны, и множествами, составленными из одной точки, — с другой.

Два инфинитезимальных пространства (или два множества) R и R' называются *эквиморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение бесконечной близости между множествами, им принадлежащими (если множествам A и B соответствуют множества A' и B', то A' и B' тогда и только тогда бесконечно близки, когда бесконечно близки A и B).

Два эквиморфных пространства должны рассматриваться как эквивалентные с точки зрения инфинитезимальной геометрии.

Всякое множество M инфинитезимального пространства R может быть рассматриваемо как инфинитезимальное пространство, если бесконечную близость в M понимать в том же смысле, что и в R.

Инфинитезимальные свойства фигуры — это те свойства, которые могут быть формулированы в терминах бесконечной близости. Ясно поэтому, что инфинитезимальные свойства эквиморфных множеств одинаковы. Понятно, что каждое топологическое свойство вместе с тем является инфинитезимальным, но не наоборот. Два эквиморфных множества, конечно, гомеоморфны.

Приведем несколько примеров.

1. Интервал (0,1) (описываемый неравенствами $0 < x < 1$) гомеоморфен, но не эквиморфен всей бесконечной прямой, так как при любом гомеоморфизме множество A точек с четными целочисленными координатами и множество B точек с нечетными координатами на прямой перейдут в бесконечно близкие множества A' и B' на интервале (0,1).

2. Интервал (0,1) гомеоморфен, но не эквиморфен множеству M всех точек окружности, кроме какой-нибудь одной. (При любом гомеоморфизме не близкие множества ($^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ ...) и ($^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, ...) интервала (0,1) перейдут в бесконечно близкие множества из M.)

3. Подобно предыдущим примерам, все три следующих множества гомеоморфны, но не эквиморфны: 1) множество всех точек

сферы, не считая северного полюса, 2) множество всех внутренних точек круга, 3) множество всех точек евклидовой плоскости.

4. Рассмотрим следующие три множества:

A — часть плоскости, ограниченная горизонтальным отрезком и двумя вертикальными лучами, проведенными из его концов вверх (рис. 33);

B — часть плоскости, ограниченная горизонтальным отрезком и двумя наклонными лучами, проведенными через его концы так, чтобы оба внутренних угла были по 120° (рис. 34);

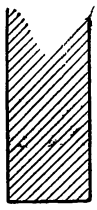


Рис. 33.

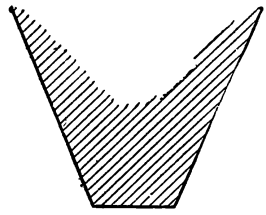


Рис. 34.

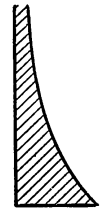


Рис. 35.

C — часть плоскости, ограниченная горизонтальным отрезком, вертикальным лучом, проведенным из левого конца отрезка, и линией, выходящей из правого конца и асимптотически приближающейся к этому вертикальному лучу (рис. 35).

Множества A, B и C гомеоморфны, но все три инфинитезимально различны, т. е. не эквиморфны.

5. Можно показать, что плоскость неевклидовой геометрии Лобачевского гомеоморфна, но не эквиморфна евклидовой плоскости. То же относится к поверхности $z = \dfrac{1}{+\sqrt{1-x^2-y^2}}$, к поверхности $z = (x^2+y^2)(z+1)^2$, к параболоиду $z = x^2+y^2$: все эти фигуры гомеоморфны, но никакие две из них не эквиморфны.

6. Множество точек (x, y) плоскости, удовлетворяющих соотношениям

$$y = \sin\frac{\pi}{x}, \qquad x > 0,$$

гомеоморфно, но не эквиморфно бесконечной прямой.

В случае инфинитезимального пространства отношение бесконечной близости богаче по содержанию, и поэтому аксиомы топологического пространства должны быть заменены здесь новыми; назовем их аксиомами инфинитезимального пространства.

Аксиома 0. Отношение близости симметрично: $A \delta B$ равносильно $B \delta A$.

Аксиома 1. Множество $A \cup B$ тогда и только тогда не бесконечно близко к C, если A не близко к C и B не близко к C. Иначе говоря, утверждение $A \cup B \overline{\delta} C$ равносильно двум соотношениям $A \overline{\delta} C$, $B \overline{\delta} C$.

Аксиома 2. Точки a и b бесконечно близки тогда и только тогда, когда a совпадает с b. Иначе говоря, $a \delta b$ равносильно $a = b$.

Аксиома 3 (аксиома отделимости). Если множества A и B не близки, то у них существуют непересекающиеся окрестности: если $A \overline{\delta} B$, то существуют такие их окрестности U_A и U_B, что $U_A \cap U_B = 0$. (Здесь под окрестностью U_A множества A будем понимать всякое множество U_A, для которого $R \setminus U_A \overline{\delta} A$.)

Из только что сформулированных аксиом вытекают основные аксиомы топологического пространства.

3.6. Равномерно непрерывное отображение. Теперь легко сформулировать в терминах инфинитезимальной геометрии определение равномерной непрерывности отображения.

Пусть A и B — множества в инфинитезимальных пространствах. Отображение f множества A в B называется *равномерно непрерывным*, если всякие два бесконечно близких множества из A переходят под влиянием f в бесконечно близкие.

В случае метрических пространств это определение равносильно обычному: *отображение f равномерно непрерывно, если для всякого положительного ε существует такое $\eta > 0$ (не зависящее от x_1 или x_2), что из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \eta$ следует $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть отображение f удовлетворяет последнему (метрическому) определению и пусть A_1 и A_2 — бесконечно близкие подмножества множества A. Тогда при произвольно малом ε найдутся в $f(A_1)$ и в $f(A_2)$ точки, отстоящие друг от друга меньше, чем на ε. Действительно, для этого нужно только взять в A_1 и в A_2 точки x_1 и x_2, для которых $\rho(x_1, x_2) < \eta$; тогда $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ и, следовательно, $\rho(f(A_1), f(A_2)) = 0$, т. е. $f(A_1)$ и $f(A_2)$ бесконечно близки. Пусть, наоборот, отображение f удовлетворяет инфинитезимальному определению равномерной непрерывности, и допустим, что тем не менее существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом η найдутся точки x_η и y_η, для которых $\rho(x_\eta, y_\eta) < \eta$ и $\rho(f(x_\eta), f(y_\eta)) > \varepsilon$. Теперь можно показать (это непосредственно вытекает из доказанной ниже леммы), что из множества всех пар x_η, y_η можно выбрать такую часть, что множество образов $f(x_\eta)$ для всех выбранных пар не будет бесконечно близко к множеству образов $f(y_\eta)$ для тех же пар; таким образом, множество всех x_η из выбранных пар бесконечно близко к множеству соответствующих y_η, а образы этих множеств не бесконечно близки. Полученное

противоречие доказывает, что из инфинитезимального определения равномерной непрерывности вытекает метрическое.

Докажем только что упомянутую лемму:

Лемма. *Если в метрическом пространстве последовательность пар точек a_n, b_n такова, что $\rho(a_n, b_n) > \varepsilon$, где ε — некоторое постоянное положительное число, то из нее можно выделить такую подпоследовательность a_{n_k}, b_{n_k}, что множество всех a_{n_k} не близко к множеству всех b_{n_k}:*

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \overline{\delta} \{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}.$$

При доказательстве можно предположить прежде всего, что от каждой точки a_n лишь конечное число точек последовательности $\{b_n\}$ находится на расстоянии, меньшем чем $\frac{\varepsilon}{4}$, так как если бы нашлась бесконечная подпоследовательность

$$b_{m_1}, \ldots, b_{m_k}, \ldots,$$

все точки которой отстоят от одной точки a_n менее чем на $\frac{\varepsilon}{4}$, то вся эта подпоследовательность находилась бы от множества точек последовательности

$$a_{m_1}, \ldots, a_{m_k}, \ldots$$

на расстоянии, не меньшем чем $\frac{\varepsilon}{2}$, что легко заключить на основании неравенства треугольника. Точно так же будем предполагать, что от любой точки b_m лишь конечное число элементов последовательности a_n отстоит меньше чем на $\frac{\varepsilon}{4}$.

Заметив это, начнем построение искомой подпоследовательности. За a_{n_1}, b_{n_1} примем пару точек a_1, b_1. Затем из последовательности a_2, b_2, a_3, b_3, ..., вычеркнем все такие пары (a_s, b_s), для которых $\rho(a_{n_1}, b_s) < \frac{\varepsilon}{4}$ или $\rho(a_s, b_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{4}$ (их конечное число). Первую из оставшихся пар примем за (a_{n_2}, b_{n_2}). Теперь, отправляясь от a_{n_2}, b_{n_2}, вычеркнем из следующих за ней пар уже поредевшей последовательности те пары, у которых вторая точка отстоит от a_{n_2} меньше чем на $\varepsilon/4$ или у которых первая точка отстоит от b_{n_2} меньше чем на $\varepsilon/4$. Первую пару из вновь поредевшей последовательности примем за a_{n_3}, b_{n_3}. Далее продолжаем процесс таким же образом неограниченно. Возникшая последовательность a_{n_k}, b_{n_k} и будет искомой, ибо $\rho(\{a_{n_k}\}_1^{\infty}, \{b_{n_k}\}_1^{\infty}) \geqslant \varepsilon/4$.

При помощи этой леммы читатель легко закончит лишь намеченное на предыдущей странице доказательство эквивалентности двух определений равномерной непрерывности.

Докажем в заключение следующее простое, но важное предположение, которое вскоре понадобится при изложении общего определения размерности:

Всякое непрерывное отображение компактного множества A метрического пространства R в метрическое пространство R' равномерно непрерывно на A. В частности (если R' — множество действительных или комплексных чисел), отсюда следует, что всякая непрерывная на A числовая функция равномерно непрерывна на A.

Заметим, что эту теорему можно сформулировать в более общем виде, заменив метрические пространства инфинитезимальными, но тогда надо заменить требование компактности множества A требованием бикомпактности. Весьма важное понятие бикомпактности было введено П. С. Александровым; см. книгу [8].

Доказательство от противного: пусть отображение $y=f(x)$, непрерывное на A, не является равномерно непрерывным. Иными словами, найдется такое $\varepsilon>0$, что существует последовательность пар точек x_n, x_n', для которых

$$\rho\left(x_n,\ x_n'\right)<\frac{1}{n} \tag{1}$$

и

$$\rho\left(f(x_n),\ f(x_n')\right)\geqslant\varepsilon. \tag{2}$$

В силу компактности множества A, из последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}, т. е. $x_{n_k}\longrightarrow x_0$, где $x_0\in A$. Докажем, что непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 ведет к противоречию. Действительно, из соотношения (1) следует, что последовательность x'_{n_k} тоже стремится к точке x_0; но тогда из непрерывности отображения f в точке x_0 следует, что при достаточно большом n

$$\rho\left(f(x_n),\ f(x_0)\right)<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ и }\ \rho\left(f(x_n'),\ f(x_0)\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

а это противоречит соотношению (2), ибо, в силу аксиомы треугольника,

$$\rho\left(f(x_n),\ f(x_n')\right)\leqslant\rho\left(f(x_n),\ f(x_0)\right)+\rho\left(f(x_n'),\ f(x_0)\right)<\varepsilon.$$

3.7. Размерность. Число измерений (или размерность) пространства является одним из важнейших его свойств. Оно является топологическим инвариантом пространства; однако в нашем изложении этот факт до сих пор не был доказан. Это не случайно: теорема о топологической инвариантности числа измерений является весьма тонкой; доказательство ее в общем случае не может быть простым, если не привлечь особенно остроумных средств (в при-

веденном ниже доказательстве такими средствами служат лемма Шпернера и закон минимальной кратности покрытия). Эта теорема тесно связана с общей проблемой определения размерности: нельзя ли произвольному сколь угодно сложному множеству точек (или произвольному топологическому пространству) приписать некоторое целое число, которое естественно было бы назвать его числом измерений (размерностью), Эта проблема была блестяще разрешена выдающимся советским математиком П. С. Урысоном, которым было дано определение числа *измерений* для любого топологического пространства.

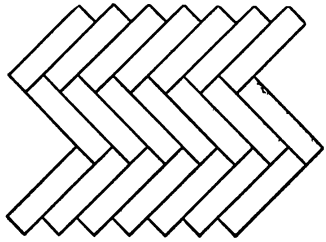


Рис. 36.

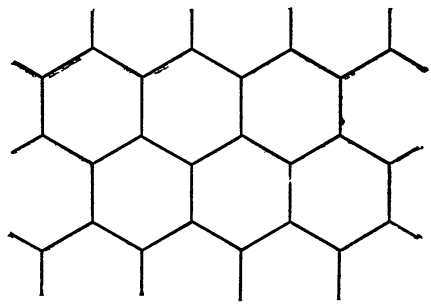


Рис. 37.

Здесь мы ограничимся определением *размерности* для случая любого компактного множества в метрическом пространстве.

Будем отправляться от следующего важного свойства n-мерного куба (или n-мерного симплекса), которое, как мы увидим, имеет топологический характер: n-мерный куб (а также n-мерный симплекс) при любом $\varepsilon > 0$ может быть покрыт конечным числом замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$ (замкнутое ε-покрытие) так, что никакая его точка не будет принадлежать более чем $n+1$ из этих множеств.

Для $n=1$ это очевидно: прямолинейный отрезок можно $k-1$ точками разбить на k равных отрезков, образующих покрытие данного отрезка; при этом каждая из делящих точек покрыта точно двумя отрезками, всякая иная точка — только одним отрезком; так как k произвольно, то отрезки сколько угодно малы.

Для $n=2$ такое покрытие дает обыкновенный паркет (рис. 36) или система правильных шестиугольников (рис. 37), заполняющих плоскость: каждая точка принадлежит не более чем трем шестиугольникам (именно, в вершинах сходятся по три шестиугольника).

При произвольном n такое покрытие образует система n-мерных клеток дуального разбиения к любому симплициальному разбиению n-мерного пространства. Именно, каждая вершина

дуального разбиения принадлежит точно $n+1$ клетке покрытия, остальные точки покрыты меньшим числом клеток. Рекомендуем читателю представить себе наглядно при $n=3$ дуальное разбиение к какому-нибудь разбиению пространства на тетраэдры.

Говорят, что некоторое множество покрыто системой множеств F, если каждая его точка покрыта одним или несколькими множествами системы F. Для разных точек число h покрывающих ее множеств может быть различным; максимальное из этих чисел называется *кратностью покрытия*. Если пользоваться этим термином, то установленное только что свойство n-мерного пространства можно выразить так: любая ограниченная часть n-мерного пространства при любом $\varepsilon>0$ допускает замкнутое ε-покрытие кратности $n+1$.

Возникает вопрос, нельзя ли найти при любом $\varepsilon>0$ такое ε-покрытие симплекса (или куба), кратность которого была бы меньше $n+1$? Например, нельзя ли обыкновенный тетраэдр покрыть мелкими замкнутыми множествами так, чтобы ни одна его точка не была покрыта более чем тремя множествами? Оказывается, этого сделать нельзя. Например, если ε меньше радиуса вписанного в n-мерный симплекс шара, то замкнутого ε-покрытия этого симплекса кратности n не существует. Эта теорема (о том, что минимальная кратность ε-покрытия при достаточно малом ε равна $n+1$) является весьма глубокой и трудной; ее доказательству посвящены два ближайших параграфа.

Нетрудно видеть, что свойство компактного множества иметь при любом $\varepsilon>0$ ε-покрытие данной кратности есть его топологическое свойство. Действительно, известно, что функция, непрерывная на компактном множестве, равномерно непрерывна на нем, т. е. гомеоморфизм всякого такого множества является непременно эквиморфизмом; значит, при гомеоморфизме этого множества его ε-покрытие переходит в некоторое δ-покрытие, где δ тоже сколь угодно мало.

Из этого замечания и из упомянутой теоремы о минимальной кратности покрытия n-мерного симплекса непосредственно вытекает инвариантность числа измерений.

Вместе с тем эти соображения позволяют просто определить размерность для любого компактного множества: *размерностью* компактного множества назовем минимальное из таких целых чисел n, что при любом $\varepsilon>0$ существует ε-покрытие этого множества кратности $n+1$.

Топологическая инвариантность этого определения следует из только что приведенных рассуждений.

Из доказываемой в п. **3.9** теоремы о минимальной кратности покрытия n-мерного симплекса вытекает, что размерность последнего равна n. Это и дает в наиболее четкой форме доказательство инвариантности числа измерений.

3.8. Лемма Шпернера. Если *n-мерный симплекс* $A=(a_0a_1\ldots a_n)$ *покрыт замкнутыми множествами* $F_0, F_1, \ldots, F_n$ *так, что каждая его грань* $(a_{s_0}\, a_{s_1}\ldots a_{s_k})$, $k=0, 1, \ldots, n$, *оказывается целиком покрытой множествами* $F_{s_0}, F_{s_1}, \ldots, F_{s_k}$, *то существует точка x из A, покрытая всеми множествами, т. е. кратность покрытия равна* $n+1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольно мелкое симплициальное разбиение K нашего симплекса. Пусть b — любая из вершин комплекса K и пусть $A^k=(a_{s_0}\, a_{s_1}\ldots a_{s_k})$ — грань симплекса A наименьшего числа измерений k, содержащая точку b. Тогда точка b принадлежит хотя бы одному из множеств $F_{s_0}, F_{s_1}, \ldots, F_{s_k}$; пусть это будет множество F_i. Поставим этой вершине b в соответствие вершину a_i симплекса A, имеющую тот же индекс i, что и множество F_i. Таким образом, каждой вершине b комплекса K поставлена в соответствие некоторая вершина симплекса A, являющаяся одной из вершин той грани симплекса A, которая содержит b как внутреннюю точку. Оказывается, что в этом случае в комплексе K непременно найдется такой n-мерный симплекс, всем вершинам которого соответствуют разные вершины комплекса A. Именно в доказательстве этого утверждения кроется главная трудность; его можно считать комбинаторной формой леммы Шпернера. Если это утверждение предположить доказанным, то завершить доказательство легко. В самом деле, в сколь угодно мелкой триангуляции K найдется симплекс, вершины которого соответствуют различным вершинам симплекса A, и, значит, по построению, он принадлежит различным множествам F_i. Таким образом, существует сколь угодно маленький симплекс, вершины которого принадлежат всем различным множествам F_i. Предельная точка x для этих вершин при все уменьшающихся размерах этого симплекса должна принадлежать всем множествам F_i, так как все эти множества замкнуты, т. е. содержат каждую свою предельную точку. Итак, найдена точка x, принадлежащая всем множествам F_i, что и требовалось.

Остается доказать главное утверждение.

Комбинаторная лемма. *Если каждой вершине b^0 симплициального разбиения K некоторого n-мерного симплекса* $A=a_0a_1\ldots a_n$ *поставлена в соответствие некоторая вершина той грани симплекса A, которая содержит b^0 как внутреннюю точку, то в K найдется хотя бы один такой n-мерный симплекс, назовем его главным, всем вершинам которого соответствуют разные вершины симплекса A.*

Доказательство. Здесь будет доказано более сильное утверждение, а именно, что таких (*главных*) симплексов в K будет непременно нечетное число (значит, отличное от нуля). Так как для $n=0$ это утверждение очевидно, проведем доказательство

индуктивно. Допустим его установленным для $(n-1)$-мерного симплекса и докажем для n-мерного. Примем в A какую-нибудь $(n-1)$-мерную грань, например $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, за «основание», остальные грани назовем «боковыми» и отметим все $(n-1)$-мерные симплексы комплекса K, вершины которых соответствуют различным вершинам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Прежде всего такие отмеченные симплексы существуют: на «основании» $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ они являются главными симплексами, и потому, в силу допущения, там их будет нечетное число. Подсчитаем число ν_k отмеченных граней в каждом из n-мерных симплексов комплекса K. В каждом главном симплексе отмечена точно одна грань ($\nu = 1$). Во всяком другом либо нет отмеченных граней ($\nu = 0$), либо отмечены точно две грани ($\nu = 2$), в чем легко убедиться непосредственно. Отсюда ясно, что, если бы главных симплексов было четное число, то сумма $\sum \nu_k$, распространенная на все n-мерные симплексы комплекса K, была бы четным числом. Между тем мы сейчас увидим, что она нечетна; это противоречие и завершит доказательство. В сумме $\sum \nu_k$ каждая отмеченная грань, лежащая внутри симплекса A, будет подсчитана дважды, ибо она принадлежит двум n-мерным симплексам; на «боковых» гранях симплекса A вовсе нет отмеченных граней; на «основании», как мы видели, их имеется нечетное число и каждая из них в сумме $\sum \nu_k$ будет подсчитана один раз, ибо она принадлежит только одному n-мерному симплексу комплекса K. Итак, сумма $\sum \nu_k$ действительно нечетна.

Следствия из леммы Шпернера. Заметим, что условие леммы удовлетворяется, если каждое из покрывающих симплекс A замкнутых множеств F_i не имеет общих точек с гранью A_i, противоположной вершине a_i. Действительно, если это так, то грань $(a_{s_0} a_{s_1} \ldots a_{s_k})$, содержащаяся в каждой из граней A_i, где i не входит в множество индексов $s_0, s_1, \ldots, s_k$, не пересекается с соответствующими множествами F_i; значит, эта грань должна быть целиком покрыта множествами $F_{s_0}, F_{s_1}, \ldots F_{s_k}$ (иначе не весь симплекс был бы покрыт всей системой множеств $F_0, F_1, \ldots, F_n$). Условие леммы выполнено. Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 1. Если n-мерный симплекс покрыт замкнутыми множествами $F_0, F_1, \ldots, F_n$, причем каждое множество F_i не пересекается с A_i ($(n-1)$-мерной гранью, противоположной вершине a_i), то все множества F_i имеют хотя бы одну общую точку.

Следствие 2. Если n-мерный симплекс A покрыт системой замкнутых множеств $F_0, F_1, \ldots, F_l$, причем ни одно множество не пересекается со всеми $(n-1)$-мерными гранями симплекса A, то кратность покрытия $\geqslant n+1$.

В самом деле, ни одно из множеств F_i не может содержать двух вершин симплекса A, ибо иначе оно пересекалось бы со всеми

его $(n-1)$-мерными гранями; с другой стороны каждая вершина принадлежит хоть одному множеству, значит, $l \geqslant n$. Пусть, например, вершина a_0 принадлежит множеству F_0, ..., вершина a_n принадлежит множеству F_n. Тогда каждое из этих множеств не может пересекаться с противоположной гранью (т. е. множество F_i не пересекается с гранью A_i). Если $l=n$, то мы уже находимся в условиях следствия 1. Остается рассмотреть случай $l>n$. Возьмем какое-нибудь из остальных множеств F_{n+1}, ..., F_i; оно не пересекается хотя бы с одной гранью A_i, и мы объединим его с соответствующим множеством F_i, $i \leqslant n$. Поступим так со всеми множествами F_{n+1}, ..., F_l. Обозначим через Φ_i сумму множества F_i со всеми присоединенными к нему множествами. От такого объединения кратность покрытия или не изменилась, или понизилась. Каждое множество Φ_i не пересекается с гранью A_i. Множества Φ_0, Φ_1, ..., Φ_n образуют покрытие, удовлетворяющее условиям следствия 1, значит, кратность этого покрытия $n+1$. Поэтому кратность покрытия F_0, F_1, ..., F_l не менее чем $n+1$.

3.9. Теорема о минимальной кратности покрытия. *При достаточно малом ε всякое замкнутое ε-покрытие n-мерного симплекса имеет кратность не менее чем $n+1$.*

Действительно, обозначим через r радиус вписанного в симплекс n-мерного шара. Если некоторое множество диаметра δ, содержащееся в симплексе A, пересекается с гранью A_i, то оно должно целиком помещаться в слое пространства толщины δ, прилегающем к A_i. Значит, если множество пересекается со всеми гранями A_i, то оно должно поместиться в общую часть всех таких слоев, но при толщине $\delta=r$ все эти слои имеют лишь одну общую точку — центр вписанного шара, а при $\delta<r$ совсем не имеют общих точек. Следовательно, никакое множество диаметра $<r$ не может пересекаться со всеми $(n-1)$-мерными гранями симплекса A. Но это означает, что при $\varepsilon<r$ к любому замкнутому ε-покрытию симплекса A можно применить следствие 2,—этим доказательство и завершается.

Как было уже сказано, из этой теоремы вытекает, что размерность n-мерного симплекса действительно равна n.

3.10. Заключение. Не только в создании теории размерности, но и в ее дальнейшем развитии основные заслуги принадлежат советским математикам.

Дальнейшее развитие теории размерности идет в сторону геометризации теории и внесения в нее методов комбинаторной топологии, чем достигается и значительное расширение ее проблематики.

Приведем две теоремы П. С. Александрова, явившиеся отправными точками этого нового направления в теории размерности и вообще в теоретико-множественной топологии.

Пусть Φ — какое-либо ограниченное замкнутое множество, лежащее в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Непрерывное отображение f множества Φ на множество Φ', лежащее в том же пространстве R^n, назовем ε-сдвигом, если для каждой точки $x \in \Phi$ расстояние $\rho(x, f(x)) < \varepsilon$. Первая теорема П. С. Александрова утверждает, что *всякое r-мерное замкнутое ограниченное множество $\Phi \subset R^n$ при всяком $\varepsilon > 0$ можно посредством ε-сдвига отобразить на некоторый r-мерный полиэдр; в то же время (для данного замкнутого множества Φ) существует такое $\varepsilon > 0$, что множество Φ посредством ε-сдвига нельзя отобразить на полиэдр размерности $< r$*. Эта теорема, очевидно, сводит размерность любого замкнутого ограниченного множества [1]) к размерности полиэдров.

Вторая теорема П. С. Александрова связана с понятием так называемых существенных отображений. Пусть дано отображение f компакта Φ на куб Q какой-либо размерности r. Пусть Φ_0 — прообраз границы куба Q при отображении f (т. е. множество всех тех точек $x \in \Phi$, для которых точка $f(x)$ лежит на границе куба). Назовем *допустимым видоизменением* отображения f всякое отображение g компакта Φ в тот же куб Q, совпадающее с f во всех точках множества Φ_0 (т. е. $g(x) = f(x)$, если $x \in \Phi_0$). Отображение f называется *существенным*, если всякое его допустимое видоизменение является отображением компакта Φ на весь куб Q (легко видеть, что если f не есть существенное отображение, то имеется такое допустимое видоизменение g отображения f, при котором весь образ компакта Φ содержится в границе куба Q). Вторая теорема П. С. Александрова утверждает, что *всякий r-мерный компакт можно существенно отобразить на r-мерный куб, но нельзя существенно отобразить на куб размерности $> r$*.

Эти две теоремы послужили основой так называемой *гомологической теории размерности*, построенной П. С. Александровым (1931 — 1932 гг.) и позволившей решить многие, казавшиеся недоступными, задачи, возникшие при самом возникновении урысоновской теории размерности. В частности, при помощи гомологической теории размерности Л. С. Понтрягин построил замечательный пример двух двумерных компактов, топологическое произведение которых имеет размерность 3 (а не 4, как естественно было предполагать).

Понятия и методы теории размерности (например, систематическое пользование методом покрытий) сыграли большую роль при выработке современных качественных методов вариационного исчисления, функционального анализа и дифференциальной геометрии

[1]) В действительности же и размерность любого компакта.

(понятие «категории» в работах Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана).

В послевоенные годы возник новый важный отдел топологии — так называемая дифференциальная топология. Она развилась из теории, изучающей свойства дифференцируемых отображений, т. е. отображений, которые в координатах описываются непрерывно дифференцируемыми функциями. Дифференциальная топология изучает свойства фигур, сохраняющиеся при любых «диффеоморфизмах» (так называются взаимно однозначные преобразования, которые в координатах могут быть заданы непрерывно дифференцируемыми функциями для прямого и обратного отображения). Начало систематическому изучению этих свойств положили Х. Уитни и Л. С. Понтрягин в начале сороковых годов.

Подобно тому как в общей топологии две гомеоморфные фигуры равноценны, здесь равноценными считаются *диффеоморфные* фигуры, т. е. две такие фигуры, между точками которых можно установить диффеоморфизм. Две диффеоморфные фигуры, конечно, гомеоморфны, но, вообще говоря, не наоборот. Так, окружность, граничная линия туза червей и простая замкнутая ломаная гомеоморфны, но не диффеоморфны.

Особый интерес представляет изучение с этой новой точки зрения n-мерных гладких многообразий, служащих n-мерным обобщением гладких поверхностей (и гладких линий), т. е. таких, у которых касательная плоскость (для линий — касательная) перемещается непрерывно с точкой касания. (Окружность — гладкая линия, но другие две линии последнего примера не гладки.) До недавнего времени математики в глубине души верили, что любые два гомеоморфных гладких n-мерных многообразия диффеоморфны (и это действительно так для $n=1$, 2). Этой наивной уверенности в 1956 г. неожиданно нанес удар молодой американский математик Дж. Милнор, показавший, что это не так уже для $n=7$, а именно, существует семимерное гладкое многообразие, гомеоморфное, но не диффеоморфное сфере S^7. Затем была проделана большая работа по изучению диффеоморфизмов сфер различного числа измерений. Весьма важный вклад в изучение диффеоморфизмов уже более общих гладких многообразий внес молодой московский математик С. П. Новиков (1964, 1965).

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров и В. Ефремович, Очерк основных понятий топологии, М.—Л., ОНТИ, 1936.

Небольшая, популярно написанная книга, содержащая много фактов, дополняющих материал статьи. В книге доказаны многие теоремы, упомянутые здесь без доказательства, более подробно рассказано о гомологиях.

[2] В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович, Очерк основных идей топологии, Математическое просвещение (новая серия), вып. 2, 3, 4 и 6, М., Гостехиздат—Физматгиз, 1957, 1958, 1959 и 1961.

Статья, состоящая из четырех частей и содержащая популярный рассказ о различных понятиях и теоремах топологии. Изложение рассчитано на неподготовленного читателя. Кроме материала, изложенного в этой книге ЭЭМ, в статье рассказано о понятии гомотопии, играющем важнейшую роль в топологии, об узлах и др.

[3] Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, перев. с англ., М.—Л., Гостехиздат, 1947.

Глава V этого всеобъемлющего изложения для начинающих основных понятий и идей математики посвящена топологии. Эта глава содержит относительно мало материала, но изложен материал весьма наглядно и «геометрично».

[4] Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, перев. с нем., М.—Л., Гостехиздат, 1951.

К теме настоящей статьи примыкает последняя глава «топология» этой книги, рассчитанной на начинающих читателей—студентов младших курсов высшей школы, а частично даже на школьников.

[5] П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

В книге дается углубленное изложение основных вопросов, связанных с понятиями множества, функции, предела, непрерывности и др. Изложение рассчитано на серьезную работу читателя и предназначено для учителей, студентов пединститутов и университетов. В главах VI и VII дается подробное изложение понятий и фактов, относящихся к теории метрических и топологических пространств. Подробно изложен ряд упомянутых в настоящей статье понятий, например связность, компактность и др.

[6] Г. Зейферт и В. Трельфалль, Топология, перев. с нем., М.—Л., Гостехиздат, 1938.

Учебник топологии, рассчитанный на студентов-математиков. Много внимания уделяется наглядно-геометрическим вопросам; в частности, здесь содержится много интересных фактов, относящихся к трехмерным многообразиям.

[7] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, ОГИЗ, 1947.

[8] П. С. Александров, Комбинаторная топология, ОГИЗ, 1947.

[9] В. Г. Болтянский, Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. ин-та Акад. наук СССР, вып. 47, 1955.

В книгах [7]—[9] содержится подробное изложение теории гомологий и других разделов комбинаторной топологии, представляющих собой далеко идущее развитие фактов, изложенных в §§ 1 и 2 этой статьи. В книге [9] подробно изложены, кроме того, не затронутые в статье основные гомотопические понятия и факты. Все три книги рассчитаны на читателя, обладающего определенной математической культурой и некоторой подготовкой, например на студента-математика.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Различные определения конических сечений 557
1.1. Конические сечения как сечения прямого кругового конуса 557
1.2. Директориальное свойство конических сечений 559
1.3. Фокальные свойства эллипсов и гипербол 563
1.4. Конические сечения и задача Аполлония 565
1.5. Аналитическое определение конических сечений. 568
§ 2. Эллипс 569
2.1. Форма эллипса 569
2.2. Взаимное расположение эллипса и прямой. Касательная к эллипсу 572
2.3. Свойства фокусов эллипса 574
2.4. Некоторые окружности, связанные с эллипсом. Теоремы Понселе 576
2.5. Эллипс как результат сжатия окружности 579
§ 3. Гипербола 587
3.1. Форма гиперболы 587
3.2. Свойства фокусов гиперболы 590
3.3. Уравнение гиперболы 591
3.4. Взаимное расположение гиперболы и прямой. Касательная к гиперболе 593
3.5. Свойства асимптот 596
§ 4. Парабола 598
4.1. Форма параболы. Уравнение параболы 598
4.2. Взаимное расположение параболы и прямой. Касательная к параболе 599
§ 5. Некоторые общие свойства конических сечений 603
5.1. Полярное уравнение конических сечений 603
5.2. Софокусные конические сечения 605
Литература 607

§ 1. Различные определения конических сечений

1.1. Конические сечения как сечения прямого кругового конуса. *Коническим сечением* в собственном смысле слова называется кривая, которая получается в результате *пересечения круговой конической поверхности с плоскостью, не проходящей через вершину.*

При этом под конической поверхностью понимают поверхность, образованную вращением прямой l вокруг пересекающей ее (и не перпендикулярной к ней) прямой p; эта поверхность состоит из

двух частей или пол, смыкающихся в точке пересечения прямых l и p — вершине конуса (рис. 1). Плоскость может пересекать одну полу конуса по замкнутой ограниченной кривой (рис. 2, *а*), или пересекать одну полу конуса по неограниченной кривой (рис.

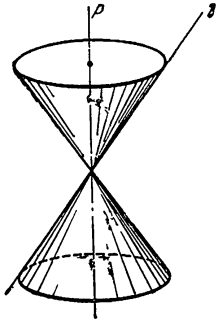


Рис. 1.

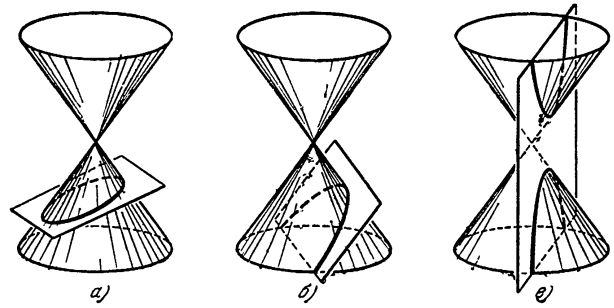


Рис. 2.

2, *б*), или же пересекать обе полы конуса (рис. 2, *в*). Изображенные на рис. 2, *а* — *в* кривые различны по виду, но все они являются коническими сечениями. Сечения цилиндрической поверхности плоскостью, не параллельной образующим цилиндра (рис. 3), также относят обыкновенно к коническим сечениям; впрочем, в дальнейшем мы увидим, что линия, изображенная на рис. 3, не отличается от той, которая имеется на рис. 2, *а*. Окружность также является частным случаем конического сечения, поскольку ее можно получить в пересечении конуса с плоскостью, перпендикулярной к его оси (рис. 4), или цилиндра с плоскостью, перпендикулярной к его образующим; плоские сечения третьего из рассматриваемых в элементарной геометрии круглых тел — шара также не выводят за рамки класса конических сечений.

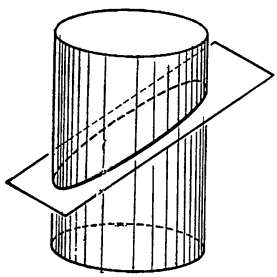


Рис. 3.

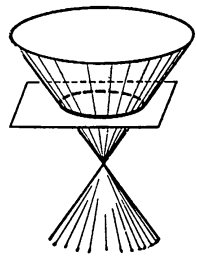


Рис. 4.

Если плоскость сечения проходит через вершину конической поверхности или параллельна образующей цилиндрической поверхности, то говорят, что коническое сечение вырождается или распадается. К числу вырожденных конических сечений относится пара пересекающихся прямых — образующих конуса (рис.5, *а*), пара параллельных прямых — образующих цилиндра (рис. 5, *б*), единственная прямая — образующая конуса или цилиндра (рис. 5, *в*, *г*); к числу вырожденных конических сечений можно также отнести «линию»,

состоящую из единственной точки (рис. 6, *а*) или даже вовсе не содержащую точек (рис. 6, *б*). («Коническое сечение», вовсе не содержащее точек, можно также получить, пересекая шар достаточно далекой от его центра плоскостью; рис. 6, *в*.) В элементарной теории конических сечений обычно ограничиваются рассмотрением более интересных собственных или невырожденных конических сечений.

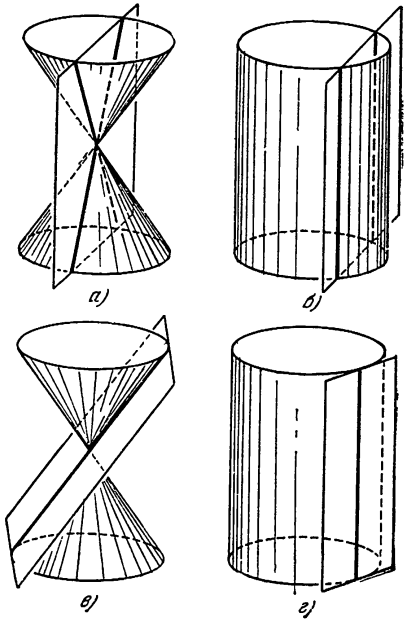


Рис. 5.

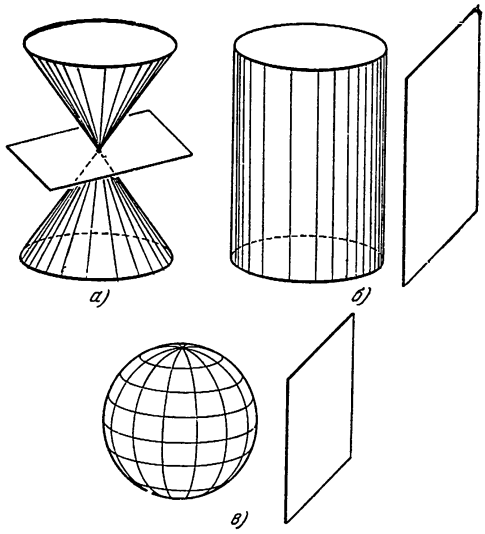


Рис. 6.

Данное нами определение конических сечений довольно громоздко; кроме того, оно неудобно тем, что имеет стереометрический характер, в то время как сами конические сечения являются плоскими кривыми и вполне могут изучаться в рамках планиметрии. Ниже мы покажем, что конические сечения можно определить и иным образом, не прибегая к представлениям, связанным с геометрией в пространстве.

1.2. Директориальное свойство конических сечений. Здесь мы докажем, что каждое отличное от окружности (невырожденное) коническое сечение можно определить как *множество точек M, отношение расстояния MF которых от фиксированной точки F к расстоянию MP от фиксированной прямой f, не проходящей через точку F, равно постоянной величине* ε:

$$\frac{MF}{MP} = \varepsilon = \text{const}.$$

Точка F называется *фокусом* конического сечения, прямая f — его *директрисой*, а отношение ε — *эксцентриситетом*.

(Если точка F принадлежит прямой f, то условие $\frac{MF}{MP}=\varepsilon=$ $=\text{const}$ определяет множество точек, представляющее собой пару прямых (рис. 7, *а*), т. е. вырожденное коническое сечение; при $\varepsilon=1$ эта пара прямых сливается в одну прямую (рис. 7, *б*).)

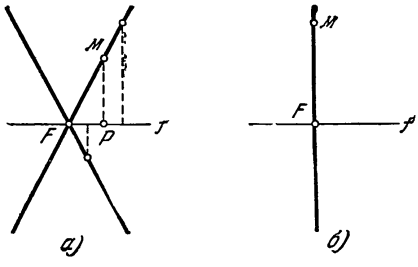


Рис. 7.

Для доказательства рассмотрим конус, образованный вращением прямой l вокруг пересекающей ее в точке O прямой p, составляющей с l угол $\alpha<90°$; пусть плоскость π не проходит через вершину конуса и образует с его осью p угол $\beta<90°$ (рис. 8, *а* — *в*; если $\beta=90°$, то плоскость π пересекает конус по окружности). Впишем в конус шар K, касающийся плоскости π в точке F и касающийся конуса по окружности S. Линию пересечения плоскости π с плоскостью σ окружности S обозначим через f. Теперь соединим произвольную точку M, лежащую на линии Λ пересечения плоскости π и конуса, с вершиной O конуса и с точкой F и опустим из M перпендикуляр MP на прямую f; обозначим еще через E точку пересечения образующей MO конуса с окружностью S. При этом $MF=ME$, как отрезки двух касательных шара K, проведенных из одной точки M. Далее, отрезок ME образует с осью p конуса постоянный (т. е. не зависящий от выбора точки M) угол α, а отрезок MP — постоянный угол β; поэтому проекции этих двух отрезков на ось p соответственно равны $ME\cos\alpha$ и $MP\cos\beta$. Но эти проекции совпадают, так как отрезки ME и MP имеют общее начало M, а концы их лежат в плоскости σ, перпендикулярной к оси p. Поэтому $ME\cos\alpha=MP\cos\beta$, или, поскольку $ME=MF$,

$$MF\cos\alpha=MP\cos\beta,$$

откуда и следует, что

$$\frac{MF}{MP}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\varepsilon=\text{const}.$$

Нетрудно также показать, что если точка M плоскости π не принадлежит конусу, то $\frac{MF}{MP}\neq\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Таким образом, каждое сечение прямого кругового конуса может быть описано как множество точек плоскости, для которых $\frac{MF}{MP}=\text{const}$. С другой сторо-

ны, меняя значения углов α и β, мы можем придать эксцентриситету $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ любое значение $\varepsilon > 0$; далее, из соображений подобия нетрудно понять, что расстояние FQ от фокуса до директрисы

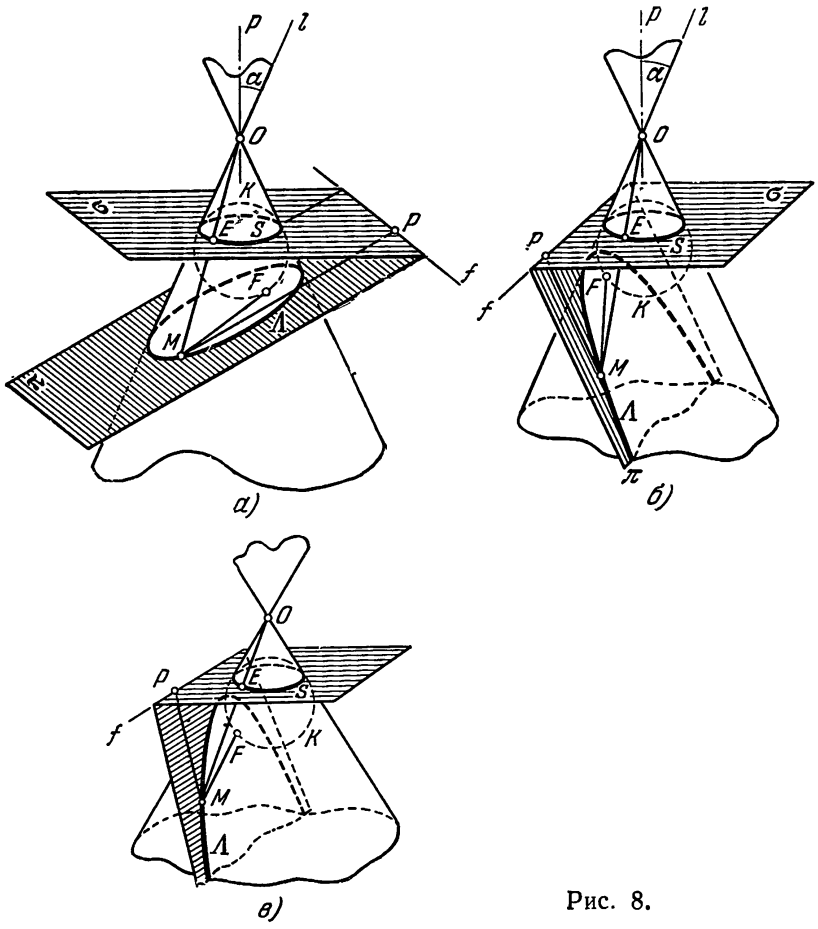


Рис. 8.

прямо пропорционально радиусу r шара K (или расстоянию d плоскости π от вершины O конуса) [1]), так что, выбирая подходящим образом расстояние d, мы можем придать расстоянию FQ любое значение. Поэтому каждое множество точек M, для которых отношение расстояний от M до фиксированной точки F и до фиксированной прямой f имеет постоянную величину, можно описать как кривую, получаемую в сечении прямого кругового конуса

[1]) Можно показать, что $FQ = \frac{r(\sin\alpha + \sin\beta)}{\cos\beta}$,

плоскостью. Тем самым доказано, что (невырожденные) конические сечения можно также определить тем свойством, о котором говорится в настоящем пункте.

Это свойство конических сечений называют их *директориальным свойством*. Ясно, что если $\beta > \alpha$, то $\varepsilon < 1$; если $\beta = \alpha$, то $\varepsilon = 1$; наконец, если $\beta < \alpha$, то $\varepsilon > 1$. С другой стороны, нетрудно видеть, что если $\beta > \alpha$, то плоскость π пересекает конус по замкнутой ограниченной линии; если $\beta = \alpha$, то плоскость π пересекает конус по неограниченной линии; если $\beta < \alpha$, то плоскость

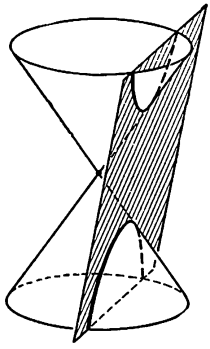


Рис. 9.

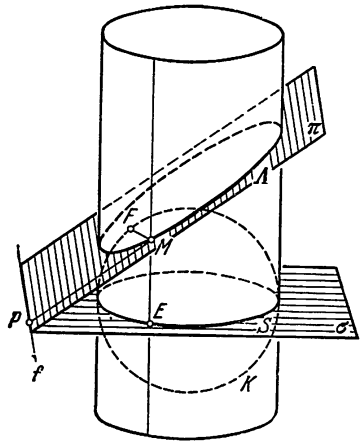


Рис. 10.

π пересекает обе полы конуса и, следовательно, линия пересечения этой плоскости и конуса состоит из двух (неограниченных) частей или ветвей (рис. 9). Коническое сечение, для которого $\varepsilon < 1$, называется *эллипсом*; коническое сечение с эксцентриситетом $\varepsilon = 1$ называется *параболой*; коническое сечение, для которого $\varepsilon > 1$, называется *гиперболой*. К числу эллипсов относят также окружность, которую нельзя задать директориальным свойством; так как для окружности отношение $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ обращается в 0 (ибо в этом случае $\beta = 90°$), то условно считают, что окружность представляет собой коническое сечение с эксцентриситетом 0.

Теперь уже нетрудно доказать, что плоские сечения прямого кругового цилиндра также представляют собой эллипсы. В самом деле, пусть плоскость π образует с осью цилиндра угол $\beta < 90°$ (рис. 10). Впишем в цилиндр шар K, касающийся плоскости π в точке F, а цилиндра — по окружности S; через f обозначим линию пересечения плоскости σ окружности S и плоскости π. Соединим произвольную точку M пересечения плоскости π с цилиндром с точкой F и опустим из M перпендикуляр MP на прямую f; пусть,

кроме того, проходящая через точку M образующая ME цилиндра пересекает окружность S в точке E. При этом $MF = ME$ (как отрезки касательных, проведенных к K из одной точки M); с другой стороны, из прямоугольного треугольника MPE с острым углом $\angle PME = \beta$ получаем $\frac{ME}{MP} = \cos\beta$. Отсюда мы заключаем, что

$$\frac{MF}{MP} = \cos\beta = \text{const}.$$

Таким образом, сечение цилиндра плоскостью π представляет собой коническое сечение с фокусом F, директрисой f и эксцентриситетом $\cos\beta < 1$, т. е. является эллипсом.

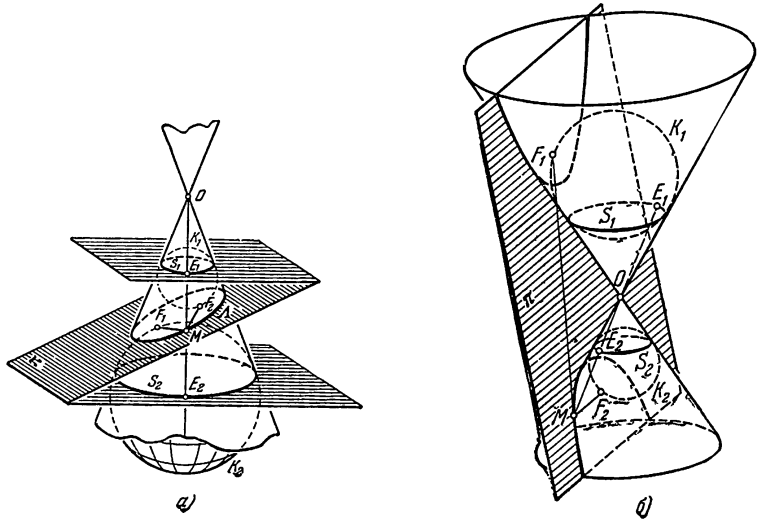


Рис. 11.

Нетрудно показать, что все эллипсы можно получить как плоские сечения цилиндров вращения.

1.3. Фокальные свойства эллипсов и гипербол. В случае $\beta = \alpha$ существует единственный вписанный в конус шар K, касающийся плоскости π (см. рис. 8, *б*). Однако если $\beta \neq \alpha$, то можно построить два таких шара, которые мы теперь обозначим через K_1 и K_2; точки их касания с плоскостью π (являющиеся фокусами соответствующего конического сечения) мы обозначим через F_1 и F_2, а окружности, по которым шары касаются конуса, — через S_1 и S_2 (рис. 11, *а*, *б*). Произвольную точку M эллипса или гиперболы соединим с фокусами F_1 и F_2 и с вершиной O конуса; пусть E_1 и E_2 — точки пересечения образующей OM конуса с окружностями S_1 и S_2. При этом $MF_1 = ME_1$ и $MF_2 = ME_2$ (как отрезки касательных, проведенных к K_1 и K_2 из одной точки M). Далее, в случае

эллипса (рис. 11, *а*)

$$MF_1 + MF_2 = ME_1 + ME_2 = E_1E_2.$$

Но расстояние E_1E_2 по образующей конуса между окружностями S_1 и S_2 не зависит, очевидно, от выбора точки M; обозначим это расстояние через $2a$. Отсюда следует, что эллипс можно определить также как *множество таких точек* M, *сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *постоянна*:

$$MF_1 + MF_2 = 2a = \text{const}.$$

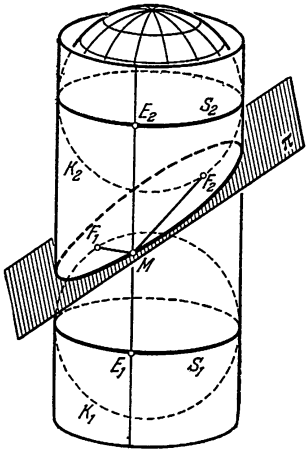


Рис. 12.

В случае гиперболы (см. рис. 11, *б*), выбрав точку M на той поле конуса, в которую вписан шар K_2, получаем:

$$MF_1 — MF_2 = ME_1 — ME_2 = E_1E_2 = 2a = \text{const}.$$

Если же точка M принадлежит той поле конуса, в которую вписан шар K_1, то

$$MF_2 — MF_1 = ME_2 — ME_1 = E_2E_1 = 2a = \text{const}.$$

Поэтому гиперболу можно определить как *множество таких точек* M, *абсолютная величина разности расстояний от которых до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *постоянна*:

$$|MF_1 — MF_2| = 2a = \text{const}$$

(здесь $2a$ равно расстоянию по образующей конуса между окружностями S_1 и S_2).

Доказанные свойства эллипса и гиперболы называются их *фокальными свойствами*; они могут быть положены в основу определения этих кривых. Фокальное свойство эллипса легко вывести и из определения этой кривой как плоского сечения цилиндра. В самом деле, впишем в цилиндр два шара K_1 и K_2, касающихся в точках F_1 и F_2 плоскости π, пересекающей цилиндр по эллипсу, и соединим произвольную точку M эллипса с точками F_1 и F_2 (рис. 12). Проведем еще через точку M образующую E_1E_2 цилиндра, пересекающую в точках E_1 и E_2 окружности S_1 и S_2, по которым касаются цилиндра шары K_1 и K_2. Отрезки MF_1 и ME_1, MF_2 и ME_2 равны как отрезки касательных, проведенных к K_1 и K_2 из одной точки M; поэтому

$$MF_1 + MF_2 = ME_1 + ME_2 = E_1E_2 = 2a = \text{const},$$

где $2a$ — расстояние по образующей цилиндра между окружностями S_1 и S_2.

Заметим еще, что если плоскость сечения π перпендикулярна к оси цилиндра или конуса (рис. 13, *а*, *б*), то точки F_1 и F_2, очевидно, совпадают; поэтому фокусы полученного при этом эллипса сливаются

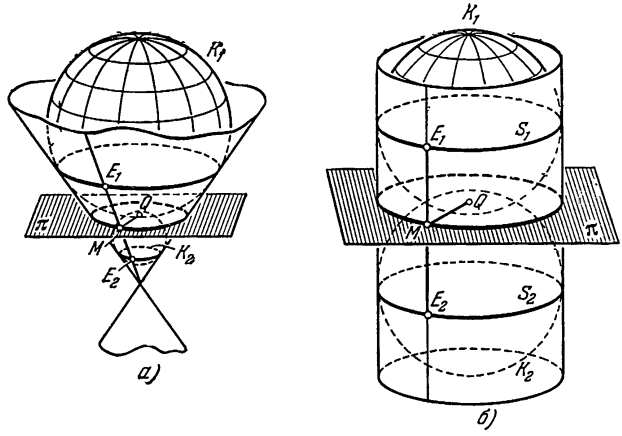


Рис. 13.

в одну точку Q, и фокальное свойство эллипса сводится к равенству

$$2MQ = 2a, \quad \text{т. е.} \quad MQ = a = \text{const},$$

определяющему окружность.

1.4. Конические сечения и задача Аполлония. Известная задача Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных (см. кн. IV ЭЭМ, стр. 513), также естественно приводит к коническим сечениям. При решении этой задачи целесообразно сначала рассмотреть всевозможные окружности S, касающиеся двух данных окружностей S_1 и S_2; при этом мы не будем исключать случай, когда одна или даже обе окружности S_1 и S_2 обращаются в «окружность бесконечно большого радиуса», т. е. в прямую. Если S_1 и S_2—две прямые, то множество центров всех окружностей S, касающихся S_1 и S_2, представляет собой, очевидно, пару пересекающихся прямых (рис. 14, *а*) или одну прямую (рис. 14, *б*), т. е. вырожденные конические сечения. Покажем, что в других случаях мы естественно приходим к невырожденным коническим сечениям.

Итак, пусть окружность S радиуса r касается окружности S_1 радиуса r_1 и окружности (или прямой) S_2 (рис. 15, *а*, *б*). Заменим окружность S концентрической с ней окружностью S' радиуса $|r \pm r_1|$, где знак «плюс» соответствует случаю внешнего касания окружностей S и S_1, а знак «минус»—случаю внутреннего касания. Ясно, что окружность S' будет проходить через центр Q_1 окружности S_1 и будет касаться концентрической с S_2 окружности S_2', радиус которой равен $|r_2 \mp r_1|$, где r_2—радиус окружности S_2 (или касаться параллельной S_2 прямой S_2', отстоящей от S_2 на расстояние r_1; см. рис. 15, *а*, *б*)[1]. Таким образом, отыскание множества

[1]) Другими словами, мы производим расширение (см. кн. IV ЭЭМ, стр. 497) на величину — r_1 (ср. с решением задачи Аполлония, указанным на стр. 513—514 кн. IV ЭЭМ).

центров всевозможных окружностей S естественно сводится к *отысканию множества центров всевозможных окружностей S', проходящих через данную точку Q_1 и касающихся данной окружности (или прямой) S_2'*. При этом можно считать, что точка Q_1 не принадлежит окружности (или прямой) S_2', так как в последнем случае множество центров окружностей S', очевидно, представляет собой прямую (рис. 16, *а*, *б*). Но в таком случае остается рассмотреть следующие три случая.

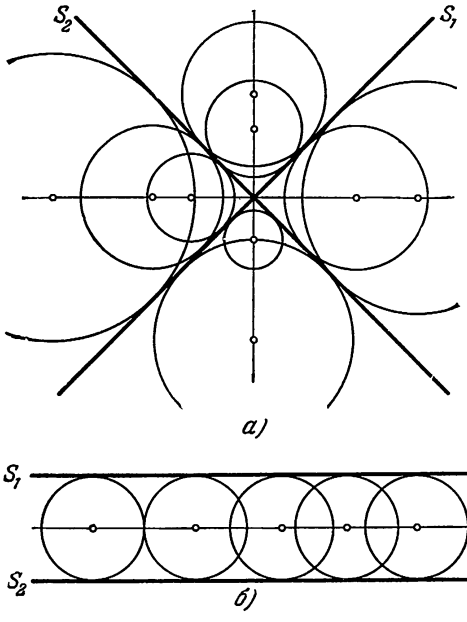


Рис. 14.

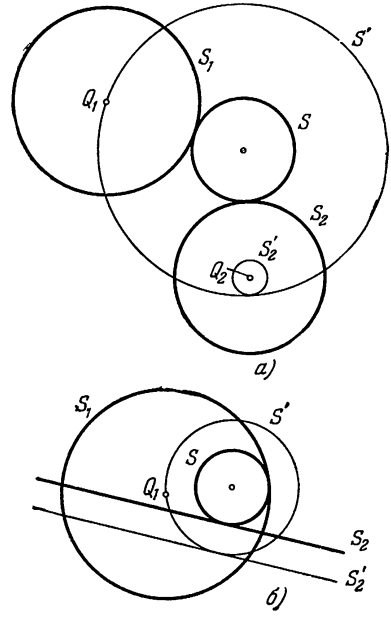


Рис. 15.

а) Точка Q_1 лежит внутри окружности S_2' (рис. 17, *а*). Если Q_2 и $2a$—центр и радиус окружности S_2', а M и R—центр и радиус (переменной) окружности S', то, очевидно,

$$Q_2M = 2a - R = 2a - Q_1M,$$

и, значит,

$$Q_2M + Q_1M = 2a.$$

Отсюда следует, что множество точек M представляет собой эллипс с фокусами Q_1 и Q_2.

б) Точка Q_1 лежит вне окружности S_2' (рис. 17, *б*). Сохраняя обозначения, введенные при рассмотрении предыдущего случая, мы найдем, что в зависимости от того, касается ли окружность S' окружности S_2' внешним или внутренним образом,

$$Q_2M = 2a + R = 2a + Q_1M \quad \text{или} \quad Q_2M = R - 2a = Q_1M - 2a,$$

т. е.

$$Q_2M - Q_1M = 2a \quad \text{или} \quad Q_1M - Q_2M = 2a.$$

Таким образом, в этом случае множество точек M представляет собой гиперболу с фокусами Q_1 и Q_2.

в) Наконец, если роль «окружности» S_2' играет прямая l (рис. 17, *в*), то, очевидно, расстояние MP от центра M окружности S' до прямой l равно радиусу MQ_1 окружности S:

$$MQ_1 = MP,$$

т. е. множество точек M представляет собой параболу с фокусом Q_1 и директрисой l.

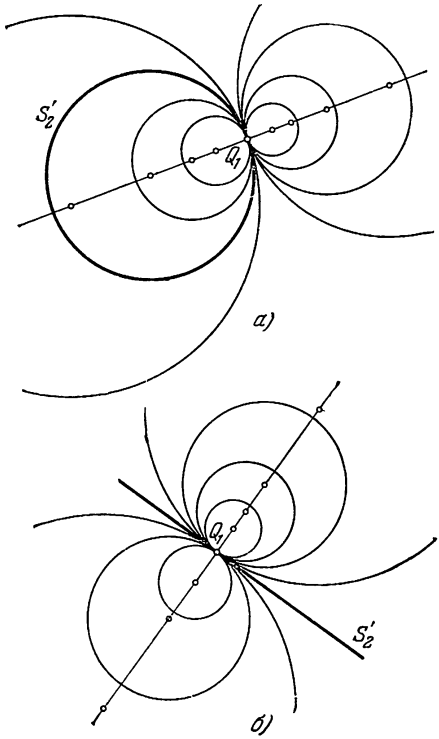


Рис. 16.

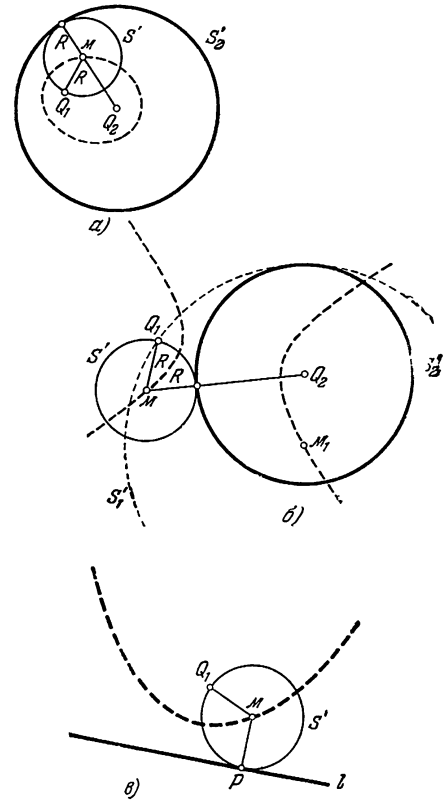


Рис. 17.

Нетрудно видеть, что любые эллипс, гиперболу или параболу можно описать как множество центров окружностей S', проходящих через фиксированную точку Q_1 и касающихся фиксированной окружности или прямой S_2'. Таким образом, невырожденные конические сечения можно определить как линии, представляющие собой *множество центров всевозможных окружностей, проходящих через данную точку и касающихся данной окружности (или прямой), не проходящей через эту точку.*

1.5. Аналитическое определение конических сечений. В курсах аналитической геометрии доказывается, что среди линий, записываемых в декартовых прямоугольных (или даже в общих аффинных) координатах общим уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля) встречаются лишь следующие восемь типов линий: а) эллипс; б) гипербола; в) парабола (невырожденные кривые второго порядка); г) пара пересекающихся прямых; д) пара параллельных прямых; е) пара совпавших прямых (одна прямая); ж) одна точка (вырожденные линии второго порядка); з) «линия», совсем не содержащая точек.

Обратно, любая линия каждого из указанных восьми типов[1]) записывается в декартовых прямоугольных координатах некоторым уравнением второго порядка. Поэтому (вырожденные и невырожденные) конические сечения можно определить также как *линии второго порядка*.

Таким образом, мы имеем целый ряд равноправных определений конических сечений, каждое из которых можно положить в основу их теории; наряду с этим существуют и многие другие определения этих замечательных линий. Наиболее важными являются последнее (аналитическое) и первое (стереометрическое) определения. Важность первого определения связана с тем, что оно показывает *проективную эквивалентность любого невырожденного конического сечения обыкновенной окружности*, т. е. оно дает описание конических сечений как линий, получающихся из окружности центральным проектированием в пространстве (или проективным преобразованием плоскости[2]). Однако стереометрический характер первого определения делает его довольно неудобным для геометрического анализа свойств конических сечений; что же касается последнего (аналитического) определения, то оно явно относится к аналитической, а не к элементарной геометрии. Поэтому мы ниже всюду будем понимать под *коническим сечением* множество таких точек M, что отношение расстояния MF от точки M до фиксированной точки F (фокуса) к ее расстоянию MP до фиксированной прямой f (директрисы) имеет

---

[1]) В курсах аналитической геометрии обычно говорят о девяти (а не о восьми) типах конических сечений, поскольку там различают «мнимый эллипс» и «пару мнимых параллельных прямых» (см. выше рис. 6, *в* и *б*), —геометрически эти «линии» одинаковы, поскольку обе не содержат ни одной точки, но аналитически они записываются разными уравнениями.

[2]) Ср. кн. IV ЭЭМ, стр. 117.

постоянное значение ε (называемое *эксцентриситетом* кривой):

$$\frac{MF}{MP} = \varepsilon = \text{const}.$$

Другими словами, в основу всего дальнейшего изложения мы положим директориальное свойство конических сечений. В зависимости от того, является ли эксцентриситет ε меньшим 1, равным 1 или большим 1, мы будем называть рассматриваемую линию эллипсом, параболой или гиперболой; при этом к числу эллипсов мы будем условно причислять и обыкновенную окружность, считая, что ее эксцентриситет равен нулю.

§ 2. Эллипс

2.1. Форма эллипса. Прямую, проходящую через F перпендикулярно к директрисе f, мы обозначим через x и назовем *главной осью* эллипса E; точку пересечения прямых f и x обозначим через D (рис. 18). Пусть точка M принадлежит эллипсу, т. е. $MF:MP=\varepsilon$. Если бы точка M и фокус F лежали по разные стороны от директрисы f, то так как отрезок MF не меньше своей проекции M_1F на прямую x и $MP=M_1D<M_1F$ (ибо точка D лежит между F и M_1), мы имели бы

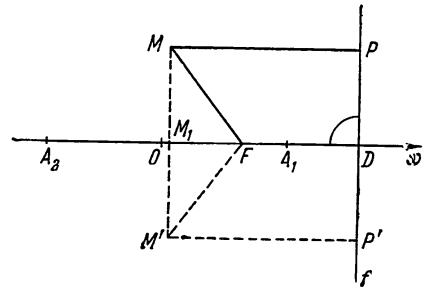


Рис. 18.

$$\varepsilon = MF:MP \geqslant M_1F:M_1D > 1,$$

что противоречит определению эллипса. Следовательно, *все точки эллипса расположены по ту сторону от директрисы, с какой находится фокус.*

Построим теперь точку M', симметричную точке M эллипса относительно прямой x. Из свойств осевой симметрии следует, что $MF=M'F$, $MP=M'P'$ (рис. 18), т. е. $M'F:M'P'=MF:MP=\varepsilon$, т. е. точка M' принадлежит тому же эллипсу, что и точка M. Далее, разделив отрезок FD внешним и внутренним образом в отношении ε, мы получим точки A_1 и A_2, также принадлежащие эллипсу. Эти две точки называются *вершинами* эллипса; кроме них, на прямой x нет других точек эллипса. Отрезок A_1A_2 называют *большой осью* эллипса; его длину мы обозначим через $2a$. Таким образом,

главная ось эллипса является его осью симметрии; она содержит две точки эллипса, которые служат концами его большой оси и называются вершинами эллипса.

Середину O большой оси эллипса будем называть *центром* эллипса. Докажем, что центр эллипса является его центром симметрии. Пусть точка M принадлежит эллипсу E и пусть точка M' симметрична с M относительно O. Чтобы доказать, что точка M' принадлежит эллипсу, нужно установить справедливость соотношения $M'F:M'P' = \varepsilon$ (рис. 19).

Прежде всего мы определим расстояние d_0 от точки O до директрисы, обозначая расстояние FD от фокуса до директрисы через p. Пусть, для определенности, через A_1 обозначен тот конец большой оси, который лежит между F и D. Тогда

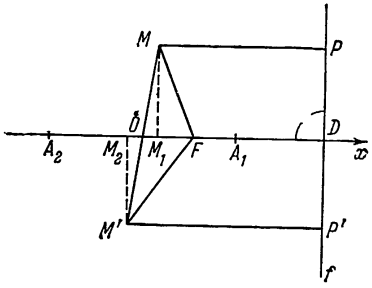


Рис. 19.

$$\frac{p - DA_1}{DA_1} = \varepsilon, \qquad DA_1 = \frac{p}{1+\varepsilon},$$

$$\frac{DA_2 - p}{DA_2} = \varepsilon, \qquad DA_2 = \frac{p}{1-\varepsilon}.$$

Учитывая, что $d_0 = \frac{1}{2}(DA_1 + DA_2)$, находим:

$$d_0 = \frac{p}{1-\varepsilon^2}.$$

Введем теперь обозначения $r = MF$, $r' = M'F$, $d = MP$, $d' = M'P'$. Так как в трапеции $MPP'M'$ отрезок OD является средней линией, то

$$d_0 = \frac{d+d'}{2}.$$

Сравнивая два найденных значения d_0, находим:

$$2p = (1-\varepsilon^2)(d + d').$$

Далее, из рассмотрения прямоугольных треугольников MM_1F и $M'M_2F$, у которых $MM_1 = M'M_2$, следует:

$$r^2 - (d-p)^2 = r'^2 - (d'-p)^2$$

или

$$r^2 - r'^2 = d^2 - d'^2 - 2p(d-d').$$

Подставив сюда найденное выше значение p, получим:

$$r^2 - r'^2 = d^2 - d'^2 - (1-\varepsilon^2)(d^2 - d'^2),$$

или

$$r^2 - \varepsilon^2 d^2 = r'^2 - \varepsilon^2 d'^2.$$

Но левая часть полученного равенства, по условию, равна нулю (так как $r:d = \varepsilon$); значит и правая часть также равна нулю (т. е. $r' = \varepsilon d'$). Тем самым установлено, что точка M' принадлежит эллипсу.

Итак,

центр эллипса является его центром симметрии.

Очевидно, что также и центр окружности (т. е. эллипса нулевого эксцентриситета) является ее центром симметрии.

Если точка M принадлежит эллипсу, то точка M', симметричная M относительно прямой x, также принадлежит эллипсу и точка M'', симметричная M' относительно центра O, принадлежит тому же эллипсу. Проведем через точку O прямую y, перпендикулярную к x (рис. 20). Очевидно, что прямая y параллельна MM' и проходит через середину O стороны $M'M''$ прямоугольного треугольника $MM'M''$ (с прямым углом при вершине M). Следовательно, прямая y перпендикулярна к отрезку $M''M$ и проходит через его середину, т. е. точки M и M'' симметричны относительно прямой y. Иначе говоря,

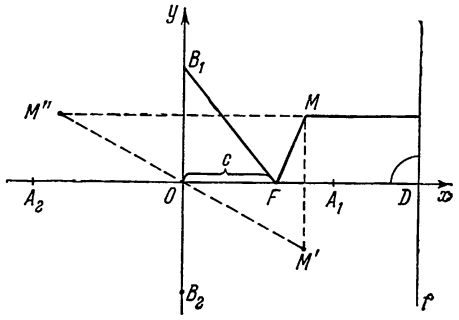


Рис. 20.

прямая y является второй осью симметрии эллипса.

Найдем точки эллипса, принадлежащие оси симметрии y. Пусть B — такая точка; тогда для нее $d = d_0 = p : (1 - \varepsilon^2)$. Из соотношения $r : d = \varepsilon$ находим:

$$BF = r = d_0\varepsilon = p\varepsilon : (1 - \varepsilon^2).$$

С другой стороны,

$$a = \frac{1}{2}(DA_2 - DA_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-\varepsilon} - \frac{p}{1+\varepsilon}\right) = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}.$$

Следовательно, $BF = a$, т. е. точка B прямой y в том и только в том случае принадлежит эллипсу, если $BF = a$. Но расстояние от центра O до фокуса F — оно называется *фокусным расстоянием* и обозначается через c — меньше большой полуоси: $c < a$, так как точка F лежит между O и A_1. Это значит, что на прямой y существуют две точки B_1 и B_2, расположенные на эллипсе симметрично относительно x. Эти точки также называются вершинами эллипса, а отрезок $B_1B_2 = 2b$ — *малой осью* эллипса.

Прямая, проходящая через центр эллипса перпендикулярно к его большой оси, является второй осью симметрии эллипса. На этой оси расположены две точки эллипса, называемые вершинами эллипса и являющиеся концами его малой оси. Расстояние каждой из этих вершин до фокуса равно большой полуоси эллипса.

Пусть точка $\tilde{F}$ и прямая $\tilde{f}$ симметричны F и f относительно прямой y. Примем $\tilde{F}$ за фокус и $\tilde{f}$ за директрису эллипса $\tilde{E}$ с

эксцентриситетом $\varepsilon = \varepsilon$. Если точка M принадлежит эллипсу E, то $MF : MP = \varepsilon$. Для точки $\tilde{M}$, симметричной M относительно оси y, мы имеем $\tilde{M}\tilde{F} : \tilde{M}\tilde{P} = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Это значит, что точка $\tilde{M}$ принадлежит эллипсу $\tilde{E}$. Но, согласно доказанному выше, точка $\tilde{M} = M''$ принадлежит также и эллипсу E; следовательно, каждая точка эллипса $\tilde{E}$ принадлежит эллипсу E (и наоборот), т. е. эллипсы $\tilde{E}$ и E совпадают. Мы видим, что

точка и прямая, симметричные с фокусом и директрисой эллипса относительно его малой оси, могут быть приняты за второй фокус и вторую директрису, определяющие при том же эксцентриситете тот же самый эллипс.

Из полученных выше соотношений и доказанных теорем вытекает справедливость следующих соотношений:

$$1.\ d_0 = \frac{p}{1-\varepsilon^2},\quad 2.\ c = d_0 - p = \frac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2},$$
$$3.\ a = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2},\quad 4.\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{p\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \qquad (1)$$

Из этих зависимостей могут быть выведены некоторые другие зависимости, часто встречающиеся в задачах, касающихся эллипса, как, например:

$$1.\ c : a = \varepsilon,\quad 2.\ d_0 = a : \varepsilon,\quad 3.\ c^2 = a^2 - b^2,\quad 4.\ a^2 = cd_0. \qquad (2)$$

В частности, *эксцентриситет эллипса равен отношению его фокального расстояния $2c$ к большой оси; разность квадратов большой и малой осей эллипса равна квадрату фокального расстояния.*

При $\varepsilon \to 0$ и данном a (переход от эллипса с полуосями a и b к окружности радиуса a) имеем $c \to 0$ или $b \to a$ и $p \to \infty$, $d_0 \to \infty$.

2.2. Взаимное расположение эллипса и прямой. Касательная к эллипсу. Пусть прямая g проходит через точку M, принадлежащую эллипсу E. Если эта прямая g параллельна директрисе f, то на ней будет находиться и вторая точка M' эллипса, симметричная M относительно x. (Если M обращается в A_1 или A_2, то M' совпадает с M.) Других точек эллипса (кроме M и M') прямая g содержать не будет, так как для любой отличной от M и M' точки прямой g расстояние d до директрисы будет тем же, что и для точек M и M', а расстояние r до фокуса будет иным, а значит, будет иным и отношение $\frac{r}{d}$.

Докажем, что и в общем случае, когда прямая g не параллельна f, эта прямая содержит кроме M единственную точку M' эллипса E, которая может и совпасть с точкой M. Сначала мы рассмотрим случай, когда прямая g не проходит через фокус F (рис. 21). Обозначим точку пересечения прямых g и f через G и построим

прямую g_1, симметричную прямой MF относительно FG. Прямые g и g_1 пересекаются: в самом деле, если бы прямые g и g_1 были параллельными, то треугольник MFG был бы равнобедренным, т. е. мы имели бы $MF = MG$ (рис. 22, *а*), причем $MG \geqslant MP$, и, значит, $r:d = \frac{MF}{MP} \geqslant 1$, что противоречит определению эллипса. Обозначим точку пересечения прямых g и g_1 через M'; очевидно, что $d:d' = MP:M'P' = MG:M'G$. С другой стороны, FG является по построению биссектрисой внешнего угла треугольника FMM' при вершине F, и поэтому $MG:M'G = r:r'$. Значит, $d:d' = r:r'$ и, следовательно, точка M' также принадлежит эллипсу E. Если, однако, прямые MF и FG перпендикулярны (рис. 22, *б*), то g_1 совпадает с MF и точка M' совпадает с M.

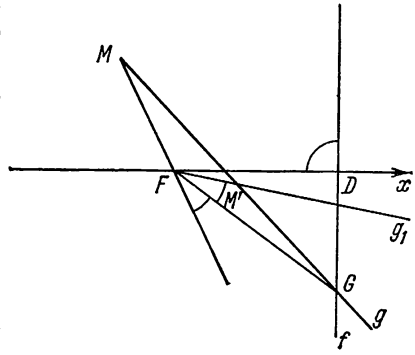


Рис. 21.

Остается еще доказать, что на прямой g нет отличной от M и M' точки эллипса. Допустим противное, а именно, пусть эллипсу E принадлежат точки M, M', M'' прямой g. Нетрудно видеть, что в этом случае прямая FG будет являться биссектрисой внешнего угла для трех треугольников FMM', $FM'M''$ и $FM''M$ и прямая FM будет симметрична с двумя прямыми FM' и FM'' относительно одной прямой FG, что невозможно.

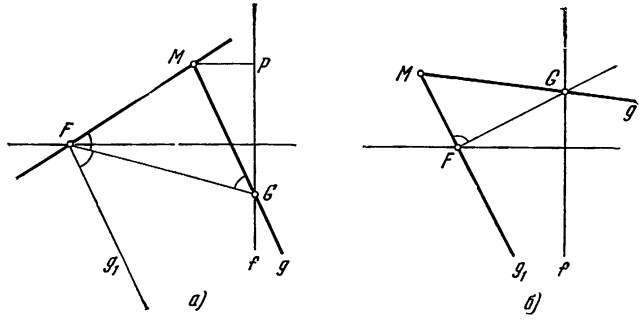


Рис. 22.

Наконец, необходимо рассмотреть исключенный выше случай, когда прямая g проходит через фокус F эллипса. Построим на прямой g точку M', для которой

$$FM':M'G = FM:MG \qquad (*)$$

(рис. 23). Из пропорции (*) можно вывести новую пропорцию

$$r:r' = MG:M'G, \quad \text{или} \quad r:r' = d:d',$$

так как $MG:M'G=d:d'$; но это означает, что M' принадлежит эллипсу E. Третьей точки M'', принадлежащей эллипсу E, на прямой g, очевидно, быть не может, поскольку существует лишь одна точка M', удовлетворяющая условию (*).

Прямая, проходящая через одну точку эллипса, содержит вторую его точку, которая может совпасть с первой. Трех общих точек эллипс и прямая иметь не могут.

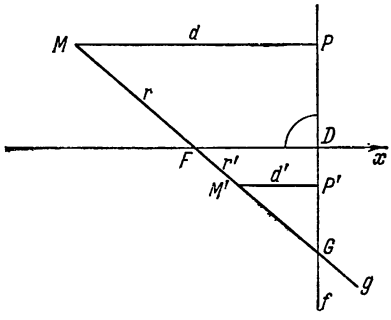


Рис. 23.

Прямую t, имеющую с эллипсом только одну общую точку M, будем называть *касательной* к эллипсу в точке M. Из сказанного выше следует, что *в каждой точке эллипса можно провести единственную касательную и отрезок MG касательной t, заключенный между точкой касания и директрисой, виден из фокуса F под прямым углом.*

Чтобы построить касательную t в точке M эллипса E, *проведем через фокус F прямую, перпендикулярную к прямой MF*, и *обозначим через G точку ее пересечения с директрисой; тогда прямая MG и будет искомой касательной t.* Из этого построения вытекает, что касательные t_{A_1}, t_{A_2} к эллипсу E в вершинах A_1 и A_2 параллельны оси y. Касательные t_{B_1} и t_{B_2} в вершинах B_1 и B_2 параллельны оси x, для доказательства чего достаточно воспользоваться формулами (1).

Каждую хорду эллипса, проходящую через его центр O, будем называть *диаметром* эллипса. Покажем, что касательные t_A и t_B к эллипсу в концах A и B его диаметра AB параллельны. Действительно, преположим, что эти касательные не параллельны (рис. 24). Проведем через точку B прямую $t_{B'}$, параллельную t_A. Прямая $t_{B'}$ пересекает эллипс в точке B', которая симметрична относительно центра O точке A', принадлежащей эллипсу и прямой t_A. Но в таком случае прямая t_A не является касательной. Итак,

касательные к эллипсу в концах его диаметра параллельны.

2.3. Свойства фокусов эллипса. Пусть $r=MF_1$ и $\tilde{r}=MF_2$ — фокальные радиусы точки M эллипса; расстояния точки M до директрис обозначим соответственно через d и $\tilde{d}$ (рис. 25). Согласно определению, имеем:

$$r+\tilde{r}=(d+\tilde{d})\,\varepsilon=2d_0\varepsilon.$$

Пользуясь затем первым и третьим соотношениями (1), получаем:

$$r+\tilde{r}=\frac{2p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}=2a.$$

Сумма фокальных радиусов для каждой точки эллипса равна его большой оси.

Ясно, что это свойство (ср. выше, п. **1.3**) сохраняет силу и для окружности, если только считать, что оба ее фокуса совпадают с ее центром.

Пусть T и $\tilde{T}$ — точки пересечения касательной в точке M эллипса с его директрисами f и $\tilde{f}$. Соединим точки T и $\tilde{T}$ с соответствующими фокусами F и $\tilde{F}$ и проведем через точку M прямую,

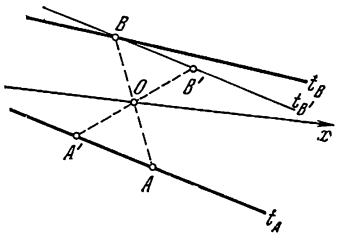


Рис. 24.

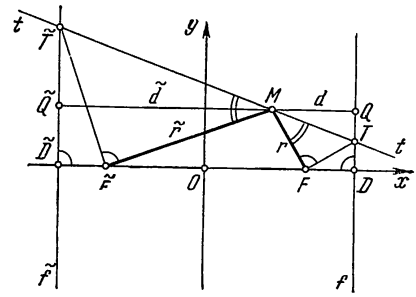


Рис. 25.

параллельную оси x и пересекающую директрисы в точках Q и $\tilde{Q}$ (рис. 25). Очевидно, что

$$d:\tilde{d}=MT:M\tilde{T}, \qquad d:\tilde{d}=r:\tilde{r},$$

откуда следует, что в прямоугольных треугольниках MTF и $M\tilde{T}\tilde{F}$ имеет место соотношение $r:\tilde{r}=MT:M\tilde{T}$. Поэтому рассмотренные прямоугольные треугольники подобны и $\angle TMF=\angle \tilde{T}M\tilde{F}$, т. е. *фокальные радиусы, проведенные в точку эллипса, одинаково наклонены к касательной эллипса, проведенной в этой точке.*

Это свойство касательной может быть положено в основу ее построения: касательная к эллипсу в данной точке M является биссектрисой внешнего угла треугольника $MF\tilde{F}$ при вершине M. С другой стороны, это свойство касательной позволяет объяснить одно замечательное оптическое свойство вогнутого зеркала, имеющего форму эллипса: *если источник света помещен в одном из фокусов эллипса, то лучи света, выходящие из этого источника, отразившись от зеркала, соберутся в другом фокусе* (рис. 26).

Оба фокуса эллипса находятся по одну сторону от каждой его касательной, так как касательная в точке M делит пополам внешний угол треугольника $FM\tilde{F}$ при вершине M. Пусть точка N лежит по другую сторону от касательной t в точке M, чем фокусы эллипса, а точка P принадлежит касательной; через $\tilde{F}_1$ обозначим точку, симметричную фокусу $\tilde{F}$ относительно касательной t (рис. 27). Точка $\tilde{F}_1$ лежит на продолжении отрезка FM и $F\tilde{F}_1=2a$; поэтому

$FP+\tilde{F}P=FP+P\tilde{F}_1\geqslant 2a$, причем знак равенства имеет место только тогда, когда $P\equiv M$. Если отрезок $N\tilde{F}$ пересекает t в точке P_1, то по доказанному $FP_1+\tilde{F}P_1\geqslant 2a$; с другой стороны, $FN+NP_1>FP_1$. Сложив два последних неравенства почленно,

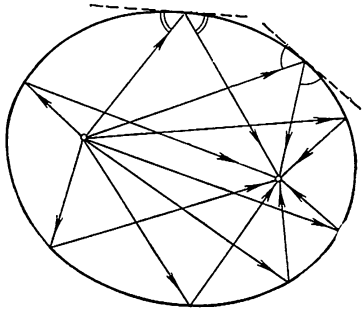


Рис. 26.

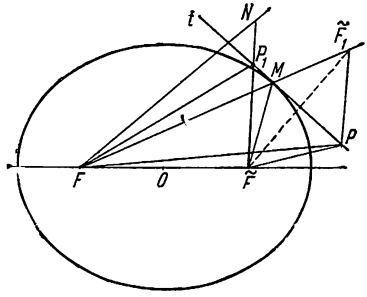


Рис. 27.

получим: $FN+\tilde{F}N>2a$, откуда следует, что точка N не может принадлежать эллипсу. Таким образом,

все точки эллипса расположены по одну сторону от каждой его касательной, т. е. эллипс есть выпуклая кривая (ср. ниже, стр. 580).

Хорду MN эллипса, проходящую через его фокус F, мы будем называть *фокальной хордой*. Построим касательные к эллипсу в концах M и N фокальной хорды, и пусть они пересекают директрису в точках M_0 и N_0 (рис. 28). Согласно доказанному, прямые M_0F и N_0F перпендикулярны к MN, в силу чего точки M_0 и N_0 совпадают. Следовательно,

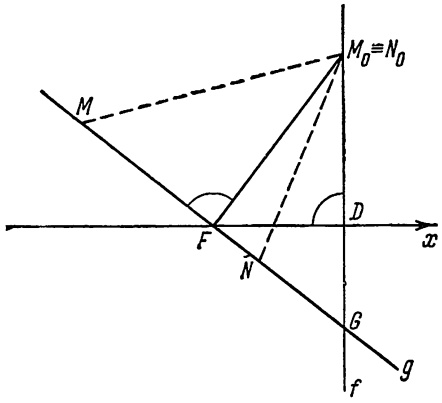


Рис. 28.

касательные к эллипсу, проведенные в концах фокальной хорды, пересекаются на директрисе (или параллельны ей).

2.4. Некоторые окружности, связанные с эллипсом. Теоремы Понселе. Отразив один из фокусов эллипса относительно всевозможных его касательных, получим точки, расположенные от другого фокуса на постоянном расстоянии, равном $2a$, т. е. на окружности радиуса $2a$ (рис. 29). Эта окружность называется *направляющей окружностью* эллипса. Очевидно, у эллипса имеются две направляющие окружности.

Опустим, далее, из фокуса F на касательную t к эллипсу перпендикуляр FS и соединим точку S с центром O эллипса (рис. 30). Если F' — точка, симметричная точке F относительно касательной t, то SO есть средняя линия в треугольнике $F\tilde{F}F'$. Следовательно, отрезок OS равен половине стороны $\tilde{F}F'$, т. е. $OS = a$. Поэтому точка S принадлежит окружности радиуса a с центром в точке O; эта окружность называется *описанной около эллипса.*

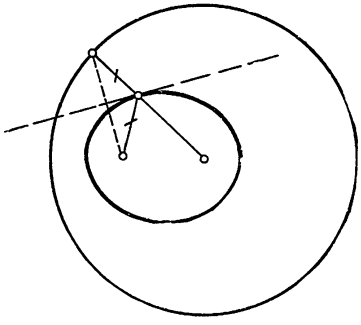


Рис. 29.

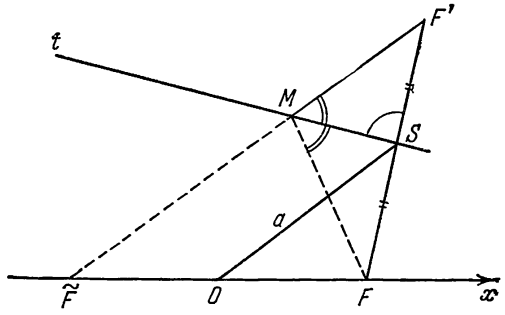


Рис. 30.

Множество оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса эллипса на его касательные, представляет собой окружность с центром в центре эллипса и радиусом, равным большой полуоси эллипса.

Пусть к эллипсу проведена в точке M касательная t. Опустим из фокусов на касательную перпендикуляры $FH = h$, $\tilde{F}\tilde{H} = \tilde{h}$ (рис. 31). Расстояние $OP = d$ от центра эллипса до касательной равно $\frac{1}{2}(h + \tilde{h})$.

Так как точки H и $\tilde{H}$ лежат на описанной около эллипса окружности, то $OH = O\tilde{H} = a$. Из прямоугольного треугольника OPH следует, что $a^2 = d^2 + \frac{1}{4} H\tilde{H}^2$. Но $H\tilde{H}^2 = 4c^2 - (h - \tilde{h})^2$; поэтому $a^2 = \frac{1}{4}(h + \tilde{h})^2 + c^2 - \frac{1}{4}(h - \tilde{h})^2$. Отсюда вытекает, что $\tilde{h}h = b^2$, т. е.

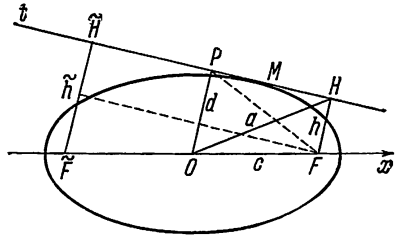


Рис. 31.

произведение расстояний от фокуса эллипса до каждой ее касательной есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси эллипса.

Если прямая g не является касательной к эллипсу и оба фокуса находятся от нее по одну сторону, то произведение расстояний

фокусов до прямой g будет отлично от b^2, а именно, для прямых, пересекающих эллипс, это произведение меньше b^2, а для прямых, не пересекающих эллипса, — больше, чем b^2. Значит, *если фиксировать две точки F и $\tilde{F}$ и рассмотреть множество таких прямых, что обе точки находятся по одну сторону от прямой и произведение расстояний обеих точек до прямой постоянно, то это множество прямых совпадает с множеством касательных к некоторому эллипсу.*

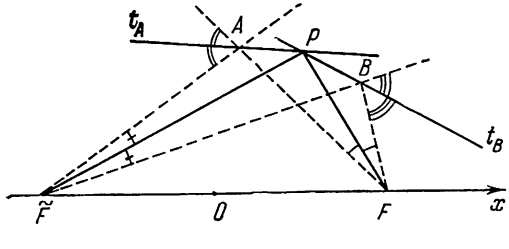


Рис. 32.

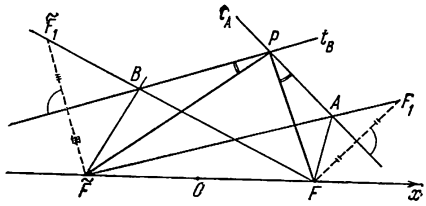


Рис. 33.

Докажем теперь две интересные теоремы, принадлежащие французскому математику XIX века Понселе.

а) Проведем два фокальных радиуса FA и FB и построим биссектрису угла AFB (рис. 32). Мы докажем, что эта биссектриса проходит через точку пересечения P касательных, проведенных к эллипсу в точках A и B. Соединим точки A и B со вторым фокусом $\tilde{F}$ и рассмотрим (самопересекающийся) четырехугольник $FA\tilde{F}B$, в котором сумма одной пары смежных сторон равна сумме другой пары сторон: $FA+\tilde{F}A=FB+\tilde{F}B$ $(=2a)$. Для такого четырехугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон или их продолжений [1]). Центр этой окружности лежит на пересечении биссектрис внешних углов при тех вершинах, в которых сходятся пары сторон с одинаковыми суммами, и биссектрис внутренних углов при двух других вершинах. Но касательные к эллипсу в точках A и B как раз и являются биссектрисами внешних углов четырехугольника и поэтому они пересекаются в центре P окружности. Таким образом, прямые FP и $\tilde{F}P$ являются биссектрисами соответствующих углов между фокальными радиусами точек A и B. Итак,

биссектриса угла между двумя фокальными радиусами двух точек эллипса, соответствующими одному фокусу, проходит через точку пересечения касательных к эллипсу в этих точках.

---

[1]) См., например, Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1957, решение задачи 87.

б) Докажем, что $\angle APF = \angle BP\tilde{F}$. Для этого отразим фокус F относительно касательной PA, а фокус $\tilde{F}$ относительно касательной PB; полученные точки F_1 и $\tilde{F}_1$ соединим соответственно с $\tilde{F}$ и F (рис. 33). Треугольники $F_1\tilde{F}P$ и $F\tilde{F}_1P$ равны (по трем сторонам), и поэтому $\angle F_1P\tilde{F} = \angle FP\tilde{F}_1$. Вычитая из этих углов общий угол $FP\tilde{F}$ и деля разность пополам, получим искомое равенство. Таким образом,

два фокальных радиуса, соответствующих двум различным точкам эллипса и различным его фокусам, видны из точки пересечения касательных в этих точках под равными углами.

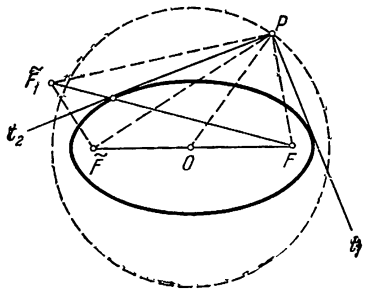


Рис. 34.

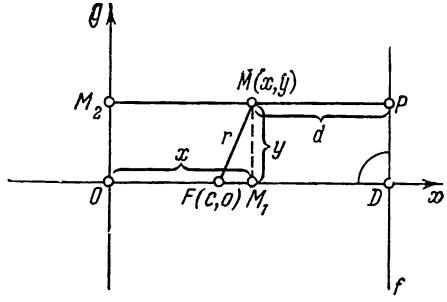


Рис. 35.

Пусть, наконец, из точки P проведены к эллипсу две взаимно перпендикулярные касательные t_1 и t_2 (рис. 34). Отразим фокус $\tilde{F}$ относительно прямой t_2 и полученную точку $\tilde{F}_1$ соединим с F. Очевидно, что $F\tilde{F}_1 = 2a$ и угол $FP\tilde{F}_1$ — прямой (последнее следует из того, что угол между t_1 и t_2 прямой, и второй теоремы Понселе); следовательно, $PF^2 + P\tilde{F}_1^2 = 4a^2$. Но $P\tilde{F}_1 = P\tilde{F}$; поэтому $PF^2 + P\tilde{F}^2 = 4a^2$. С другой стороны, PO — медиана треугольника $PF\tilde{F}$, так что $PO^2 = \frac{1}{2}(PF^2 + P\tilde{F}^2) - c^2$. Учитывая предыдущее равенство получаем: $PO^2 = 2a^2 - c^2$ или $PO^2 = (a^2 - c^2) + a^2 = a^2 + b^2$, т. е.

Вершины прямых углов, стороны которых касаются эллипса, расположены на окружности радиуса $\sqrt{a^2+b^2}$ с центром в центре эллипса.

2.5. Эллипс как результат сжатия окружности. Пусть точка M, принадлежащая эллипсу, удалена от главной оси x на расстояние $MM_1 = y$, а от главной оси y — на расстояние $MM_2 = x$ (рис. 35). Симметрия эллипса позволяет ограничиться рассмотрением точек эллипса, расположенных внутри одного из прямых углов, образованных главными осями x и y. Из соотношений (2) (стр. 572) следует:

$$r^2 = FM^2 = (x-c)^2 + y^2, \qquad d^2 = MP^2 = \left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right)^2, \qquad r^2 = \varepsilon^2 d^2.$$

После исключения r и d, получим:

$$(x-c)^2+y^2=\varepsilon^2\left(\frac{a}{\varepsilon}-x\right)^2,$$

откуда, умножая обе части равенства на a и учитывая соотношения (2), найдем окончательно:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Если главные оси эллипса принять за оси координат прямоугольной декартовой системы координат, то координаты всякой точки эллипса будут удовлетворять уравнению (3), и наоборот, всякое решение уравнения (3) представляет собой координаты точки, принадлежащей эллипсу. Уравнение (3) называется *уравнением эллипса, отнесенного к его главным осям, как к ссям координат.*

Рассмотрим теперь некоторую прямую x, которую будем называть *осью сжатия*, и зададим число $k>0$ — *коэффициент сжатия.* Каждой точке M плоскости сопоставим точку M_1 прямой $MP\perp x$, расстояние h_1 которой от оси x связано с расстоянием h точки M от той же оси равенством $h_1=kh$. Переход от точки M к точке M_1 называется *сжатием к прямой* x с коэффициентом сжатия k (см. кн. IV ЭЭМ, стр. 55). При $k<1$ преобразование является собственным сжатием, при $k>1$ — растяжением.

Подвергнем окружность $x^2+y^2=a^2$ сжатию к прямой x с коэффициентом $k=\frac{b}{a}<1$. Точке $M(x, y)$ окружности будет соответствовать точка $M_1(X, Y)$, для которой $x=X$, $y=\frac{a}{b}Y$ (рис. 36). Координаты (x, y) точки M удовлетворяют уравнению окружности, т. е.

$$X^2+\frac{a^2}{b^2}Y^2=a^2$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

Таким образом, координаты (X, Y) точки M_1 удовлетворяют уравнению эллипса, и множество точек M_1 представляет собой эллипс. Иными словами,

кривая, получаемая из окружности сжатием к одному из ее диаметров, есть эллипс, для которого данная окружность является описанной.

Установленное свойство эллипса позволяет легко строить эллипс по точкам, если известна окружность, из которой он полу-

чается сжатием. Из точки M окружности радиуса a опускаем на диаметр перпендикуляр и находим на нем такую точку M_1, что $h_1:h=b:a$. Тогда точка M_1 принадлежит эллипсу с полуосями a и b.

При сжатии к прямой три точки, принадлежащие одной прямой, переходят в три точки, также принадлежащие одной прямой; другими словами, прямая переходит при этом преобразовании снова в прямую (см. стр. 61 кн. IV ЭЭМ). Из этого свойства и свойства взаимной однозначности преобразования сжатия к прямой вытекает, что касательная к окружности при сжатии переходит в касательную к эллипсу в соответствующей точке. Если из некоторой точки N_1 мы хотим провести к эллипсу касательную, поступим следующим образом: построим точку N, получаемую из N_1 преобразованием сжатия с осью x (большая ось эллипса) и коэффициентом $k_1=\frac{1}{k}=\frac{a}{b}$, затем из точки N проведем к описанной окружности эллипса касательную t и, наконец, подвергнем ее сжатию с коэффициентом k (рис. 36). Полученная прямая t_1 является касательной к эллипсу. Поэтому из точки N_1 можно к эллипсу провести не более д в у х касательных (так как не более двух касательных можно провести из точки N к описанной окружности). Внешние точки по отношению к окружности переходят при сжатии во внешние точки эллипса и наоборот; следовательно,

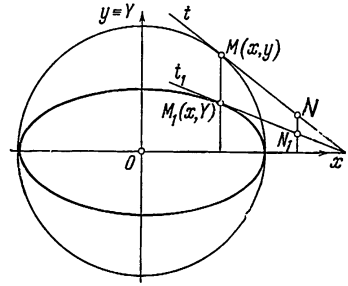


Рис. 36.

из внешней точки эллипса можно провести к эллипсу две касательные.

При сжатии к прямой точке пересечения двух прямых соответствует точка пересечения преобразованных прямых; поэтому параллельные прямые преобразуются в параллельные. Кроме того, отношение двух параллельных отрезков равно отношению преобразованных отрезков; в частности, отрезок и его середина переходят при сжатии к прямой в отрезок и его середину (ср. стр. 62 и 77 кн. IV ЭЭМ). Но середины параллельных хорд окружности расположены на одной прямой — на диаметре окружности; поэтому

середины параллельных хорд эллипса также принадлежат одной прямой — диаметру эллипса (рис. 37.) Очевидно, что *диаметр эллипса проходит через его центр и касательные в концах отрезка диаметра параллельны хордам, которые делятся этим диаметром пополам.*

Если провести хорды окружности, параллельные ее диаметру, то середины этих хорд принадлежат перпендикулярному диаметру. Середины хорд, параллельных второму диаметру, принадлежат

первому диаметру. *При сжатии два перпендикулярных диаметра окружности отображаются в два диаметра эллипса, которые называются сопряженными.* Два направления, параллельных направлениям сопряженных диаметров, называются *сопряженными.*

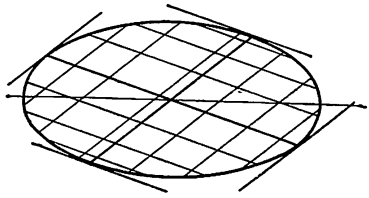


Рис. 37.

Если хорды, параллельные одному диаметру эллипса делятся другим диаметром пополам, то и хорды, параллельные другому диаметру эллипса, делятся первым диаметром пополам.

Такие два диаметра являются сопряженными диаметрами эллипса. Каждому диаметру отвечает вполне определенный сопряженный ему диаметр. *Главные диаметры (оси) эллипса одновременно являются перпендикулярными и сопряженными диаметрами.*

Проведем теперь в окружности два перпендикулярных радиуса OA и OB. В результате сжатия они переходят в два сопряженных полудиаметра $OA_1=a_1$ и $OB_1=b_1$ эллипса (рис. 38). Очевидно, что

$$a_1^2+b_1^2=OA_0^2+OB_0^2+k^2(A_0A^2+B_0B^2),$$

где A_0 и B_0—проекции точек A и B на ось сжатия, а $k=\frac{b}{a}$—коэффициент сжатия. Но из равенства треугольников OAA_0 и OBB_0 следует, что $OA_0=BB_0$, $OB_0=AA_0$. Поэтому

$$a_1^2+b_1^2=OA_0^2+AA_0^2+k^2(A_0A^2+OA_0^2)=$$
$$=(k^2+1)\,a^2,$$

откуда после подстановки значения k находим:

$$a_1^2+b_1^2=a^2+b^2.$$

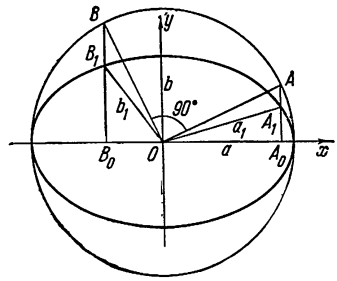


Рис. 38.

Таким образом, мы приходим к так называемой первой теореме Аполлония:

сумма квадратов сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная, равная сумме квадратов его полуосей.

Далее, так как при сжатии к прямой площади всех фигур умножаются на коэффициент сжатия [1]), то всякий описанный около эллипса параллелограмм, стороны которого имеют сопряженные на-

[1]) Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть, во что переходит при сжатии сетка мелких квадратов, одна сторона которых параллельна оси сжатия.

правления, является образом квадрата со стороной $2a$, описанного около окружности (рис. 39). Поэтому площадь такого параллелограмма равна $4a^2\frac{b}{a}=4ab$, что выражает вторую теорему Аполлония:

площадь описанного около эллипса параллелограмма, стороны которого имеют сопряженные направления, постоянна и равна $4ab$.

Из аналогичных соображений легко получить, что *площадь эллипса равна* πab.

Пусть $OA=m$, $OB=n$ — два перпендикулярных полудиаметра эллипса (рис. 40). Опустим из точек A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на большую ось эллипса. Очевидно, что $\triangle OAA_1 \backsim \triangle OBB_1$. Следовательно, если $OB_1=s$, то $AA_1=\frac{m}{n}s$. Подвергнем теперь

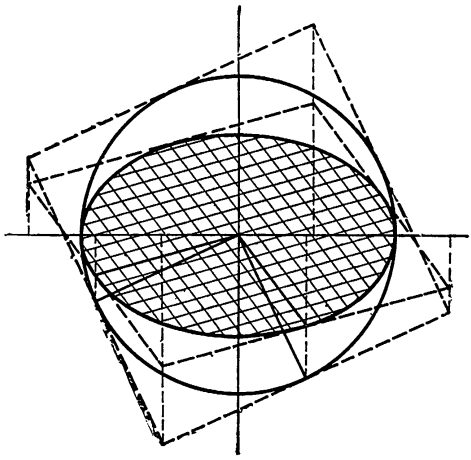


Рис. 39.

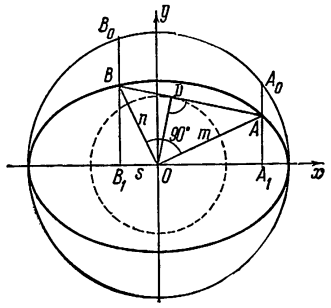


Рис. 40.

эллипс сжатию к его большой оси с коэффициентом $\frac{1}{k}=\frac{a}{b}>1$ (в действительности это «сжатие» будет растяжением, поскольку $\frac{1}{k}>1$). Точки A_0 и B_0, полученные из точек A и B сжатием, будут лежать на описанной около эллипса окружности радиуса a. Отсюда вытекает, что

$$(n^2-s^2)\frac{a^2}{b^2}+s^2=a^2, \qquad \frac{m^2}{n^2}s^2\frac{a^2}{b^2}+m^2-\frac{m^2}{n^2}s^2=a^2.$$

Если первое равенство почленно умножить на $m^2:n^2$ и прибавить ко второму, то получим:

$$\frac{a^2}{b^2}m^2+m^2=a^2\left(\frac{m^2}{n^2}+1\right).$$

Отсюда находим, что

$$a^2b^2(m^2+n^2)=m^2n^2(a^2+b^2)$$

и окончательно

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Итак, *сумма квадратов обратных величин перпендикулярных полудиаметров эллипса есть величина постоянная.*

Если (при сохранении прежних обозначений) на хорду AB из центра эллипса опустить перпендикуляр OD, то

$$\frac{1}{OD^2}=\frac{OA^2+OB^2}{OA^2\cdot OB^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2},$$

т. е.

$$\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}.$$

Поэтому *хорды эллипса, которые видны из его центра под прямым углом, касаются одной окружности с центром в центре эллипса и радиусом*

$$R=\sqrt{1\Big/\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)}=\sqrt{1\Big/\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пусть отрезок AB постоянной длины a скользит своими концами по сторонам прямого угла xOy. Рассмотрим линию, которую опишет при этом некоторая точка M отрезка AB. Проведем через точку O прямую, параллельную AB, и пусть эта прямая пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки M на OA, в точке M_1 (рис. 41). Очевидно, что $OM_1=BM$, т. е. при движении точки M точка M_1 опишет дугу окружности радиуса BM с центром в точке O. Точку пересечения прямых OA и MM_1 обозначим через M_0. Из подобия треугольников OM_1M_0 и M_0MA следует, что $OM_1 : MA = M_0M_1 : M_0M$, или $BM : MA = M_0M_1' : M_0M$, где через M_1' обозначена точка, симметричная с M_1 относительно OA. Но точка M_1' описывает дугу окружности; следовательно, точка M опишет дугу эллипса. (Заметим, что точка M опишет дугу эллипса и в том случае, когда она расположена на продолжении отрезка AB.) Таким образом,

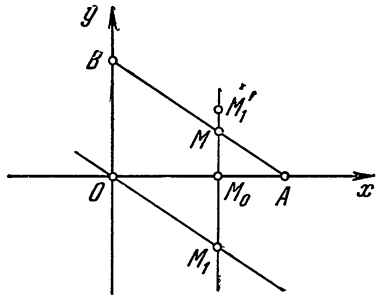


Рис. 41.

если отрезок AB постоянной длины скользит по сторонам прямого угла, то каждая точка M этого отрезка (или его продолжения) описывает дугу эллипса, полуоси которого равны MA и MB. В частности, *середина отрезка AB описывает окружность радиуса* $\frac{1}{2}AB$.

На этом свойстве эллипса основано устройство прибора для вычерчивания эллипса — эллиптического циркуля (рис. 42).

Рассмотрим теперь снова окружность, из которой эллипс получается сжатием к прямой. Проведем в этой окружности две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M (рис. 43, *а*). В силу известной теоремы

$$(MA \cdot MB) : (MC \cdot MD) = 1.$$

Сжатие к прямой даст нам эллипс и две его хорды A_1B_1 и C_1D_1, пересекающиеся в точке M_1 (рис. 43, *б*), причем

$$M_1A_1 = l_1 \cdot MA,\ M_1B_1 = l_1 \cdot MB,\ M_1C_1 = l_2 \cdot MC,\ M_1D_1 = l_2 \cdot MD,$$

где l_1 и l_2 — коэффициенты пропорциональности, определяемые направлением отрезков и коэффициентом сжатия k. Следовательно,

$$(M_1A_1 \cdot M_1B_1) : (M_1C_1 \cdot M_1D_1) = l_1^2 : l_2^2.$$

Если мы сохраним направления хорд AB и CD, но изменим положение точки M, то сохранятся направления хорд A_1B_1 и C_1D_1

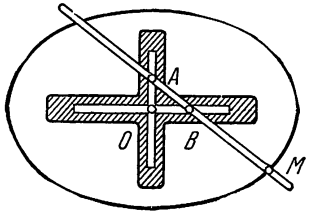
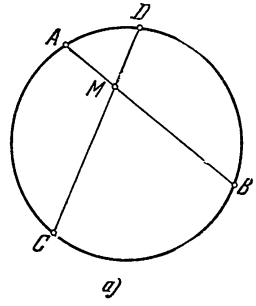


Рис. 42.



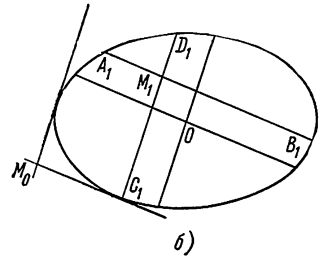


Рис. 43.

и изменится положение точки M_1. Однако при этом коэффициенты l_1 и l_2 остаются неизменными. Значит, отношение произведений отрезков двух хорд не зависит от точки их пересечения, а зависит лишь от их направлений:

если две хорды A_1B_1 и C_1D_1 эллипса (или продолжения этих хорд) пересекаются в точке M_1, то отношение

$$(M_1A_1 \cdot M_1B_1) : (M_1C_1 \cdot M_1D_1)$$

зависит лишь от направлений хорд, но не от выбора точки M_1.

Отсюда, в частности, следует, что отношение отрезков двух касательных к эллипсу, проведенных из точки M_0 и заключенных между точкой M_0 и точками касания, равно отношению диаметров эллипса, параллельных данным касательным.

Доказанную теорему, установленную еще знаменитым И. Ньютоном, можно использовать для вывода некоторых свойств четырех точек A, B, C, D эллипса, принадлежащих одной окружности (рис. 44). Если хорды AB и CD

пересекаются в точке M, то, по известному свойству окружности, $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Поэтому диаметры эллипса, параллельные хордам AB и CD, должны быть равны между собой. Но из соображений симметрии следует, что равные диаметры одинаково наклонены к оси эллипса; поэтому хорды AB и CD одинаково наклонены к оси эллипса, т. е. эти хорды или их продолжения образуют с осью эллипса равные внутренние односторонние углы. Нетрудно видеть, что справедливо и обратное утверждение. Таким образом,

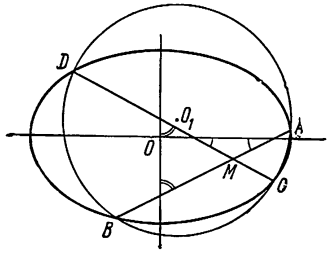


Рис. 44.

для того чтобы четыре точки A, B, C, D эллипса принадлежали одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы хорды AB и CD составляли с одной из осей эллипса равные внутренние односторонние углы.

Пусть теперь окружность S касается эллипса E в точке A и пересекает его в двух других точках C и D. Оставим точку A на месте и будем приближать к ней точку C. Окружность будет при этом принимать различные положения и, наконец, займет предельное положение, когда точка C совпадет с A, а точка D займет предельное положение D_0. Такая окружность называется *соприкасающейся окружностью* эллипса в точке A; она имеет с эллипсом касание в одной точке A и дополнительно пересекает эллипс только в одной точке D_0 (рис. 45).

Из четырех общих точек соприкасающейся окружности и эллипса три точки совпадают с точкой A ($A \equiv B \equiv C$). Согласно предыдущей теореме, прямые AB и CD_0 должны образовать равные внутренние односторонние углы с осью эллипса; но в данном случае прямая AB есть касательная t к эллипсу в точке A; поэтому угол наклона прямой $CD_0 \equiv AD_0$ к оси эллипса равен углу наклона касательной t. Это позволяет легко построить точку D_0, а затем соприкасающуюся окружность: соприкасающаяся окружность эллипса в точке A проходит через точку D_0 и касается прямой t в точке A.

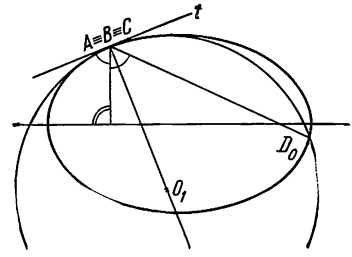


Рис. 45.

Указанное построение неприменимо, если точка A совпадает с одной из вершин эллипса, так как в этом случае точка D_0 также совпадает с A. Для того чтобы построить соприкасающуюся окружность к эллипсу, скажем, в вершине B малой оси, потребуется рассмотреть некоторые свойства нормали к эллипсу.

Нормалью к эллипсу в данной точке M называется прямая, перпендикулярная к касательной к эллипсу в этой точке.

Пусть нормаль к эллипсу в точке M пересекает ось x в точке N (рис. 46). Докажем, что отношение $ON:NM_1$, где M_1 — проекция точки M на ось x, есть величина постоянная. Из треугольника $\tilde{F}MF$ с высотой MM_1 и биссектрисой MN находим:

$$M_1F = \pm\frac{1}{4c}(r^2+4c^2-\tilde{r}^2) = \pm\frac{1}{4c}\left[4c^2-(\tilde{r}+r)(\tilde{r}-r)\right] = \frac{1}{4c}\left[4c^2-2a(2a-2r)\right] =$$

$$= \pm\frac{1}{c}(ar-a^2+c^2) = \pm\frac{1}{c}(ar-b^2),$$

$$NF = \frac{2cr}{r+\tilde{r}} = \frac{rc}{a}, \qquad OF = c,$$

Следовательно,

$$ON:NM_1=(c-NF):(NF\mp M_1F)=\left(c-\frac{rc}{a}\right):\left(\frac{rc}{a}-\frac{ar-b^2}{c}\right)=c^2:b^2.$$

Таким образом, *нормаль к эллипсу в данной точке делит отрезок, заключенный между центром и проекцией этой точки на большую ось эллипса, в постоянном отношении, равном* $c^2:b^2$.

Пусть точке M отвечает (при растяжении эллипса) точка M' описанной окружности и пусть нормаль NM в точке M пересекает продолжение радиуса OM' в точке Q. Докажем, что $OQ=a+b$. Применим теорему Менелая[1]) к треугольнику $OM'M_1$ и секущей QN:

$$\frac{OQ}{QM'}\cdot\frac{M'M}{MM_1}\cdot\frac{M_1N}{NO}=-1,$$

где

$$\frac{M'M}{MM_1}=\frac{M'M_1-MM_1}{MM_1}=$$

$$=\frac{M'M_1}{MM_1}-1=\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}.$$

Следовательно,

$$\frac{OQ}{OQ-a}=-\frac{OQ}{QM'}=$$

$$=\frac{b}{a-b}\frac{c^2}{b^2}=\frac{a^2-b^2}{b(a-b)}=\frac{a+b}{b}.$$

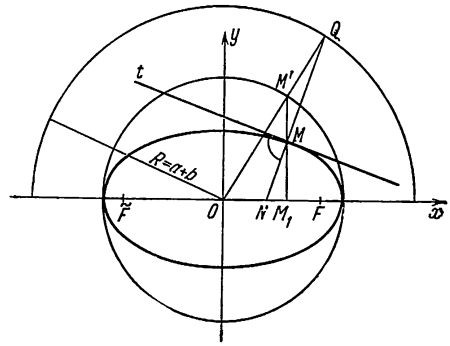


Рис. 46.

После упрощений получаем $OQ=a+b$.

Итак, *если при сжатии точке M' описанной около эллипса окружности соответствует точка M эллипса, то нормали в этих точках к соответствующим кривым пересекаются в точке, расположенной на окружности радиуса $a+b$ с центром в центре эллипса.*

Пусть теперь нормаль к эллипсу в точке M пересекает малую ось эллипса в точке S. Найдем предельное положение S_0 точки S, когда точка M приближается вдоль эллипса к вершине B малой оси. Продолжим нормаль до пересечения в точке Q с окружностью радиуса $a+b$ с центром в точке O, и пусть прямая OQ пересекает описанную около эллипса окружность в точке M'. Тогда имеет место пропорция $QM:MS=QM':M'O=b:a$. Когда точка M приближается к точке B, то $QM\longrightarrow a$ и $BS_0=a^2:b$. Это и есть радиус соприкасающейся окружности к эллипсу в вершине малой оси. Аналогично находим, что $b^2:a$ есть радиус соприкасающейся окружности в вершине большой оси эллипса.

§ 3. Гипербола

3.1. Форма гиперболы. Пусть F—фокус, а f—директриса гиперболы. Расстояние FD от фокуса F до директрисы f обозначим через p, а прямую, проведенную через F перпендикулярно к f,—через x (рис. 47). Согласно определению для любой точки M гиперболы имеем:

$$r:d=\varepsilon>1,$$

---

[1]) См., например, кн. IV ЭЭМ, стр. 347.

где $r = MF$ — расстояние от точки M до фокуса, $d = MP$ — расстояние от M до директрисы.

Из определения гиперболы следует также, что прямая x является для нее осью симметрии. На этой оси лежат две точки A_1 и A_2 гиперболы, делящие отрезок FD внутренним и внешним образом в отношении ε. Эти две точки мы будем называть *вершинами* гиперболы; одна из них находится между фокусом и директрисой, вторая — по другую сторону директрисы (ибо $\varepsilon > 1$). Отрезок A_1A_2 и его длину $2a$ называют *вещественной осью* гиперболы. Обозначим середину отрезка A_1A_2 через O и расстояние OD обозначим через d_0. Из соотношений

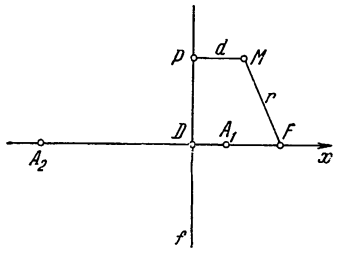


Рис 47.

$$\frac{p - DA_1}{DA_1} = \varepsilon, \qquad \frac{p + DA_2}{DA_2} = \varepsilon$$

находим:

$$DA_1 = \frac{p}{\varepsilon + 1}, \qquad DA_2 = \frac{p}{\varepsilon - 1},$$

и потому

$$d_0 = \frac{1}{2}(DA_2 - DA_1) = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon - 1} - \frac{1}{\varepsilon + 1}\right) = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}. \qquad (1)$$

Докажем, что точка O является центром симметрии гиперболы. Пусть точка M_1 принадлежит гиперболе. Это значит, что

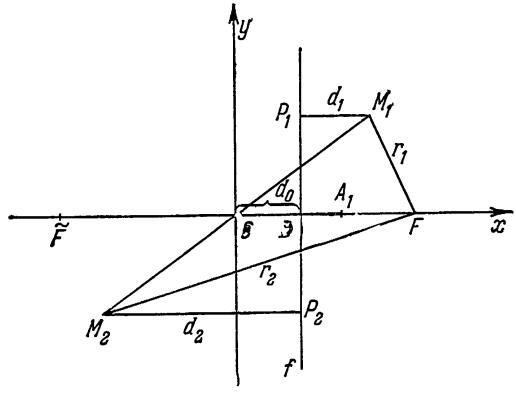


Рис. 48.

отрезки $r_1 = FM_1$ и $d_1 = P_1M_1$ удовлетворяют соотношению $r_1 = \varepsilon d_1$. Для точки M_2, симметричной M_1 относительно O, имеем $r_2 = FM_2$ и $d_2 = M_2P_2$ (рис. 48). Нам надо установить, что $r_2 = \varepsilon d_2$.

Отрезок $OD = d_0$ равен $\frac{1}{2}(d_2 - d_1)$ (где $d_2 > d_1$), как отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции $M_1P_1M_2P_2$. Поэтому

расстояния точек M_1 и M_2 от оси x равны

$$r_1^2-(d_1-p)^2=r_2^2-(d_2+p)^2.$$

Отсюда следует, что

$$r_1^2-r_2^2=d_1^2-d_2^2-2p\,(d_1+d_2),$$

т. е.

$$r_1^2-r_2^2=d_1^2-d_2^2-\,(d_2^2-d_1^2)(\varepsilon^2-1).$$

Окончательно получаем:

$$r_1^2-r_2^2=\varepsilon^2(d_1^2-d_2^2).$$

Но, по условию, $r_1^2=\varepsilon^2 d_1^2$. Следовательно, $r_2^2=\varepsilon^2 d_2^2$, что и доказывает теорему.

Гипербола имеет центр симметрии, расстояние d_0 которого от директрисы гиперболы определяется по формуле (1).

Из того, что у гиперболы есть центр симметрии O (короче, центр) и ось симметрии x, проходящая через точку O, следует, что прямая y, проходящая через точку O перпендикулярно к оси x, также является осью симметрии гиперболы. Эта ось называется ее *мнимой осью.* Итак,

гипербола имеет две перпендикулярные оси симметрии, пересекающиеся в центре симметрии гиперболы.

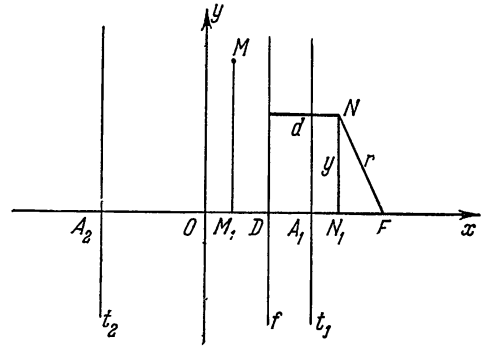


Рис. 49.

Свойства симметрии гиперболы позволяют ограничиться изучением поведения этой кривой только внутри одного из прямых углов, определяемых осями симметрии гиперболы. Кроме того, из свойств симметрии следует, что у гиперболы есть второй фокус $\tilde{F}$ и вторая директриса $\tilde{f}$.

Проведем через точку A_1 прямую t_1, параллельную оси y (рис. 49). На прямой t_1 имеется лишь одна точка гиперболы — точка A_1, так как для всякой другой точки этой прямой значение d остается тем же самым, что и у точки A_1, а значение r — отличным от FA_1.

Далее, между параллельными прямыми t_1 и y точек гиперболы нет. В самом деле, если точка M лежит внутри полосы, образованной прямыми t_1 и y, а M_1 — проекция этой точки на ось x, то имеем $M_1F:M_1D>\varepsilon$, ибо при движении M_1 от O к A отношение $M_1F:M_1D$ возрастает от ε^2 до ∞ и затем убывает от ∞ до ε.

Значит, и $M_1F:M_1D > \varepsilon$. Следовательно, мнимая ось y гиперболу не пересекает.

Между прямыми t_1 и t_2, проведенными через вершины A_1 и A_2 гиперболы перпендикулярно к ее оси x, нет точек гиперболы.

Рассмотрим точку N гиперболы, расположенную над осью x и правее прямой t_1 (рис. 49). Расстояние y этой точки гиперболы от оси x определяется по теореме Пифагора:

$$y = \sqrt{r^2 - (d-p)^2}.$$

Положив $r = \varepsilon d$, получим:

$$y = \sqrt{d^2(\varepsilon^2 - 1) + 2dp - p^2}. \quad (2)$$

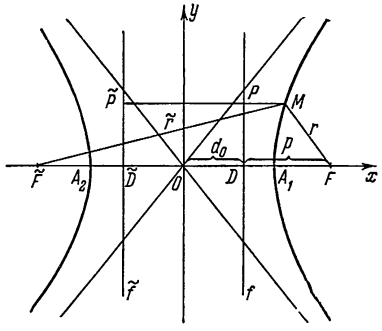


Рис. 50.

Соотношение (2) показывает, что при монотонном и неограниченном возрастании расстояния d величина y также возрастает монотонно и неограниченно. Следовательно, точки гиперболы простираются в бесконечность.

При монотонном неограниченном возрастании расстояния точки гиперболы от оси x расстояние этой точки до оси y также растет монотонно и неограниченно.

3.2. Свойства фокусов гиперболы. Отрезок, соединяющий точку P гиперболы с ее фокусом, будем называть *фокальным радиусом*. Одна и та же точка гиперболы имеет два фокальных радиуса r и $\tilde{r}$ (рис. 50). Очевидно, что, зная r и ε, легко определить и d и, следовательно, одну из четырех точек гиперболы. Тем самым определяется и значение $\tilde{r}$ для этих точек. Это указывает на то, что между r и $\tilde{r}$ существует некоторая зависимость, которую мы здесь и установим. Согласно определению,

$$r = \varepsilon d, \quad \tilde{r} = \varepsilon \tilde{d}, \quad \tilde{d} - d = 2d_0, \quad \tilde{d} + d = 2e,$$

где e — расстояние точки гиперболы от оси y. Отсюда находим, что

$$d = e - d_0, \quad \tilde{d} = e + d_0$$

и

$$\tilde{r} - r = 2\varepsilon d_0 = \frac{2p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}.$$

С другой стороны,

$$a = OA_1 = OD + DA_1 = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{p}{\varepsilon + 1} = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\tilde{r} - r = 2a. \tag{4}$$

Если точка M_1 симметрична точке M относительно оси y, то для ее фокальных радиусов

$$r - \tilde{r} = 2a.$$

Абсолютное значение разности фокальных радиусов любой точки гиперболы есть величина постоянная, равная действительной оси гиперболы.

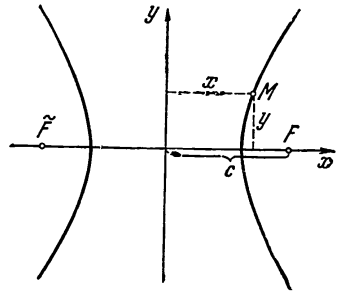


Рис. 51.

3.3 Уравнение гиперболы. Найдем зависимость между расстояниями x и y от точки M гиперболы до ее осей (рис. 51).

Определим сперва расстояние c от центра гиперболы до ее фокуса. Из зависимости $a^2 = d_0 c$ находим $a : c = d_0 : a$ или, учитывая (1) и (3), $a : c = 1 : \varepsilon$. Таким образом,

$$c = a\varepsilon. \tag{5}$$

Отсюда

$$r^2 = (x - c)^2 + y^2,$$
$$r^2 = \varepsilon^2 \left(x - \frac{a}{\varepsilon} \right)^2$$

и, приравнивая правые части, получаем:

$$(x - c)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x - \frac{a}{\varepsilon} \right)^2,$$
$$x^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) - y^2 = c^2 - a^2,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Но $c > a$, следовательно, существует отрезок b, для которого $c^2 - a^2 = b^2$. Окончательно мы имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Если оси симметрии принять за оси координат прямоугольной декартовой системы, то уравнение (6) представляет собой уравнение гиперболы. Величина b называется *мнимой полуосью* гиперболы.

Расстояния x и y каждой точки гиперболы от ее осей симметрии связаны соотношением (6).

Рассмотрим теперь точки гиперболы, расположенные в первом координатном углу ($x \geqslant a$, $y \geqslant 0$). Из (6) следует, что для этих

точек

$$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}<\frac{bx}{a}. \tag{7}$$

Неравенство (7) показывает, что точки гиперболы лежат ниже луча $y=\frac{bx}{a}$ $(x\geqslant 0)$.

В силу симметрии можно сказать, что точки гиперболы расположены внутри тех вертикальных углов, образованных прямыми $y=\pm\frac{b}{a}x$, внутри которых проходит действительная ось гиперболы. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы.

Точки гиперболы расположены внутри тех вертикальных углов, образованных асимптотами, внутри которых проходит действительная ось гиперболы.

Составим разность δ расстояний точки гиперболы и точки ее асимптоты до оси x, если обе точки лежат на одном перпендикуляре к оси x; при этом мы ограничимся первым координатным углом (рис. 52). Из уравнения (7) следует:

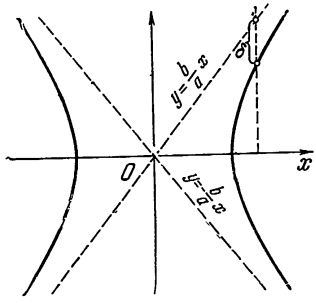


Рис. 52.

$$\delta=\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}-x)=$$

$$=\frac{b}{a}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=-\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}<0.$$

Очевидно, что при $x\longrightarrow\infty$ величина $\delta\longrightarrow 0$. Это значит, что с возрастанием x точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптоте, так как расстояние от точки гиперболы до асимптоты не превосходит $|\delta|$ (как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $|\delta|$).

При удалении точки гиперболы вдоль одной ветви ее расстояние до соответствующей асимптоты неограниченно убывает.

Гипербола, асимптоты которой перпендикулярны, называется *равнобочной*. В этом случае асимптотами являются биссектрисы $y=\pm x$ координатных углов и уравнение гиперболы имеет вид

$$x^2-y^2=a^2. \tag{8}$$

При помощи сжатия к действительной оси с коэффициентом $k=\frac{a}{b}$ из равнобочной гиперболы (8) можно получить «общую» гиперболу (6). Для равнобочной гиперболы $a=b$, $c=a\sqrt{2}$, $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Подобно тому как окружность есть частный случай эллипса, отвечающий равенству $a=b$, так и равнобочная гипербола есть гипербола, для которой $a=b$. Эту аналогию можно проиллюстрировать на следующем примере. Окружность, как известно, есть множество третьих вершин треугольников, у которых две вершины

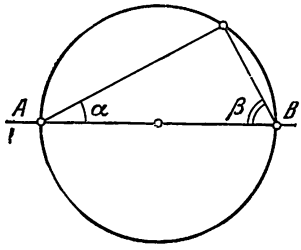


Рис. 53.

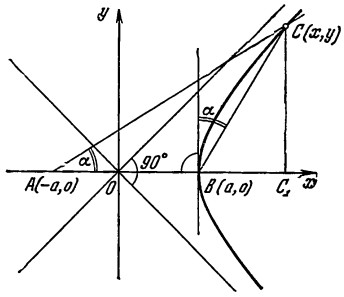


Рис. 54.

неподвижны и сумма углов при этих вершинах равна 90° (рис. 53). Равнобочная же гипербола есть *множество третьих вершин треугольников, у которых две вершины фиксированы и разность углов при этих вершинах равна* 90° (рис. 54). Действительно, пусть в треугольнике ABC вершины A и B фиксированы и $|\angle A-\angle B|=90°$. Примем прямую AB за ось x, а перпендикуляр к отрезку AB, восставленный в его середине, за ось y. Обозначив длину отрезка AB через $2a$ и опустив высоту $CC_1=y$, получим из рассмотрения подобных треугольников ACC_1 и BCC_1:

$$y:(a+x)=(x-a):y$$

или

$$x^2-a^2=y^2, \quad \text{т. е.} \quad x^2-y^2=a^2.$$

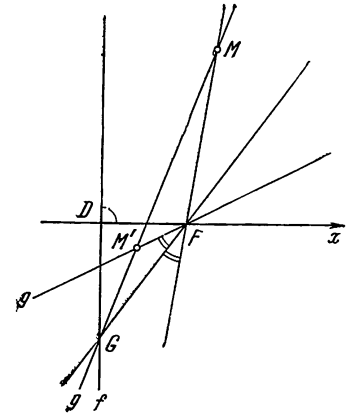


Рис. 55.

3.4. Взаимное расположение гиперболы и прямой. Касательная к гиперболе. Пусть прямая g проходит через точку M гиперболы и пересекает директрису f в точке G (рис. 55). Построим прямую g_1, симметричную с прямой FM относительно FG. Как и для случая эллипса, можно доказать, что если прямая g не параллельна какой-либо асимптоте, то прямая g_1 пересекает прямую g в принадлежащей гиперболе точке M'. Однако если прямые MF и FG перпендикулярны, то прямая g_1 совпадает с MF и точка M' совпадает с M. Если же прямая g параллельна асимптоте, то $g'\parallel g$ и вторая точка пересечения прямой g с гиперболой отсутствует (говорят,

что в этом случае вторая точка пересечения «уходит в бесконечность»). Итак,

если прямая имеет с гиперболой одну общую точку, то она имеет с ней и еще одну общую точку, которая может совпасть с первой или уйти в бесконечность.

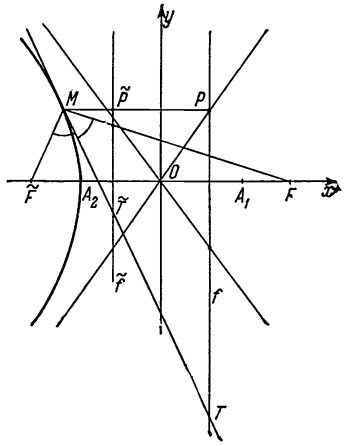


Рис. 56.

Прямая, не параллельная асимптоте и имеющая с гиперболой только одну общую точку, называется *касательной* к гиперболе. *Отрезок касательной, заключенный между точкой касания и директрисой, виден из соответствующего фокуса под прямым углом.*

Отсюда следует, что касательные в концах фокальной хорды гиперболы пересекаются на директрисе или параллельны ей и наоборот.

Пусть касательная в точке M гиперболы пересекает ее директрисы в точках T и $\tilde{T}$, а прямая, проведенная параллельно оси x, пересекает директрисы в точках P и $\tilde{P}$ (рис. 56). Из подобия треугольников MPT и $M\tilde{P}\tilde{T}$ следует, что $MP:M\tilde{P}=MT:M\tilde{T}$. С другой стороны, $MP:M\tilde{P}=MF:M\tilde{F}$. Следовательно, $MT:M\tilde{T}=MF:M\tilde{F}$. Но треугольники MFT и $M\tilde{F}\tilde{T}$ прямоугольные; поэтому они подобны и $\angle FMT=\angle \tilde{F}M\tilde{T}$. Таким образом,

касательная к гиперболе делит пополам угол между фокальными радиусами, проведенными в точку касания.

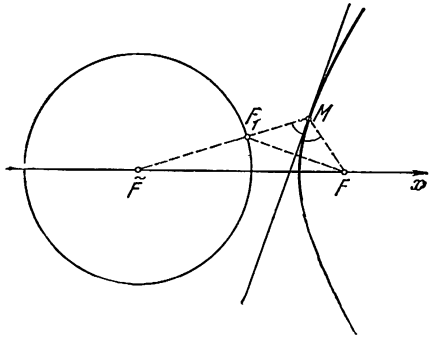


Рис. 57.

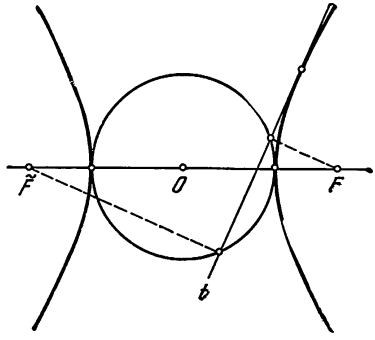


Рис. 58.

Из этого свойства касательной непосредственно получается построение касательной к гиперболе в данной ее точке.

Отразив один фокус гиперболы относительно всевозможных его касательных, мы получим точки, расстояния которых до другого

фокуса равны $2a$ (рис. 57). Следовательно, эти точки лежат на одной окружности радиуса $2a$ с центром в другом фокусе. Эта окружность называется направляющей окружностью гиперболы. Таких окружностей имеется две.

Точно так же *множество оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса гиперболы на ее касательные, есть окружность радиуса a, построенная на действительной оси гиперболы как на диаметре* (рис. 58, ср. выше, стр. 577).

Докажем еще, что

произведение расстояний от фокусов гиперболы до ее касательной не зависит от выбора этой касательной и равно квадрату мнимой полуоси гиперболы. Действительно, опустим из фокусов F и $\tilde{F}$ перпендикуляры FH и $\tilde{F}\tilde{H}$ на касательную t к гиперболе в точке M (рис. 59). Пусть $FH=h$, $\tilde{F}\tilde{H}=\tilde{h}$. Из рассмотрения трапеции $FH\tilde{F}\tilde{H}$ легко вывести, что расстояние $h_0=OH_0$ от центра O гиперболы до касательной t равно $\frac{1}{2}|h-\tilde{h}|$. Далее, отложив на продолжении OH_0 отрезок $H_0F'=h$ и учитывая, что $OH=O\tilde{H}=a$ и $OF=c$, из прямоугольных треугольников $OF'F$ и OH_0H находим:

$$c^2=OF^2=OF'^2+F'F^2=(h_0+h)^2+$$
$$+H_0H^2,\quad a^2=OH^2=h_0^2+H_0H^2$$

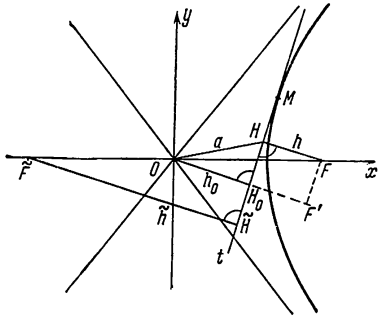


Рис. 59.

и, значит,

$$c^2-a^2=\left(\frac{h+\tilde{h}}{2}\right)^2-\left(\frac{h-\tilde{h}}{2}\right)^2$$

или

$$h\tilde{h}=c^2-a^2=b^2.$$

Можно доказать и обратное предложение, а именно, что *множество прямых плоскости, пересекающих отрезок $F\tilde{F}$ и обладающих тем свойством, что произведение расстояний от точек F и $\tilde{F}$ до каждой из этих прямых постоянно, совпадает с множеством касательных некоторой гиперболы с фокусами F и $\tilde{F}$.*

Для гиперболы остаются справедливыми также и теоремы Понселе, доказанные выше для эллипса. Именно:

1) *биссектриса угла между двумя фокальными радиусами, проведенными из одного фокуса к двум точкам гиперболы, проходит через точку пересечения касательных к гиперболе, проведенных в данных двух точках* (рис. 60, *а*), и 2) *два фокальных радиуса гиперболы, проведенных из фокусов к двум точкам*

кривой, видны из точки пересечения касательных в этих точках под равными или дополнительными углами (рис. 60, *б*). Доказательства этих теорем во всем аналогичны приведенным выше доказательствам теорем Понселе для эллипса.

3.5. Свойства асимптот. Пусть касательная t к гиперболе в точке M пересекает асимптоты m_1 и m_2 в точках N_1 и N_2

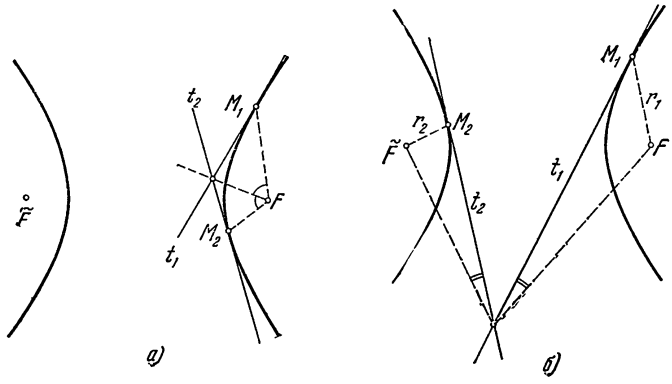


Рис. 60.

(рис. 61). Докажем, что произведение отрезков ON_1 и ON_2 есть величина постоянная. Проведем через фокус F прямые FK_1 и FK_2, параллельные асимптотам m_1 и m_2. Согласно теореме Понселе (стр. 578, 595),

$$\angle MFN_1 = \angle N_1FK_1, \qquad \angle MFN_2 = \angle N_2FK_2.$$

Отсюда следует, что

$$\angle N_1FN_2 = \frac{1}{2}\angle K_1FK_2 = \angle K_1FO = \angle N_1O\tilde{F}$$

и поэтому

$$\angle N_1FM = \angle OFN_2 = \angle FN_1O \quad \text{и} \quad \angle MFN_2 = \angle FN_2O = \angle OFN_1.$$

Из равенства углов следует подобие треугольников OFN_1 и OFN_2. Следовательно,

$$ON_1 : OF = OF : ON_2,$$

или

$$ON_1 \cdot ON_2 = OF^2 = c^2.$$

Площадь треугольника, образованного двумя асимптотами гиперболы и подвижной касательной, есть величина постоянная.

Значение этой постоянной может быть определено очень просто:

$$S_{ON_1N_2} = \frac{1}{2} ON_1 \cdot ON_2 \sin\omega = \frac{1}{2} c^2 \sin\omega =$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} c^2 \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{2} c^2 \frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = ab,$$

где ω — угол между асимптотами, α — угол наклона асимптоты к вещественной оси гиперболы.

Докажем, что точка касания касательной к гиперболе делит отрезок этой касательной, заключенный между асимптотами, пополам. Это свойство гиперболы достаточно установить для равнобочной гиперболы, так как преобразованием сжатия к действительной оси неравнобочную гиперболу можно преобразовать

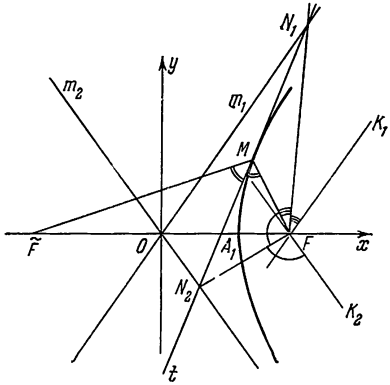


Рис. 61.

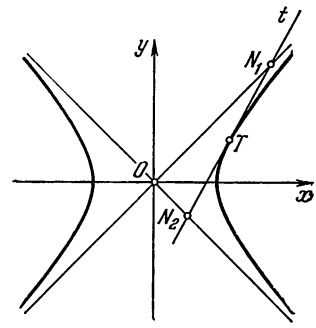


Рис. 62.

в равнобочную, причем касательная преобразуется в касательную, асимптоты — в асимптоты и середина отрезка — в середину отрезка.

Пусть точки N_1, N_2 и середина T отрезка N_1N_2 имеют соответственно координаты: $N_1(m_1, m_1)$, $N_2(m_2, -m_2)$, $T(x, y)$ (рис. 62). Очевидно, что $x = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$, $y = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)$ и $x^2 - y^2 = m_1 m_2$. Но $m_1 = \frac{ON_1}{\sqrt{2}}$, $m_2 = \frac{ON_2}{\sqrt{2}}$, откуда $m_1 m_2 = \frac{c^2}{2}$.

Следовательно,

$$x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}, \text{ или } x^2 - y^2 = a^2,$$

так как для равнобочной гиперболы $c^2 = 2a^2$. Таким образом, середина T отрезка N_1N_2 принадлежит гиперболе и касательной, т. е. точка T является точкой касания.

Отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

Из этой теоремы следует, что *гипербола есть геометрическое место вершин параллелограммов постоянной площади, у которых одна вершина и угол при ней фиксированы, а две другие прилежащие вершины лежат соответственно на прямых, содержащих стороны данного угла.*

Если асимптоты гиперболы принять за оси косоугольной системы координат, то уравнение гиперболы принимает вид

$$xy = \frac{1}{\sin\omega} 2s, \quad \text{или} \quad xy = m^2.$$

В частности, уравнение равнобочной гиперболы в прямоугольной декартовой системе координат, оси которой совпадают с ее асимптотами, имеет вид

$$xy = k \quad \text{или} \quad y = \frac{k}{x},$$

где $k \neq 0$ — некоторая постоянная. В этом именно виде уравнение гиперболы фигурирует в школьном курсе алгебры.

§ 4. Парабола

4.1. Форма параболы. Уравнение параболы. Парабола однозначно определяется своим фокусом F и директрисой f. Перпендикуляр $x \equiv FD$, опущенный из фокуса на директрису, называют *осью* параболы, а расстояние p от фокуса до директрисы — ее *параметром* (рис. 63). Из определения параболы как геометрического места точек, равноудаленных от F и f, следует, что *парабола симметрична относительно своей оси*, причем ось x имеет с параболой лишь одну общую точку O — середину отрезка FD. Точка O называется *вершиной* параболы.

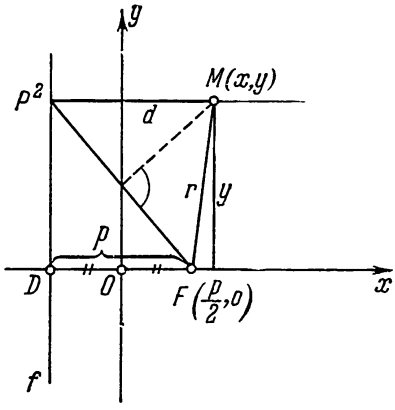


Рис. 63.

Проведем через точку O прямую y, перпендикулярную к оси x. Очевидно, что кроме точки O на прямой y других точек параболы нет, ибо для всякой точки P прямой y, отличной от O, расстояние r до фокуса больше $\frac{p}{2}$, расстояние $PP_1 = d$ до директрисы равно $\frac{p}{2}$ и, значит, $r:d > 1$, т. е. точка P не принадлежит параболе. Для всякой точки P плоскости, расположенной с фокусом F по разные стороны от директрисы, $r > d$, и поэтому

в этой полуплоскости точек параболы нет. Следовательно, *точки параболы расположены по ту сторону от прямой y, с которой расположен фокус параболы*. В силу симметрии всякая прямая, параллельная прямой y и имеющая с параболой одну общую точку, имеет с ней и другую общую точку и лишь прямая y имеет одну общую точку с параболой. Вследствие этого прямую y называют *касательной* к параболе в ее вершине.

Примем теперь ось параболы x за ось абсцисс, а касательную y в вершине — за ось ординат прямоугольной системы координат. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы (рис. 63). Тогда

$$r^2 = MF^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \qquad d^2 = MP^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

и из равенства $r^2 = d^2$ следует, что

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Если дана абсцисса точки M, то ординату легко построить как среднюю пропорциональную между абсциссой и удвоенным параметром. Уравнение (1) показывает, что при $x \to \infty$ также и $y \to \infty$, т. е. парабола есть неограниченная кривая.

Если заменить обозначения осей координат (рис. 64), то уравнение параболы примет вид

$$x^2 = 2py, \text{ или } y = ax^2, \text{ где } a = \frac{1}{2p}.$$

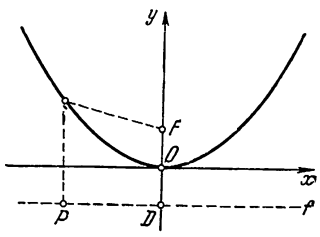


Рис. 64.

В этой именно форме уравнение параболы фигурирует в школьном курсе алгебры.

4.2. Взаимное расположение параболы и прямой. Касательная к параболе. Пусть прямая g имеет с параболой общую точку M. Докажем, что на прямой g имеется, вообще говоря, еще одна точка M_1, принадлежащая параболе. Если прямая g параллельна оси y (или директрисе), то точка M_1 симметрична M относительно оси x (рис. 65, *а*). Предположим теперь, что g пересекает директрису в точке Q (рис. 65, *б*). Отразим прямую MF относительно FQ, и пусть полученная прямая g_1 пересекает g в точке M_1. Из свойства биссектрисы внешнего угла треугольника следует, что $MQ:QM_1 = MF:M_1F$. Если d и d_1 обозначают расстояния точек M и M_1 от директрисы, то $d:d_1 = MQ:QM_1$, и потому $d:d_1 = MF:M_1F$. Но $d = MF$, следовательно, $d_1 = M_1F$, т. е. точка M_1 принадлежит параболе.

Может, однако, случиться, что прямые g и g_1 пересекаются в точке $M_1 \equiv M$. Это будет иметь место в том случае, когда

$\angle QFM$ равен 90° (прямая g' и точка Q' на рис. 65, *б*). Прямая g является в этом случае *касательной* к параболе в точке M.

Отрезок касательной к параболе, заключенный между точкой касания и директрисой, виден из фокуса параболы под прямым углом.

Может также случиться, что прямые g и g_1 параллельны и точки M_1 не существует. Это будет иметь место тогда, когда

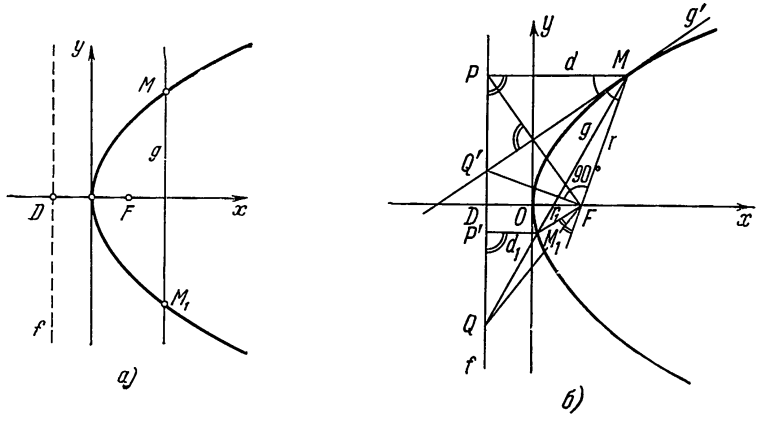


Рис. 65.

$\triangle FMQ$ равнобедренный и $MF = MQ$ (рис. 66). Но последнее означает, что прямая g параллельна оси параболы.

Как легко убедиться, никакая прямая g не может иметь с параболой трех общих точек.

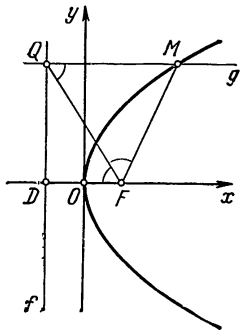


Рис. 66.

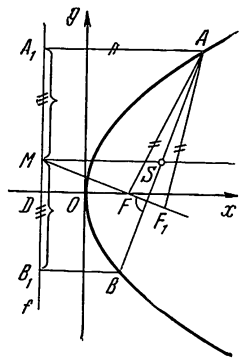


Рис. 67

Если прямая g проходит через точку M параболы и не является касательной и не параллельна оси параболы, то она пересекает параболу еще в одной точке.

Заметим, что доказательство несколько изменится, если прямая g проходит через фокус параболы; разбор этого случая мы предоставим читателю.

Если прямая g параллельна оси параболы, то она называется *диаметром* параболы. Чтобы установить основное свойство диаметров, отразим фокус F параболы относительно произвольной ее хорды AB; полученную точку обозначим через F_1, а проекции концов A и B хорды на директрису — через A_1 и B_1 (рис. 67). Точка A равноудалена от точек F, F_1 и A_1; поэтому окружность радиуса AF с центром в точке A касается директрисы в точке A_1. Аналогично окружность радиуса BF с центром в точке B касается директрисы в точке B_1. По известному свойству окружности

$$MA_1^2 = MF \cdot MF_1 = MB_1^2,$$

где M — точка пересечения прямой FF_1 с директрисой параболы; следовательно, точка M делит отрезок A_1B_1 пополам. Но точка M совпадает с проекцией середины S хорды AB на директрису. Если хорда AB перемещается параллельно самой себе, то прямая FF_1 и, следовательно, точка M остаются неизменными, а это значит, что середины всех параллельных хорд

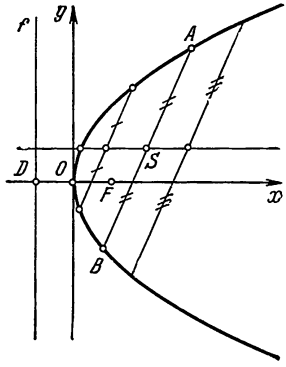


Рис. 68.

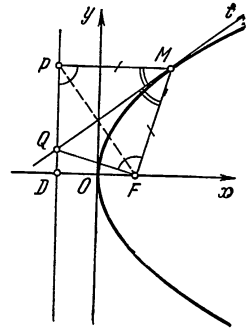


Рис. 69.

расположены на одной прямой, параллельной оси параболы (рис. 68). Эту прямую называют *диаметром параболы, соответствующим выбранному направлению хорд.*

Множество середин параллельных хорд параболы представляет собой луч, принадлежащий диаметру параболы.

Изучим теперь подробнее свойства касательной к параболе. Пусть касательная t в точке M параболы пересекает ее директрису в точке Q и пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису (рис. 69). В четырехугольнике $MFQP$ два противолежащих угла — прямые и стороны MP и MF

равны. Следовательно, $\triangle PMQ = \triangle QMF$ и касательная t является биссектрисой угла, образованного фокальным радиусом и прямой, проходящей через данную точку параллельно оси x.

Если MP — перпендикуляр, опущенный из точки M параболы на директрису, то биссектриса угла FMP есть касательная к параболе в точке M.

Из рассмотрения того же четырехугольника можно заключить, что точки P и F симметричны относительно биссектрисы t угла FMP:

точки, симметричные фокусу параболы относительно всевозможных ее касательных, расположены на директрисе параболы.

Отсюда, далее, следует, что

основания перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на ее касательные, принадлежат касательной к параболе в ее вершине.

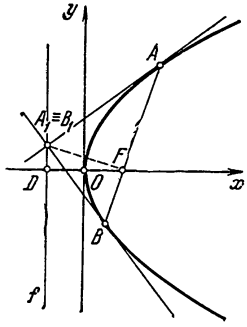


Рис. 70.

В концах A и B фокальной хорды AB проведем касательные, пересекающие директрису в точках A_1 и B_1 (рис. 70). Если эти точки соединить с фокусом, то мы получим два перпендикуляра, опущенных из точек A_1 и B_1 на хорду AB. Следовательно, обе точки A_1 и B_1 совпадают:

касательные в концах фокальной хорды параболы пересекаются на директрисе параболы.

Опустим из точек A и B на директрису перпендикуляры AA_0 и BB_0. Очевидно, что касательные в точках A и B являются биссектрисами двух углов, сумма которых равна 180°, и поэтому касательные пересекаются под прямым углом:

множество вершин прямых углов, стороны которых касаются параболы, совпадает с директрисой параболы.

Докажем, теперь, что

отрезки двух касательных, проведенных из одной точки к параболе, заключенные между этой точкой и точками касания, видны из фокуса параболы под равными углами. Действительно, пусть PT_1 и PT_2 — касательные, T_1 и T_2 — точки касания (рис. 71). Отразим фокус F относительно касательных и полученные точки N_1 и N_2 соединим с точками T_1 и T_2. В силу симметрии $\angle PFT_1 = \angle PN_1T_1$, $\angle PFT_2 = \angle PN_2T_2$. С другой стороны, $\angle PN_1T_1 = \angle PN_2T_2$ в силу симметрии относительно прямой, проведенной через точку P перпен-

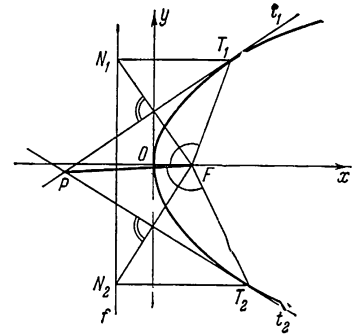


Рис. 71.

дикулярно к директрисе. Следовательно, $\angle PFT_1 = \angle PFT_2$, что и требовалось установить.

Докажем, наконец, что

отрезок касательной к параболе, заключенный между точкой касания и осью параболы, делится касательной в вершине пополам.

Действительно, пусть касательная t в точке M к параболе пересекает ось параболы в точке S, а касательную y в вершине — в точке R (рис. 72). Треугольник FMP является равнобедренным

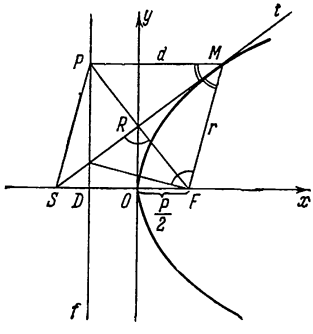


Рис. 72.

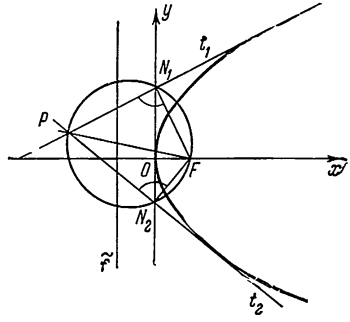


Рис. 73.

и MR — биссектрисой угла FMP. Следовательно, четырехугольник $PMFS$ является ромбом и $SR = RM$.

Укажем построение касательных к параболе, проведенных из точки P. Соединяем точку P с фокусом параболы и на отрезке PF, как на диаметре, строим окружность, пересекающую касательную y в точках N_1 и N_2 (рис. 73). Прямые PN_1 и PN_2 являются касательными к параболе. Действительно, касательная, проведенная к параболе из точки N_1, перпендикулярна к N_1F и, следовательно, она проходит через точку P.

§ 5. Некоторые общие свойства конических сечений

5.1. Полярное уравнение конических сечений. Примем фокус F конического сечения за полюс полярной системы координат, ось которой направлена перпендикулярно к директрисе f и не пересекает ее. Расстояние от фокуса до директрисы обозначим через m. Очевидно, что полярные координаты r и φ произвольной точки M конического сечения (рис. 74) связаны соотношением

$$r\cos\varphi + m = d,$$

где d — расстояние от точки M до директрисы. С другой стороны, согласно определению конического сечения, имеем $d = r:\varepsilon$.

Следовательно,

$$r\cos\varphi + m = \frac{r}{\varepsilon}.$$

Из этого уравнения находим:

$$r = \frac{m\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Это и есть полярное уравнение конического сечения. При $\varphi = 90°$ имеем $r = m\varepsilon$. Этот полярный радиус обозначают обычно через p (параметр конического сечения); он равен

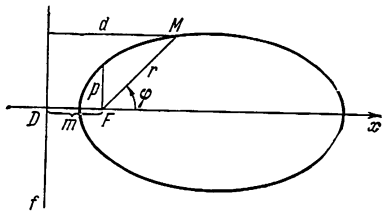


Рис. 74.

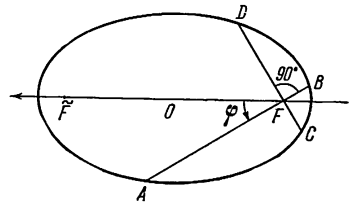


Рис. 75.

фокальной полухорде, перпендикулярной к полярной оси. Для эллипса и гиперболы $p = \frac{b^2}{a}$, так как соответственно

$$m\varepsilon = \left(\frac{a}{\varepsilon} - c\right)\varepsilon = a - c\varepsilon = a - \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

и

$$m\varepsilon = \left(c - \frac{a}{\varepsilon}\right)\varepsilon = c\varepsilon - a = \frac{c^2}{a} - a = \frac{b^2}{a}.$$

Для параболы $p = m$. Следовательно, уравнение любого конического сечения в полярных координатах можно записать в виде

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Полярное уравнение весьма удобно для доказательства теорем, касающихся фокальных хорд конического сечения.

Пусть хорда AB проходит через фокус F (рис. 75). Тогда

$$AF = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \qquad BF = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{p}.$$

Сумма обратных значений отрезков фокальной хорды эллипса или параболы, на которые она делится фокусом, есть величина постоянная. (Для гиперболы имеем $\left|\frac{1}{AF} \pm \frac{1}{BF}\right| = \frac{2}{p}$.)

Пусть теперь AB и CD — две взаимно перпендикулярные фокальные хорды эллипса или параболы. Тогда

$$AB = AF + BF = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi} + \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$$

и

$$CD = CF + FD = \frac{p}{1+\varepsilon\sin\varphi} + \frac{p}{1-\varepsilon\sin\varphi} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi},$$

откуда

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2-\varepsilon^2}{2p}.$$

Сумма обратных величин взаимно перпендикулярных фокальных хорд эллипса или параболы есть величина постоянная.

5.2. Софокусные конические сечения. Два центральных конических сечения (два эллипса, две гиперболы или эллипс и гипербола) называются софокусными, если они имеют общие фокусы. Две параболы называются софокусными, если они имеют общий фокус и их оси совпадают.

Два софокусных эллипса или две софокусные гиперболы не имеют общих точек, так как точкой и двумя фокусами эллипс или гипербола определяются однозначно. Софокусные эллипс и гипербола пересекаются в четырех точках (рис. 76, *а*). Две софокусные параболы с сонаправленными осями не пересекаются.

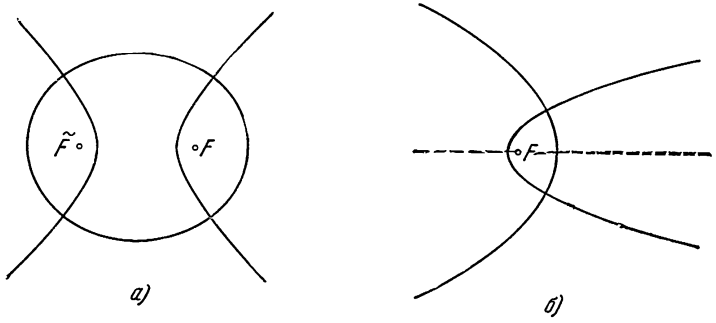


Рис. 76.

Действительно, если бы они имели общую точку, то у них была бы общая директриса; но в таком случае параболы совпали бы, что противоречит условию. Две софокусные параболы с противоположно направленными осями пересекаются в двух точках (рис. 76, *б*).

Софокусные эллипс и гипербола пересекаются ортогонально, т. е. касательные к кривым в их общей точке перпендикулярны. В самом деле, касательная к эллипсу делит внешний угол между

фокальными радиусами пополам, а касательная к гиперболе делит внутренний угол между теми же фокальными радиусами пополам. Эти две биссектрисы перпендикулярны, так как делят смежные углы пополам.

Софокусные параболы с противоположно направленными осями пересекаются также ортогонально, в чем легко убедиться аналогичным рассуждением.

Софокусные эллипсы и гиперболы образуют на плоскости *ортогональную сеть* (рис. 77, *а*), так как через каждую точку плоскости, кроме точек общих осей, проходит один эллипс и

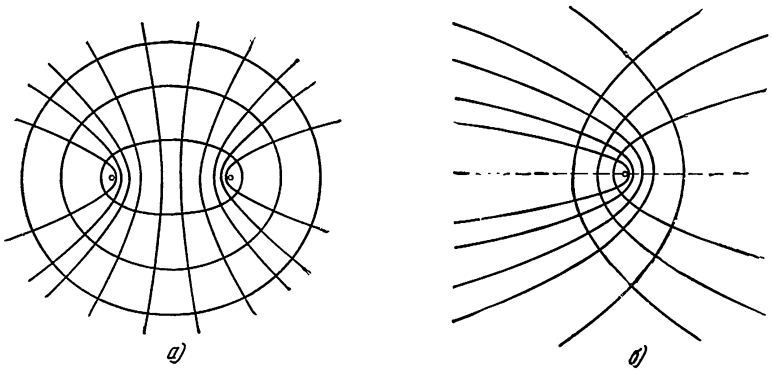


Рис. 77.

одна гипербола и в этой точке обе кривые пересекаются ортогонально. Четырехугольники, которые образуются в результате пересечения двух эллипсов и двух гипербол, имеют прямые углы и могут быть рассмотрены как криволинейные прямоугольники. Аналогичным образом оба семейства софокусных парабол определяют на плоскости ортогональную сеть (рис. 77, *б*).

Докажем еще следующую замечательную теорему:

расстояния между противолежащими вершинами криволинейного четырехугольника ортогональной сети, образованной софокусными эллипсами и гиперболами, равны, т. е. сеть софокусных эллипсов и гипербол равнодиагональна.

Обозначим общие фокусы эллипсов l_1 и l_2 и гипербол g_1 и g_2 через F и $\tilde{F}$, а расстояние между фокусами — через m (рис. 78). Вершины криволинейного четырехугольника, образованного этими кривыми, обозначим через A, B, C, D. Докажем, что $AC = BD$. Пусть $AC = x$, $BD = y$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} AF + A\tilde{F} &= 2a, & AF - A\tilde{F} &= 2b; \\ BF + B\tilde{F} &= 2a, & BF - B\tilde{F} &= 2d; \\ CF + C\tilde{F} &= 2c, & CF - C\tilde{F} &= 2d; \\ DF + D\tilde{F} &= 2c, & DF - D\tilde{F} &= 2b. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} AF &= a + b, & A\tilde{F} &= a - b; & CF &= c + d, & C\tilde{F} &= c - d; \\ BF &= a + d, & B\tilde{F} &= a - d; & DF &= c + b, & D\tilde{F} &= c - b. \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник $F\tilde{F}A$ и точку C. Из точки C стороны треугольника видны под углами φ_1, φ_2, φ_3, для которых либо один равен сумме двух других (например, $\varphi_3=\varphi_1+\varphi_2$), либо $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=2\pi$. В обоих случаях из этих соотношений между углами следует, что

$$\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3-2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3-1=0.$$

Подставляя сюда значения косинусов, вычисленных из треугольников $CF\tilde{F}$, $C\tilde{F}A$, CAF с помощью теоремы косинусов, получим после упрощений

$$m^2x^4+\{m^4-2[m^2(a^2+b^2+c^2+d^2)-8abcd]\}x^2+$$
$$+m^2[a^4+b^4+c^4+d^4-2(a^2+c^2)(b^2+d^2)-2(a^2c^2+b^2d^2)+8abcd]-$$
$$-16(ac-bd)(ad-bc)(ab-cd)=0,$$

где $x=AC$.

Если исходить из треугольника $F\tilde{F}B$ и точки D, то получим точно такое же биквадратное уравнение относительно $y=BD$. Два эллипса и две гиперболы определяют четыре четырехугольника, из которых имеются только два различных (заметим, что в наших рассуждениях участвуют только правые ветви гипербол g_1 и g_2). Поэтому два корня выписанного выше уравнения относительно x соответствуют диагоналям AC и AC_1 четырехугольников $ABCD$ и ABC_1D_1. Точно так же BD и BD_1 равны двум корням уравнения с неизвестным y. Поэтому либо $AC=BD$, либо $AC=BD_1$. Из свойств симметрии следует, что диагонали одного четырехугольника меньше соответствующих диагоналей другого четырехугольника, т. е. $AC<AC_1$, $BD<BD_1$, и поэтому $AC+BD<AC_1+BD_1$. Если допустить, что $AC=BD_1$, то $BD=AC_1$ и $AC+BD=AC_1+BD_1$, что противоречит предыдущему неравенству. Следовательно, равенство $AC=BD_1$ необходимо отвергнуть и остается, что $AC=BD$, что и требовалось доказать.

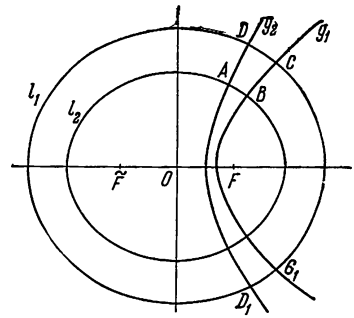


Рис. 78.

Аналогичным свойством обладают диагонали криволинейного четырехугольника, образованного двумя парами софокусных парабол.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Сальмон, Конические сечения, перев. с англ., Спб., изд. В. И. Губинского, 1908.

Классический учебник аналитической геометрии, весьма богатый конкретными результатами, касающимися геометрических свойств конических сечений.

[2] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 2, перев. с франц., М., Учпедгиз, 1938.

Во втором томе энциклопедического курса элементарной геометрии знаменитого Ж. Адамара, в соответствии с французскими традициями, широко представлена элементарная теория конических сечений. Книга содержит много задач. (Отметим, что в последующих изданиях этой книги материал, относящийся к коническим сечениям, был исключен.)

[3] Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, ч. 1, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

В этом оригинальном учебнике аналитической геометрии большое место занимает синтетическая теория конических сечений.

[4] И. М. Яглом и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. 1, М., Учпедгиз, 1962.

Основную часть содержания книги составляет теория конических сечений, излагаемая в духе книги Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова [3], но с несколько бо́льшими подробностями. Книга содержит много задач.

[5] Л. Феликс, Элементарная математика в современном изложении, перев. с франц., М., «Просвещение», 1966.

Современный французский учебник элементарной математики, завершающийся, в соответствии с программой французских средних школ, главой, посвященной теории конических сечений.

[6] Г. Вебер и И. Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. II, кн. 1, перев. с нем., Одесса, Матезис, 1913.

Один из параграфов этой книги посвящен элементарной теории конических сечений, определяемых так, как это сделано в п. 1.4 настоящей статьи.

[7] J. Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften, Leipzig, 1898.

Классическое сочинение знаменитого немецкого геометра, посвященное коническим сечениям; книга весьма богата конкретными результатами.

[8] H. Lebesgue, Les coniques, Paris, 1942.

Интересная книга выдающегося французского математика, по существу представляющая собой объединение ряда очерков, посвященных отдельным частным свойствам конических сечений.

[9] F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. III_2, Leipzig, 1903.

В конце прошлого и начале этого века немецкие математики во главе со знаменитым Ф. Клейном предприняли издание фундаментальной «Энциклопедии математических наук» во многих томах. Энциклопедическая статья Дингельдея содержит весьма обстоятельную сводку элементарно-геометрических свойств конических сечений.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абу-л-Вафа (Абӯ-л-Вафā Мухаммед ибн Мухаммед ал-Бӯзджāнӣ) (940—998) — среднеазиатский математик 353

Аганис — византийский или армянский математик V—VI вв. 395

ал-Джаухари (ал-'Аббāс ибн Са'йд ал-Джаухарӣ) — багдадский математик IX в. 395

Александров Александр Данилович (р. 1912)—советский математик 185

Александров Павел Сергеевич (р. 1896) — советский математик 517, 548, 554

Аполлоний ('Απολλώνιος) (265 — 170 до н. э.) — древнегреческий математик 565, 582, 583

Архимед ('Αρχιμήδης) (ок. 287 — 212 до н. э.) — древнегреческий математик и механик 93

ас-Самарканди (Шамс ад-Дӣн Мухаммед ибн Ашраф ас-Самаркандӣ) — среднеазиатский математик XIII в. 395

Банах (Banach) Стефан (1892 — 1945) — польский математик 465

Барбье (Barbier) Сальвадор (ум. 1843)—французский математик 237

Бельтрами (Beltrami) Эудженио (1835—1900) — итальянский математик 403, 459

Бетти (Betti) Энрико (1823—1892) — итальянский математик 533

Блихфельд (Bliechfeld) Ганс Фредерик (р. 1873) — американский математик 261

Бляшке (Blaschke) Вильгельм Иоганн (1885—1962) — немецкий математик 226, 341

Бойяи (Bolyai) Фаркаш (1775—1856) — венгерский математик 148, 161, 395, 397, 402

Бойяи (Bolyai) Янош (1802—1860)— венгерский математик 402, 403, 404

Болтянский Владимир Григорьевич (р. 1925) — советский математик 165, 222

Борсук (Borsuk) Карол (р. 1905) — польский математик 263, 265

Брауэр (Brouwer) Лёйтзен Эгберт Ян (р. 1881) — нидерландский математик 482, 517

Брунн (Brunn) Герман (1862—1939) — немецкий математик 238

Буземан (Busemann) Герберт — современный американский математик 185

Валлис (Wallis) Джон (1616 — 1703) — английский математик 395, 397

Вейль (Weyl) Герман (1885—1955) — немецкий математик 352

Галилей (Galilei) Галилео (1564—1642) — итальянский ученый 452

Гаусс (Gauss) Карл Фридрих (1777—1855) — немецкий математик 402—404

Гервин (Gerwien) П.— австрийский математик XIX в. 148, 161

Гильберт (Hilbert) Давид (1862—1943) — немецкий математик 156

Глюр (Glür) Жан Пьер— современный швейцарский математик 162, 163

Гохберг Израиль Цудикович (р. 1928) — советский математик 266

Грассман (Grassmann) Герман (1809—1877) — немецкий математик 353, 360

Грюнбаум (Grünbaum) Бранко — современный израильский математик 26

Даламбер (D'Alembert) Жан Лерон (1717—1783) — французский математик 353
Ден (Dehn) Макс (1878—1952) — немецкий математик 156, 169
Диофант (Διοφαντος) (вероятно, IIIв.) — древнегреческий математик 353
Евклид (Εὐκλείδίς) (начало III в. до н. э.) — древнегреческий математик 147, 394, 404
Ефремович Вадим Арсеньевич (р. 1903) — советский математик 544
Жордан (Jordan) Камилл (1838—1922)—французский математик 481
Ибн ал-Хайсам (Абӯ 'Алӣ ал-Хасан ибн ал-Хасан ибн ал-Хайсам) (965—1039) — каирский математик 395, 402
Ибн Корра (Абӯ-л-Хасан Сābит ибн Корра ас-Саби ал-Харрāнӣ) (ок. 830—901) — багдадский математик 395
Каган Вениамин Федорович (1869—1953) — советский математик 157
Кантор (Cantor) Георг (1845—1918)—немецкий математик 93
Кёниг (König) Денис (р. 1884) — немецкий математик 247
Клейн (Klein) Феликс (1849—1925)—немецкий математик 403, 459, 460, 502
Клеро (Clairaut) Алексис Клод (1713—1765) — французский математик 395
Клиффорд (Clifford) Вильям Кингдон (1845—1873) — английский математик 419
Колмогоров Андрей Николаевич (р. 1903) — советский математик 517
Кэли (Cayley) Артур (1821—1895) — английский математик 353, 459, 460
Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик и механик 295, 353
Ламберт (Lambert) Иоганн Генрих (1728—1777) — немецкий математик 402, 446
Лебег (Lebesgue) Анри (1875—1941)—французский математик 316
Леви (Levi) Фридрих Вильгельм Даниель (р. 1888) — немецкий математик 266
Лежандр (Legendre) Адриан Мари (1752—1833) — французский математик 395, 397—402, 404
Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) — русский математик 402—404, 439
Лоренц (Lorentz) Гендрик Антон (1853—1928) — голландский физик 436
Люстерник Лазарь Аронович (р. 1899) — советский математик 265, 555
Маркус Александр Семенович (р. 1932) — советский математик 266
Мёбиус (Möbius) Август Фердинанд (1790—1868)—немецкий математик 500
Милнор (Milnor) Джон — современный американский математик 555
Минковский (Minkowski) Герман (1864—1909) — немецкий математик 127, 130, 185, 238, 256, 437, 465
Насир-ад-дин ат-Туси (Абӯ Джа'фар Мухаммед ибн Мухаммед Насӣр ад-Дӣн ат-Тусӣ) (1201—1274) — азербайджанский математик 402
Нейман (von Neumann) Иоганн (1903—1957) — американский математик 352
Новиков Сергей Петрович (р. 1938)—советский математик 555
Ньютон (Newton) Исаак (1643—1727) — английский ученый 585
Пал (Pal) Йожеф (р. 1881) — венгерский математик 264
Пифагор (Πυθαγόρας) (ок. 580—500 до н. э.) — древнегреческий математик и философ 150, 426
Плейфер (Playfair) Джон (1748—1819) — английский математик 395, 396
Понселе (Poncelet) Жан Виктор (1788—1867) — французский математик 578, 595
Понтрягин Лев Семенович (р. 1908)—советский математик 517, 524, 554, 555
Посидоний (Ποσειδώνιος) (135—51 до н. э.) — римский математик 395
Прокл Диадох (Πρόκλος ὁ Διάδοχος) (410—485) — древнегреческий математик 395

Пуанкаре (Poincaré) Анри (1854—1912) — французский математик 462, 517, 536

Радон (Radon) Иоганн Карл Август (1887—1956) — австрийский математик 247, 469
Релло (Rellot) — французский математик и механик XIX в. 199
Риман (Riemann) Георг Фридрих Бернхард (1826—1866) — немецкий математик 404, 472
Рудольф (Rudolf) Христиан (ок. 1500 — ок. 1545) — немецкий математик 353

Саккери (Saccheri) Джованни Джироламо (1667—1733) — итальянский математик 402
Симпликий (Σιμπλίκιος) (ум. в 549) — древнегреческий математик 395

Тихонов Андрей Николаевич (р. 1906) — советский математик 524
Торричелли (Torricelli) Эванджелиста (1608—1647) — итальянский физик и математик 310

Урысон Павел Самуилович (1898—1924) — советский математик 549

Фейеш-Тот (Fejes Tóth) Ласло (р. 1915) — венгерский математик 185
Ферма (Fermat) Пьер (1601—1665)— французский математик 275, 292
Фридман Александр Александрович (1888—1925) — советский ученый 474

Хадвигер (Hadwiger) Гуго (р. 1908)— швейцарский математик 157, 162, 163; 165, 170, 185, 265
Хайям Омар (Абӯ-л-Фатх 'Омар ибн Ибрāхӣм ал-Хаййāм) (1048—1123) — среднеазиатский математик 395, 402
Хаусдорф (Hausdorf) Феликс (1868—1942) — немецкий математик 127, 129, 130
Хегор (Heegaard) П.— современный английский математик 530
Хелли (Helly) Эдуард (1884—1943)— немецкий математик 247, 250
Хилл (Hill) Майкейя Джон Маллер (1856—1929) — английский математик 156

Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894) — русский математик 251

Шварц (Schwarz) Герман Амандус (1843—1921) — немецкий математик 134, 321
Шлефли (Schlaefli) Людвиг (1814—1894)—швейцарский математик 353, 387
Шнирельман Лев Генрихович (1905—1938) — советский математик 265, 555
Шпернер (Sperner) Эмануэль (р. 1905) — немецкий математик 551
Штейнер (Steiner) Якоб (1796—1863) — швейцарский математик 185, 339
Штифель (Stifel) Михаил (1486—1567) — немецкий математик 353
Шуберт (Schubert) Герман (1848—1911) — немецкий математик 361

Эгглстон (Eggleston) Г. — современный английский математик 265
Эйлер (Euler) Леонард (1707—1783)— математик, механик, физик 241, 387, 495, 536

Юнг (Young) Уильям Генри (1882—1946) — английский математик 341

Яглом Исаак Моисеевич (р. 1921) — советский математик 222
Якоби (Jacobi) Карл Густав Якоб (1804—1851) — немецкий математик 353, 377

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная геометрия 403
Аддитивность длины 89
— объема 68
— площади 8, 61, 142
— — поверхности 130
Аксиома Архимеда 93
— Кантора 93
— Лобачевского 439
— треугольника 537
Аксиоматическое определение длины 117
— — объема 65
— — площади 9
— — — поверхности 136
Аксиомы топологического пространства 540
Аполлония задача 565
— теорема 582, 583
Архимеда аксиома 93
Асимптоты гиперболы 592, 596—598
Ациклическая линия 486

Базис ортонормированный 351
Банаха — Минковского геометрия 464—470
— — пространство 465
Барицентрическое разбиение 497, 520
Бельтрами — Клейна модель 459
Бесконечная десятичная дробь 93
Бесконечно близкие множества 539
Бесконечный трехмерный комплекс 518
Бетти группа 533
— число 533
Биссектральная гиперплоскость 388
Биссектриса симплекса 385
Близости пространство 543
Блихфельда теорема 261
Бляшке теорема 226, 341
Большая окружность 405, 432
— ось эллипса 569
Борсука гипотеза 265
Бойяи — Гервина теорема 161
Брунна — Минковского теорема 238

Векторы 349
—, линейная зависимость 350
— перпендикулярные 351
—, произведение на число 350
—, скалярное произведение 350
—, сумма 349
Верхняя интегральная сумма 52
Вершина внутренняя 494
— выпуклого многогранника 212
— — — многомерного 240
— — многоугольника 214
— гиперболы 588
— граничная 494
— комплекса 486, 519
— многомерного многогранника 386
— — параллелепипеда 379
— — симплекса 380
— параболы 598
— простой дуги 484
— цепочки отрезков 109
— эллипса 569
Вес звена 172
Ветвления точка 485
Вещественная ось гиперболы 588
Взаимно однозначное отображение 131
Внешний угол 194
Внешняя точка 13, 66, 186
Внутреннее ребро 494
Внутренняя вершина 494
— геометрия поверхности 470
— топология 482
— точка 13, 66, 133, 186, 541
Вписанная окружность 201
— сфера 202
Вписанный многоугольник 225, 329
Вполне параллельные многомерные плоскости 357

Вполне перпендикулярные многомерные плоскости 358
Вращения тело 80
Вторая теорема Аполлония 583
Входящая фигура 33
Выпуклая оболочка 213, 241
— фигура 182, 184, 209
— —, граница 186
— —, диаметр 195
— — неограниченная 182
— — ограниченная 182
— —, периметр 228, 233
— —, площадь 228, 233
— — пространственная 182
— —, ширина 198
Выпуклое тело 182
— —, диаметр 200
— — многомерное 239
— — —, диаметр 240
— — —, объем 246
— — —, ширина 240
— —, объем 229, 236
— —, поверхность 229, 236
— —, ширина 200
Выпуклые фигуры, расстояние 205
— —, сумма 219
Выпуклый конус 182
— многовершинник 215
— — многомерный 241
— многогранник 67, 192, 211
— —, вершины 212
— —, грани 212
— — двумерный 212
— — многомерный 240
— — нульмерный 212
— — одномерный 212
— —, ребра 212
— — трехмерный 212
— многомерный многогранник 386
— многосторонник 209
— — двумерный 210
— — нульмерный 210
— — одномерный 210
— —, сторона 211
— многоугольник 16, 189, 213
— —, вершины 214
— — двумерный 214
— — нульмерный 214
— — одномерный 214
Вычислительная геометрия 361
Вычитание многоугольных фигур 19

Галилея неевклидова геометрия 452—458
— преобразование 452
Гармошка Шварца 134
Геодезическая линия 471
Геодезический треугольник 471
Геометрии неевклидовы 460
— римановы 472
Геометрия абсолютная 403
— внутренняя 470
— вычислительная 361
— Галилея 452—458
— качественная 480
— комбинаторная 247
— Кэли — Клейна 459, 460
— Лобачевского 402, 439—452
— —, проективная модель 458
— метрическая 82
— Минковского — Банаха 464—470
— подобия 82, 84
— псевдоевклидова 420—439
— Римана 404—419
— —, проективная модель 458
— сферическая 404
Гервина — Бойяи теорема 161
Гильберта третья проблема 156
Гипербола 562, 564, 587—598
—, асимптоты 592, 596—598
—, вершины 588
—, вещественная ось 588
—, касательная 594
—, мнимая ось 589, 591
—, ось симметрии 588
— равнобочная 592
—, уравнение 591
—, фокусы 590
—, форма 587
—, центр 588
Гиперболический косинус 422
— поворот 424
— синус 422
Гиперболоид 431
Гиперплоскость 355
— биссектральная 388
— опорная 240
—, параллельность 357
—, перпендикулярность прямой 355
— радикальная 376
Гиперсфера 373
—, поверхность 377
Главная грань выпуклого многогранника многомерного 240
Главные диаметры 582
Гладкая простая дуга 38
Гладкое отображение 131
Глюра — Хадвигера теорема 163
Гомеоморфные пространства 540, 543
— фигуры 479
Гомологическая теория размерности 554

Гомологические циклы 533
Гомологичный нулю цикл 533
Градиент 294
Граница выпуклой фигуры 186
— множества 13, 67
— цепи 532
Граничная вершина 494
— точка 13, 66
Граничное ребро 494
Грань выпуклого многогранника 212
— — — многомерного 240
— многомерного многогранника 386
— — параллелепипеда 379
— — симплекса 381
Грассмана формула 360
График функции 280
Группа Бетти 533

Движение 351
— плоскости Лобачевского 447
— псевдоевклидова пространства 432
— псевдоевклидово 424
Двойственности закон Пуанкаре 536
Двумерная цепь 532
Двумерное замкнутое многообразие 492
Двумерный выпуклый многогранник 212
— — многосторонник 210
— — многоугольник 214
— комплекс 490
— симплекс 243
Двусторонний разрез 506
Дена теорема 169
Десятичная дробь бесконечная 93
Дефект угловой 445
Диаметр выпуклого тела 200
— — — многомерного 240
— множества 538
— ограниченного множества 102
— параболы 601
— фигуры 195
— шара в многомерном пространстве 374
— эллипса 574
Диаметры главные 582
— сопряженные 582
Директориальное свойство конических сечений 562
Директриса 560
Диффеоморфные фигуры 555
Дифференциальная топология 555
Длина, аксиоматическое определение 117
—, вычисление 125, 126
Длина, единица 85
— как предел 123
—, конструктивные определения 129
— ломаной линии 89, 94
— на классе спрямляемых линий 117
— окружности 123, 234
—, определение по Минковскому 127
—, — — Хаусдорфу 129
— отрезка 89
— —, определение 89
— —, существование и единственность 89
—, полунепрерывность 97
— при преобразовании подобия 122
— прямолинейного отрезка 89
—, свойства 89, 121
—, существование и единственность 117, 119
— цепочки отрезков 110
Дополнение множества 14
Дополнения метод 148, 150
Дробь бесконечная десятичная 93
Дуальное клеточное разбиение 525
Дуальные комплексы 519
Дуга простая 37, 100, 484
— —, вершины 484
— — гладкая 38
— —, концы 100, 484
— —, критерий спрямляемости 114
— — кусочно гладкая 38
— — неквадрируемая 42
— — спрямляемая 111
Дыра 511

Евклида пятый постулат 394
Евклидово пространство 349, 537
— —, координаты 537
— —, расстояние 537
— —, точка 537
Единица длины 85
— объема 85
— площади 85

Жордана теорема 481

Закон двойственности Пуанкаре 536
Закрытая клетка 518
Замкнутая квадрируемая область 54
— область 16, 67
— поверхность 492
— —, классификация 510
— — линия 40, 116, 117, 485
— — — кусочно гладкая 40
— цепь 532
Замкнутое двумерное многообразие 492

Замкнутое множество 15, 67, 541
— трехмерное многообразие 520—525
Замыкание множества 13, 67, 104
Звезда 491
— полуциклическая 494
— циклическая 492, 494
Звено 172
— ломаной линии 94

Избыток угловой 415, 471
Изоклинные плоскости 373
Изометричные пространства 538
Изоморфные комплексы 491, 519
Изопериметрическая задача для многоугольников 335
— — — произвольных фигур 338
Изотопные фигуры 483
Изотропная прямая 428
Инвариант многогранника 167
Инвариантность длины 89
— объема 68
— площади 8, 61, 62, 142
— — поверхности 130
Индикатор 189, 193
Индукция трансфинитная 178
Интегральная сумма 52
Инфинитезимальное пространство 543
Иррациональное число 93
Исчерпывания метод 146, 150

Кантора аксиома 93
Касательная 188
— к гиперболе 594
— — параболе 599, 600
— — эллипсу 574
— плоскость 193
— — в многомерном пространстве 374
Касательное расстояние 428, 450
Качественная геометрия 480
Квадратный метр 86
Квадрируемая замкнутая область 54
— фигура 9, 12, 33, 58
— —, площадь 44
Квадрируемое множество 33, 58
Квадрируемости критерий 35, 59
Квадрируемость классических фигур 40
— круга 41
Квадрируемые фигуры, операции 36, 60
— —, полнота класса 48
Квадрируемый простой кусок 134
— — —, площадь 136
Классификация поверхностей 510—516
— — простых 507—510
Классическая фигура 40
— —, квадрируемость 40
— —, площадь 52
Классическое кубируемое тело 76
Клейна поверхность 502
Клейна — Бельтрами модель 459
Клейна — Кэли геометрия 459, 460
Клетка закрытая 518
— комплекса 490
— открытая 518
— трехмерная 517
Клеточное разбиение 492, 519
— — дуальное 525
Когомология 517
Комбинаторная геометрия 247
Компактное множество 539
— —, размерность 550
Комплекс, барицентрическое разбиение 497, 520
—, вершины 486, 519
— двумерный 490
—, клетка 490
—, клеточное разбиение 492, 519
—, компоненты 486, 491
— линейный 486
— многомерный 519
— нульмерный 486
— одномерный 486
—, порядок связности 487—489
—, ребра 486, 519
— связный 486, 491
—, тело 491, 519
— трехмерный 518
—, эйлерова характеристика 487, 519
—, элементы 490
Комплексы дуальные 519
— изоморфные 491, 519
Компонента комплекса 486, 491
— множества 542
— фигуры 481
Конгруэнтное преобразование 538
Конец линии 485
— простой дуги 100, 484
Конечный трехмерный комплекс 518
Конические сечения софокусные 605
Коническое сечение 557, 568, 603
— —, директориальное свойство 562
— —, директриса 560
— —, полярное уравнение 603
— —, фокальное свойство 564
— —, фокус 560
— —, эксцентриситет 560, 569

Конструктивные определения длины — 129
— — площади 10—12, 56—65
Контур 132
Конус 77
— выпуклый 182
— опорный 191
— прямой круговой 191
Концевая точка линии 485
Концентрические сферы 374
Координаты евклидова пространства 537
Косинус гиперболический 422
Косое произведение множеств 524
Коцикл 517
Край поверхности 494
— простого куска 132
— трехмерного многообразия 526
Кратность покрытия 550
Крест многомерный 391
Кривая простая замкнутая 40
— элементарная 37
Кривизна пространства 472
— тела 194
Криволинейная трапеция 50
Критерий квадрируемости 35, 59
— кубируемости 76
— спрямляемости 114
Круг 13, 188, 340
—, квадрируемость 41
—, площадь 49, 234
Куб многомерный 390
Кубируемое множество 75, 81
— тело 75, 81
— — классическое 76
Кубируемости критерий 76
Кубируемые тела, операции 76
— —, полнота класса 77
Кубический метр 86
Кусок простой 132
— — квадрируемый 134
— — —, площадь 137
— —, край 132
— — многогранный 132
— — элементарный 137
Кусочно гладкая простая дуга 38
— — — замкнутая кривая 40
Кэли — Клейна геометрия 459, 460

Лагранжа метод 294
— множители 295
Линейная зависимость векторов 350
Линейный комплекс 486
Линза 191
Линзовое пространство 522
Линия 485
Линия ациклическая 486
— второго порядка 568
— геодезическая 471
—, концевая точка 485
— ломаная 94
— —, длина 89, 94
— предельная 449
— простая 36
— — замкнутая 40, 116, 117, 485
— прямая в многомерном пространстве 354
—, регулярная точка 485
—, точка ветвления 485
— уникурсальная 485
— уровня 280, 297, 298
Лист Мёбиуса 500
Лобачевского аксиома 439
— неевклидова геометрия 402, 439—452
— — —, проективная модель 458
— неевклидово пространство 450—452
— плоскость 439
— —, движение 447
— —, окружность 448
— —, орицикл 449
— —, предельная линия 449
— —, цикл 448
— —, эквидистанта 449
«Ломаная» 109
Ломаная линия 94
— —, длина 89, 94
Лоренца преобразование 436

Максимум функции 272, 281
Малая окружность 405
— ось эллипса 571
Медиана симплекса 382
Мера множества 127
Метр 86
— квадратный 86
— кубический 86
Метрическая геометрия 82
Метрические свойства фигур 477
Метрическое пространство 537
Мёбиуса лист 500
Минимум функции 272, 281
Минковского определение длины 127
— теорема 256
Минковского — Банаха геометрия 464—470
— — пространство 465
Минковского — Брунна теорема 238
Мнимая ось гиперболы 589, 591
Многовершинник выпуклый 215
— — многомерный 241

Многогранник 153
— выпуклый 67, 192, 211
— —, вершины 212
— —, грани 212
— — двумерный 212
— — многомерный 240
— — нульмерный 212
— — одномерный 212
— —, ребра 212
— — трехмерный 212
—, инвариант 167
— многомерный 386
— —, вершины 386
— — выпуклый 240
— —, грани 386
— — правильный 387
— — —, центр 388
— —, ребра 386
— —, теорема Эйлера 387
Многогранное тело 67
— —, объем 68, 72
— —, разбиение 67
— —, — правильное 67
Многогранные тела, пересечение 68
— —, разность 68
Многогранный простой кусок 132
Многомерная плоскость 354
— —, параллельность 357, 358
— —, перпендикулярность 358, 359
Многомерное выпуклое тело 239
— — —, диаметр 240
— — —, ширина 240
— многообразие 516, 520
Многомерный выпуклый многовершинник 241
— — многогранник 240
— комплекс 519
— крест 391
— куб 390
— многогранник 386
— —, вершины 386
— —, грани 386
— — правильный 387
— — —, центр 388
— —, ребра 386
— —, теорема Эйлера 387
— параллелепипед 378
— —, вершины 379
— —, грани 379
— —, объем 380
— — правильный 390
— —, ребра 379
— симплекс 243, 380
— —, вершины 380
— —, грани 381
Многомерный симплекс, объем 381
— — ортоцентрический 385
— —, ребра 381
— —, свойства 382—386
Многообразие замкнутое двумерное 492
— многомерное 516, 520
— трехмерное 520
— — замкнутое 520—525
— — открытое 520
— — с краем 526
— —, эйлерова характеристика 526
Многосторонник выпуклый 209
— — двумерный 210
— — нульмерный 210
— — одномерный 210
— —, сторона 211
Многоугольная фигура 17, 143
— —, площадь 21, 23
— —, разбиение 17
— —, — правильное 17
Многоугольник 17, 143
— вписанный 225, 329
— выпуклый 16, 189, 213
— —, вершины 214
— — двумерный 214
— — нульмерный 214
— — одномерный 214
— описанный 225, 329
—, площадь 145
— сферический 405
— —, площадь 414, 416
Многоугольники равнодополняемые 150
Многоугольные фигуры, вычитание 19
— —, пересечение 18, 19
— —, сложение 20
Множества бесконечно близкие 539
—, действия 14
—, отклонение 96
—, косое произведение 524
—, расстояние 539
—, топологическое произведение 523
Множество, внешняя точка 13, 66
—, внутренняя точка 13, 66
—, — часть 13, 67
—, граница 13, 67
—, граничная точка 13, 66
—, диаметр 538
—, дополнение 14
— замкнутое 15, 67, 541
—, замыкание 13, 67, 104
— квадрируемое 33, 58
— компактное 539

Множество компактное, размерность 550
—, компонента 542
— кубируемое 75, 81
—, мера 127
— неквадрируемое 41
— ограниченное 15, 67
— —, диаметр 102
— открытое 15, 67, 541
— связное 541
—, спрямляемое в смысле Минковского 127
—, — — — Хаусдорфа 129
Модель Бельтрами — Клейна 459
— проективная 458
— Пуанкаре 462
Монотонность длины 122
— объема 76
— площади 8, 45, 63, 143
— строгая объема 72
— — площади 24, 55

Наибольшее (наименьшее) значение функции 272, 281
Наилучшее квадратичное приближение 255
— линейное приближение 253
Наклонная призма 69
Направление параллельности 442
Направления сопряженные 582
Недостаток угловой 445
Неевклидова геометрия Галилея 452—458
— — Лобачевского 402, 439—452
— — —, проективная модель 458
— — Римана 404—419
— — —, проективная модель 458
— плоскость Римана 406
Неевклидово пространство Лобачевского 450—452
— — Римана 417—419
Неевклидовы геометрии 460
Неквадрируемая простая дуга 42
— фигура 44
Неквадрируемое множество 41
Неограниченная выпуклая фигура 182
Неориентируемая поверхность 500
Непрерывное отображение 37, 131, 543
— равномерно отображение 546
Неравенство треугольника 95
Несвязная фигура 481
Нижняя интегральная сумма 52
Нормаль к эллипсу 586
Нормированность длины 89
Нормированность объема 68
— площади 8, 62, 142
— — поверхности 130
Нульмерная цепь 532
Нульмерный выпуклый многогранник 212
— — многосторонник 210
— — многоугольник 214
— комплекс 486
Нуль-множество 34, 48, 59, 75, 76

Область замкнутая 16, 67
— квадрируемая 54
— определения функции 270, 278
Обобщенная формула Эйлера 536
Оболочка выпуклая 213, 241
Образ 478, 542
Объединение множеств 14
Объем, аксиоматическое определение 65
— выпуклого тела 229, 236
— — — многомерного 246
—, вычисление 68—72
—, единица 85
— как точная грань 76
— конуса 77
— многогранного тела 68, 72
— многомерного параллелепипеда 380
— — симплекса 381
— на классе кубируемых замкнутых областей 77
— — — — тел 76
— — — многогранных тел 68
—, определение 65, 76, 81
— пирамиды 71
—, преобразование 83
— при аффинном преобразовании 75, 77
— — преобразовании подобия 75, 77
— призмы 69
—, свойства 66, 68, 76
—, строгая монотонность 72
—, существование и единственность 72, 76
— тела вращения 80
— тетраэдра 71
— цилиндра 77
— шара 78, 236
— эллипсоида 79
Объемлющая фигура 33
Обыкновенная точка 188, 191
Ограниченная выпуклая фигура 182
Ограниченное множество 15, 67
— —, диаметр 102
Одномерная цепь 532

Одномерный выпуклый многогранник 212
— — многосторонник 210
— — многоугольник 214
— комплекс 486
— симплекс 243
Односторонний разрез 506
Окрестность 96, 478, 541
Окружность большая 405, 432
— в псевдоевклидовой геометрии 421
— вписанная 201
—, длина 123, 234
— малая 405
— описанная 200
— плоскости Лобачевского 448
Описанная окружность 200
— сфера 202
Описанный многоугольник 225, 329
Опорная гиперплоскость 240
— плоскость 192
— прямая 187
Опорный конус 191
Ориентация 499
Ориентируемая поверхность 500
Орисфера 452
Орицикл 449
Ортонормированный базис 351
Ортоцентр симплекса 385
Ортоцентрический многомерный симплекс 385
Особая точка 188, 191
Ось гиперболы вещественная 588
— — мнимая 589, 591
— параболы 598
— эллипса большая 569
— — малая 571
Отклонение множеств 96
— фигур 222
Открытая клетка 518
Открытое множество 15, 67, 541
— трехмерное многообразие 520
Относительности специальная теория Эйнштейна 433—439, 473
Отображение 131
— гладкое 131
— непрерывное 37, 131, 543
— равномерно непрерывное 546
Отрезок прямолинейный, длина 89

Парабола 562, 598—603
—, вершина 598
—, диаметр 601
—, касательная 599, 600
—, ось 598
—, параметр 598
—, фокус 598
Параллелепипед многомерный 378
— —, вершины 379
— —, грани 379
— —, объем 380
— — правильный 390
— —, ребра 379
Параллельности направление 442
Параллельные гиперплоскости 357
— многомерные плоскости 357
— прямые плоскости Лобачевского 442
Параметр параболы 598
Первая теорема Аполлония 582
Пересечение квадрируемых фигур 36
— многогранных тел 68
— многоугольных фигур 18, 19
— множеств 14
— фигур 207
Периметр выпуклой фигуры 228, 233
Перпендикулярные векторы 351
— многомерные плоскости 358, 359
Пирамида 70
Пифагора теорема 150
— — в псевдоевклидовой геометрии 426
Плоская фигура, площадь 7, 8
Плоскость касательная 193
— Лобачевского 439
— —, движение 447
— —, окружность 448
— —, орицикл 449
— —, предельная линия 449
— —, цикл 448
— —, эквидистанта 449
— многомерная 354, 360
— —, параллельность 357, 358
— —, перпендикулярность 358, 359
— неевклидова Римана 406
— опорная 192
— полуевклидова 430
— проективная 502
— пространства Лобачевского 451
— псевдоевклидова 420
— эллиптическая 503, 538
Площадь, аксиоматическое определение 9
— в геометрии подобия 84
— выпуклой фигуры 228, 233
—, вычисление 50—54
—, единица 85
— как предел 46
— — точная грань 45
— классической фигуры 52
—, конструктивные определения 10—12, 56—65
— криволинейной трапеции 51

Площадь круга 49, 234
— многоугольника 145
— — в геометрии Лобачевского 445
— на классе квадрируемых замкнутых областей 54
— — — — фигур 44
— — — многоугольных фигур 21
—, определение 9, 10—12, 64
— поверхности, аксиоматическое определение 136
— —, вычисление 139
— —, определение 130
— —, полунепрерывность 133
— —, свойства 130
— —, существование и единственность 136
—, преобразование 83
— при аффинном преобразовании 30, 49
— — ортогональном проектировании 29, 49
— — преобразовании подобия 29, 49
— прямоугольника 22, 145
—, свойства 7, 8, 45, 61, 62, 142, 143
— смешанная 237
—, строгая монотонность 24, 55
—, существование и единственность 24, 47
— сферического многоугольника 414, 416
— — треугольника 416
— трапеции 23
— треугольника 23
— — в геометрии Лобачевского 445
— эллипса 49, 583
Поверхности внутренняя геометрия 470
Поверхность 517
—, аксиоматическое определение площади 136
— выпуклого тела 229, 236
—, вычисление площади 139
— замкнутая 492
— —, классификация 510
— Клейна 502
— неориентируемая 500
—, определение площади 130
— ориентируемая 500
—, порядок связности 497
— простая 506
— —, классификация 507—510
—, род 512
— с краем 494
—, существование и единственность площади 136
— шара 236
Поверхность, эйлерова характеристика 497
— эквидистантная 452
Поворот гиперболический 424
Подобия геометрия 82
Покрытия кратность 550
Покрышка универсальная 316
Полнота класса квадрируемых фигур 48
— — кубируемых тел 77
Положительность длины 89, 122
— объема 68
— площади 7, 61, 142
— — поверхности 130
Полуевклидова плоскость 430
Полунепрерывность длины 97
— площади поверхности 130
Полуплоскость 14
Полупространство 212
Полуциклическая звезда 494
Полярное уравнение конических сечений 603
Понселе теорема 578, 579, 595, 596
Порядок связности комплекса 487—489
— — поверхности 497
Постоянной ширины фигура 199, 237
Постулат Евклида о параллельных 394
Правильное разбиение многогранного тела 67
— — многоугольной фигуры 17
Правильный многомерный многогранник 387
— — параллелепипед 390
Пределов метод 146, 150, 155
Предельная линия 449
— сфера 452
Преобразование Галилея 452
— конгруэнтное 538
— Лоренца 436
— проективное 477
— топологическое 478
Приближение наилучшее квадратичное 255
— — линейное 253
— чебышевское 252
Приведенная разность многогранных тел 68
— — многоугольных фигур 20, 54
Приведенное пересечение многогранных тел 68
— — многоугольных фигур 19, 54
Призма 68
— наклонная 69
— прямая 68

Прикосновения точка 539
Проективная плоскость 502
Проективное преобразование 477
— пространство 522
Проективные свойства фигур 477
Произведение множеств косое 524
— — топологическое 523
Прообраз 543
Простая дуга 37, 100, 484
— —, вершины 484
— — гладкая 38
— —, концы 100, 484
— —, критерий спрямляемости 114
— — кусочно гладкая 38
— — неквадрируемая 42
— — спрямляемая 111
— замкнутая линия 40, 116, 117, 485
— линия 36
— поверхность 506
— —, классификация 507—510
Простой кусок 132
— — квадрируемый 134
— — —, площадь 137
— —, край 132
— — многогранный 132
— — элементарный 137
— цикл 487
Пространства гомеоморфные 540, 543
— изометричные 538
— эквиморфные 544
Пространство близости 543
— евклидово 349, 537
— —, координаты 537
— —, расстояние 537
— —, точка 537
— инфинитезимальное 543
—, кривизна 472
— линзовое 522
— метрическое 537
— Минковского — Банаха 465
— неевклидово Лобачевского 450—452
— — Римана 417—419
— проективное 522
— псевдоевклидово 428
— риманово 472
— топологическое 480, 539
— —, аксиомы 540
— эллиптическое 538
Прямая времяподобная 428
— изотропная 428
— линия в многомерном пространстве 354
— опорная 187
— призма 68
— пространства Лобачевского 451
Прямая пространственноподобная 428
Прямой круговой конус 191
Прямолинейный отрезок, длина 89
Прямоугольник, площадь 22, 145
Прямые расходящиеся 442
Псевдоевклидова геометрия 420—439
— плоскость 420
Псевдоевклидово движение 424
— пространство 428
Пуанкаре закон двойственности 536
— модель 462
Пучок сфер многомерный 376

Равнобочная гипербола 592
Равновеликие фигуры 66, 146
Равнодополняемые многоугольники 150
Равномерно непрерывное отображение 546
Равносоставленные фигуры 66, 146
Радикальная гиперплоскость 376
Радикальный центр 376
Радиус гиперсферы 374
Радиусы фокальные 590
Разбиение барицентрическое 497, 520
— клеточное 492, 519
— — дуальное 525
— многогранного тела 67
— многоугольной фигуры 17
Разложения метод 146, 147, 150
Размерности гомологическая теория 554
Размерность 549
— компактного множества 550
Разность квадрируемых фигур 36
— многогранных тел 68
— многоугольных фигур 20
— множеств 14
Разрез 511
— двусторонний 506
— односторонний 506
Расстояние в евклидовом пространстве 537
— — метрическом пространстве 537
— — плоскости Лобачевского 441
— касательное 428, 450
— между выпуклыми фигурами 205
— — многомерными плоскостями 363
— — — — стационарное 370
— — множествами 539
— — точками 95
— — — на сфере 405
Расходящиеся прямые 442

Рациональное число 93
Ребро внутреннее 494
— выпуклого многогранника 212
— — — многомерного 240
— граничное 494
— комплекса 486, 519
— многомерного многогранника 386
— — параллелепипеда 379
— — симплекса 381
Регулярная точка линии 485
Релло треугольник 199
Решетка целочисленная 256
Римана неевклидова геометрия 404—419
— — —, проективная модель 458
— — плоскость 406
— неевклидово пространство 417—419
Риманово пространство 472
Римановы геометрии 472
Род поверхности 512

Связка сфер 376
Связная фигура 182, 481
Связное множество 541
Связности комплекса порядок 487—489
— поверхности порядок 497
Связный комплекс 486, 491
Сечение коническое 557, 568, 603
Сильная сходимость 125
Симплекс двумерный 243
— многомерный 243, 380
— —, вершины 380
— —, грани 381
— —, объем 381
— — ортоцентрический 385
— —, ребра 381
— —, свойства 382—386
— одномерный 243
— трехмерный 243
— характеристический 388
Синус гиперболический 422
Скалярное произведение 350
Сложение многоугольных фигур 20
Смешанная площадь 237
Сопряженные диаметры 582
— направления 582
Софокусные конические сечения 605
Специальная теория относительности Эйнштейна 433—439, 473
Спрямляемая простая дуга 111
Спрямляемое в смысле Минковского множество 127
— — — Хаусдорфа множество 129
Спрямляемости критерий 114
Стационарное расстояние между многомерными плоскостями 370
Стационарный угол 368
Степень точки относительно сферы 375
Сторона выпуклого многосторонника 211
Строгая монотонность объема 72
— — площади 23, 55
Сумма векторов 349
— выпуклых фигур 219
— интегральная 52
— квадрируемых фигур 36
— множеств 14
— цепей 532
Сфера в многомерном пространстве 373
— — — —, поверхность 377
— вписанная 202
— описанная 202
— предельная 452
— пространства Лобачевского 451
— псевдоевклидова пространства 430
— с p «ручками» 512
Сферическая геометрия 404
Сферический многоугольник 405, 414, 416
— треугольник 405, 416
Сферы концентрические 374
Сходимость сильная 125

Тело вращения 80
— выпуклое 182, 229
— — многомерное 239
— комплекса 491, 519
—, кривизна 194
— кубируемое 75, 81
— многогранное 67
Тетраэдр 67, 71, 153
—, объем 71
Тип топологический 479
Топологические свойства фигур 478
Топологический тип 479
Топологическое преобразование 478
— произведение множеств 523
— пространство 480, 539
— —, аксиомы 540
Топология 477, 480
— внутренняя 482
— дифференциальная 555
Торричелли точка 310, 312
Точка ветвления 485
— внешняя 13, 66, 186
— внутренняя 13, 66, 133, 186, 541
— граничная 13, 66
— евклидова пространства 537

Точка концевая 485
— обыкновенная 188, 191
— особая 188, 191
— прикосновения 539
— регулярная 485
— топологического пространства 480
— Торричелли 310, 312
Трансфинитная индукция 178
Трансфинитные числа 178
Трапеция криволинейная 50
—, площадь 23
Треугольник геодезический 471
—, площадь 23
— Релло 199
— сферический 405
— —, площадь 416
— Шварца 321
Треугольника аксиома 537
— неравенство 95
Трехмерная клетка 517
— цепь 532
Трехмерное многообразие 520
— — замкнутое 520—525
— — открытое 520
— — с краем 526
— —, эйлерова характеристика 526
Трехмерный выпуклый многогранник 212
— комплекс 518
— —, барицентрическое разбиение 520
— —, вершины 519
— —, ребра 519
— —, эйлерова характеристика 519
— симплекс 243
Триангуляция 492, 507

Угловой дефект 445
— избыток 415, 471
— недостаток 445
— эксцесс 415, 471
Угол в псевдоевклидовой геометрии 421
— внешний 194
— между многомерными плоскостями 368, 369
— — прямой и многомерной плоскостью 367, 368
— стационарный 368
— фигуры 188
Универсальная покрышка 316
Уникурсальная линия 485
Уровня линия 280, 297, 298

Ферма принцип 275, 292
Фигура входящая 33
Фигура выпуклая 182, 184, 209, 228
—, выпуклая оболочка 213
— квадрируемая 9, 12, 33, 58
— классическая 40
— —, квадрируемость 40
— —, площадь 52
—, компонента 481
—, метрические свойства 477
— многоугольная 17, 143
— неквадрируемая 44
— несвязная 481
— объемлющая 33
— плоская, площадь 7, 8
— постоянной ширины 199, 237
—, проективные свойства 477
— связная 182, 481
—, топологические свойства 478
Фигуры выпуклые, сумма 219
— гомеоморфные 479
— диффеоморфные 555
— изотопные 483
—, отклонение 222
—, пересечение 207
— равновеликие 66, 146
— равносоставленные 66, 146
Фокальная хорда 576
Фокальные радиусы 590
— свойства конических сечений 564
Фокусное расстояние 571
Фокусы 560, 574—576, 590, 598
Функция с ограниченным изменением 113

Хадвигера теорема 167, 170
Хадвигера — Глюра теорема 163
Характеристика эйлерова 241, 487, 497, 519, 526
Характеристический симплекс 388
Хаусдорфа определение длины 129
Хегора теорема 530
Хелли теорема 248, 250

Целочисленная решетка 256
Центр гиперболы 588
— гиперсферы 373
— правильного многомерного многогранника 388
— радикальный 376
— эллипса 570
Цепочка отрезков 109
— —, длина 110
Цепь, граница 488, 532
— двумерная 532
— замкнутая 532
— нульмерная 532
— одномерная 532

Цепь трехмерная 532
Цикл 488, 532
—, гомологичный нулю 533
— плоскости Лобачевского 448
— простой 487
Циклическая звезда 492, 494
Циклы гомологические 533
Цилиндр 77
Циркуль эллиптический 585

Чебышевские приближения 252
Четырехшарнирный метод Штейнера 339
Числа трансфинитные 178
Число Бетти 533
— иррациональное 93
— рациональное 93

Шар 66, 78, 191, 340
— в многомерном пространстве 374
— — — —, объем 377
—, объем 78, 236
—, поверхность 236
Шварца гармошка 134
— треугольник 321
Ширина выпуклого тела 200
— — — многомерного 240
— выпуклой фигуры 198
Шпернера лемма 551
Штейнера четырехшарнирный метод 339

Эйлера теорема 195, 241, 495
— — для многомерных многогранников 387
— формула обобщения 536
Эйлерова характеристика 241
— — комплекса 487, 519
— — поверхности 497
— — трехмерного многообразия 526
Эйнштейна специальная теория относительности 433—439, 473
Эквидистанта 449
Эквидистантная поверхность 452
Эквиморфные пространства 544
Эксцентриситет 560
Эксцесс угловой 415, 471
Элемент 517
— комплекса 490
Элементарная кривая 37
Элементарный простой кусок 137
Эллипс 562, 564, 569—587
—, большая ось 569
—, вершина 569
—, диаметр 574
—, касательная 574
—, малая ось 571
—, нормаль 586
—, площадь 49, 583
—, уравнение 580
—, фокальная хорда 576
—, фокусное расстояние 571
—, фокусы 574—576
—, форма 569
—, центр 570
Эллипсоид 79
Эллиптическая плоскость 503, 538
Эллиптический циркуль 585
Эллиптическое пространство 538

Юнга теорема 341